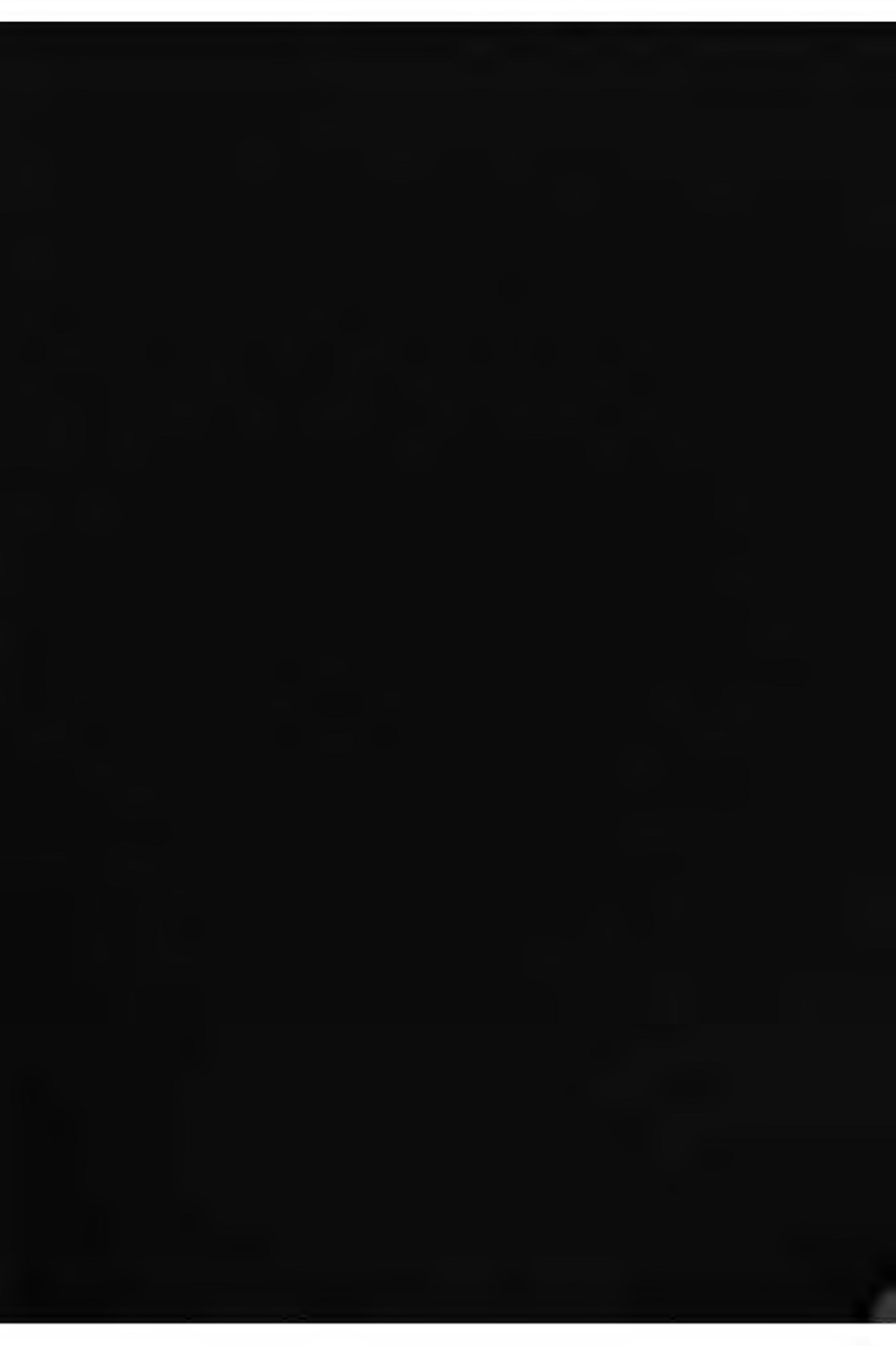
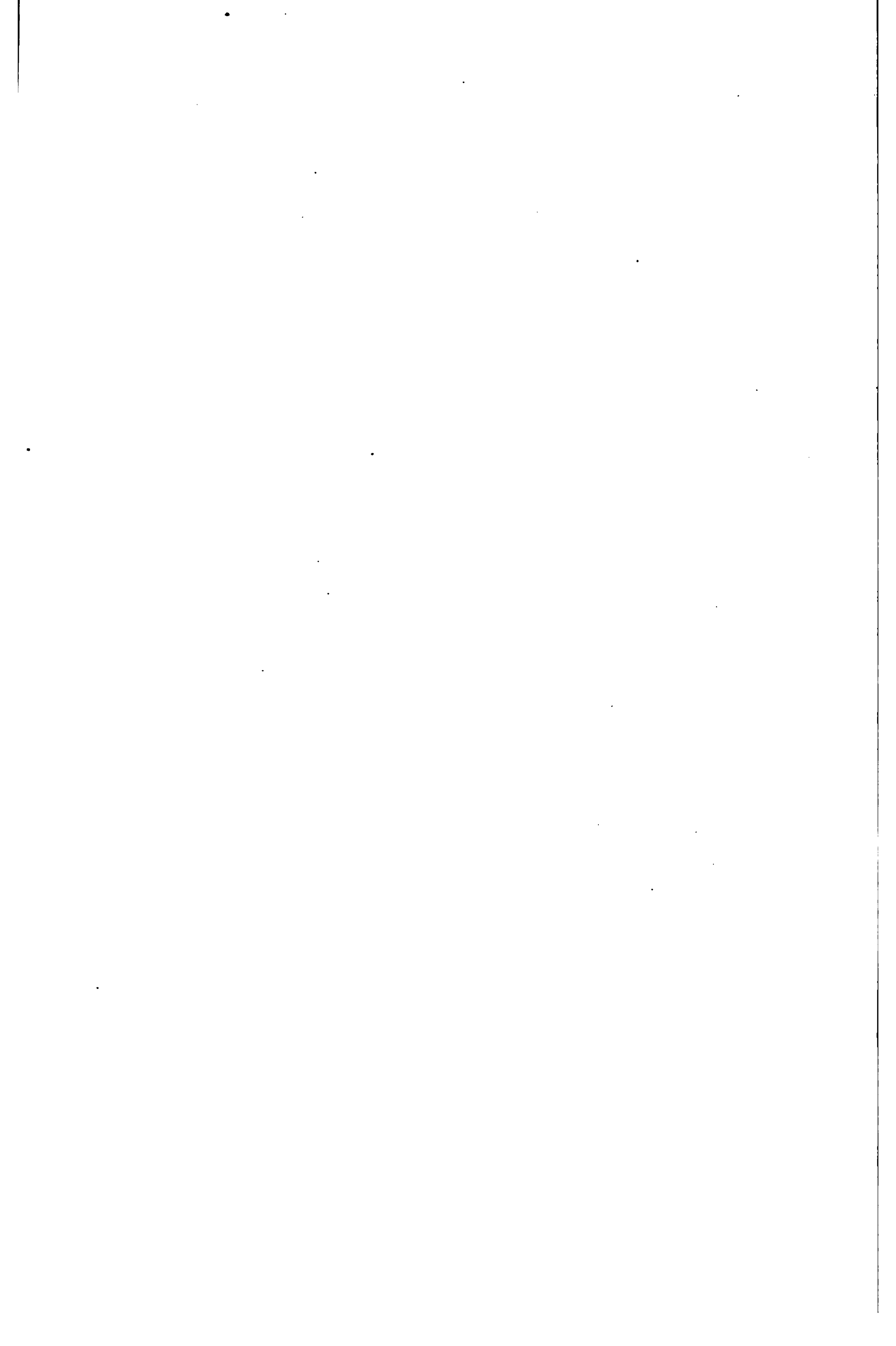
Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik

von

Dr. G. Benischke







Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik.



Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik.

Von

Dr. Gustav Benischke.

Zweite, erweiterte Auflage
von „Magnetismus und Elektrizität mit Rücksicht auf
die Bedürfnisse der Praxis“.

Mit 489 Abbildungen im Text.



Berlin.
Verlag von Julius Springer.
1907.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Vorwort.

Die vorliegende zweite Auflage erscheint unter dem Titel „Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik“, um noch mehr als früher zum Ausdruck zu bringen, daß dieses Buch für Elektrotechniker bestimmt ist, und weil eine so wesentliche Erweiterung des Inhaltes stattgefunden hat, daß eigentlich ein neues Buch vorliegt. Diese Ausgabe hat wegen anderweitiger starker Beanspruchung meiner Zeit, sowie infolge meines Bestrebens nach möglichst kurzer Fassung bei gleichzeitiger Wahrung einer streng systematischen Entwickelung mehr als zwei Jahre auf sich warten lassen. Daß trotz des Strebens nach möglichster Kürze der Umfang auf mehr als das Doppelte angewachsen ist, erklärt sich aus der beispiellosen Entwickelung der Elektrotechnik in den letzten zehn Jahren, die sich hauptsächlich auf die Anwendung immer höherer Spannungen und auf Ausnutzung von Erscheinungen, die früher nur als physikalische Versuche bekannt waren, erstreckt. Durch diese beiden Umstände wurde ein tieferes Eingehen in allen Kapiteln, sowie zwei neue Kapitel über die nichtstationären Stromzustände und über den Durchgang der Elektrizität durch die sogenannten Nichtleiter erforderlich. Im ersteren sind das Schließen und Öffnen der Ströme und die elektrischen Schwingungen behandelt, im letzteren die elektrischen Entladungen und Lichtbögen. Schon die letzten Aufgaben der Elektrotechnik und noch mehr ihre zukünftigen drehen sich darum, wie weit man in der Isolierung des elektrischen Stromes gelangt, und wie weit das elektrische Licht dem Gaslicht Boden abgewinnen kann. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit einer physikalischen Vertiefung für alle jene, welche sich nicht auf den laufenden Dienst in einem Konstruktions- oder Berechnungs- oder Installationsbureau beschränken wollen.

Für einen Teil der hier einschlägigen Fragen bildet die Elektronentheorie den Schlüssel zu einem übersichtlichen Verständnis. Aus diesem Grunde, aber auch nur so weit, als es dazu erforderlich ist, wurde die Elektronentheorie behandelt.

Das elektrotechnische Kauderwelsch (Resistanz, Konduktanz, Reaktanz, Induktanz, Impedanz, Admittanz, Suszeptanz, Reluktanz), das aus Amerika eingedrungen ist, findet sich auch in dieser Auflage an keiner Stelle, weil keinerlei Notwendigkeit dazu vorliegt. Es sind zwar noch einige so schöne Wortbildungen wie Kapazitätsreaktanz, Kondensanz, Restriktanz, Koaktanz, Retardanz hinzugekommen, aber es mehren sich doch diejenigen, welche sich daran erinnern, daß in erster Linie der akademisch Gebildete die Verpflichtung hat, richtige Sprachformen anzuwenden. Neue Fachausdrücke werden in der Technik von Zeit zu Zeit nötig und können unter Umständen auch einer anderen Sprache entnommen werden, aber doch nur in einer solchen Form, welche dem deutschen Sprachgebrauch entspricht.

Um dem Leser auch einen Begriff von den Zahlenwerten zu bieten, wurden wie in der ersten Auflage an jenen Stellen, wo die wichtigsten Größen zum ersten Male auftreten, Zahlenbeispiele eingefügt.

Da dieses Buch nicht nur ein Lehrbuch, sondern auch ein Nachschlagebuch für diejenigen sein soll, welche sich über eine in der Praxis auftauchende theoretische Frage Aufklärung holen wollen, wurden viele Schaulinien und Zahlentafeln aufgenommen, und zwar dem systematischen Aufbau entsprechend an jenen Stellen, wo sie inhaltlich hingehören. Um aber ihre Aufsuchung zu erleichtern, wurde ein Verzeichnis derselben dem Inhaltsverzeichnis angefügt. Eine Zusammenstellung der Buchstabenbezeichnung der wichtigsten Größen findet sich am Schluß des Buches.

Herrn Ingenieur Karl Wernicke danke ich auch an dieser Stelle für die Unterstützung bei der Korrektur.

Pankow bei Berlin, im Februar 1907.

Dr. G. Benischke.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Grundgesetze über Magnetismus und Elektrizität.

Seite

1. Anschauungen über das Wesen des Magnetismus und der Elektrizität 1
2. Das Coulombsche Gesetz 2
3. Kraftfeld 3
4. Stärke, Richtung und Gestalt eines Kraftfeldes. Kraftlinien 4
5. Bildliche Darstellung magnetischer und elektrischer Kraftfelder . . 5
6. Zu- und Abnahme der Kraft. Homogene Felder 8
7. Anzahl der Kraftlinien 10
8. Zusammensetzung von Kraftfeldern 13
9. Magnetisches Moment 13
10. Das magnetische Feld der Erde 14
11. Feldstärke neben und zwischen Flächen, die gleichmäßig mit magnetischer oder elektrischer Masse bedeckt sind 16
12. Das Potential; seine mathematische und physikalische Bedeutung . 17
13. Potential mehrerer Massen 20
14. Bewegungsrichtung und Potential 20
15. Die Niveauflächen und ihre Beziehung zu den Kraftlinien 21

Zweites Kapitel.

Grundgesetze der Elektrostatik.

16. Potential auf sich selbst 25
17. Elektrizitätserzeugung. Hypothesen der Elektrizität 25
18. Verteilung der Elektrizität auf Leitern und Isolatoren 28
19. Elektrostatische Schirmwirkung 30
20. Potential einer geladenen Kugel auf sich selbst und auf einen äußeren Punkt 31
21. Abhängigkeit der elektrischen Dichte vom Krümmungsradius. Spitzenwirkung 32
22. Kapazität 33
23. Potential und Kapazität der Erde 34
24. Elektroskop, Elektrometer 35
25. Oberflächenspannung einer elektrischen Ladung 36
26. Einfluß eines benachbarten mit der Erde verbundenen Leiters. Kondensator 37
27. Plattenkondensator 39
28. Das Dielektrikum 41
29. Die Dielektrizitätskonstanten der wichtigsten Stoffe 44

Seite
30. Formeln für verschiedene Kondensatoren 44
31. Kondensatoren in Neben- und Hintereinanderschaltung 47
32. Ladungsenergie 48
33. Die Faradaysche Vorstellung über die Beschaffenheit des Dielektrikums 50
34. Elektrisierungszahl und Dielektrizitätskonstante 52
35. Innere Energie eines polarisierten Dielektrikums 52
36. Anziehung und Abstoßung eines Nichtleiters in einem elektrischen Felde 53
37. Brechung der Kraftlinien an der Grenzfläche zweier Nichtleiter . . 55
38. Rückstandsbildung im Dielektrikum 58

Drittes Kapitel.

Grundgesetze der strömenden Elektrizität.

39. Das Zustandekommen eines elektrischen Stromes 60
40. Stromquellen 61
41. Begriff der Stromstärke 62
42. Das Ohmsche Gesetz 62
43. Leitungswiderstand und Leitungsvermögen 63
44. Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur 65
45. Widerstand von Kohle und Selen 67
46. Weitere Bemerkungen zu dem Ohmschen Gesetze 67
47. Klemmenspannung 68
48. Mehrere elektromotorische Kräfte in einem Stromkreise 69
49. Ableitung zur Erde 70
50. Die Kirchhofschen Sätze über Stromverzweigung 70
51. Hintereinander- und Nebeneinanderschaltung 72
52. Arbeit und Leistung eines Stromes 73
53. Stromwärme. Joulesches Gesetz 74
54. Das Gesetz der kleinsten Stromwärme 74

Viertes Kapitel.

Die elektrolytischen Vorgänge.

55. Einteilung der Stoffe in Bezug auf die Leitung der Elektrizität . . 76
56. Die Elektrolyse und ihre Benennungen 77
57. Sekundäre Prozesse 77
58. Wasserzersetzung 79
59. Faradays Gesetze der Elektrolyse 80
60. Theorie der elektrolytischen Leitung 81
61. Dissoziierte Stoffe und Ionisatoren 84
62. Spezifischer Widerstand der Elektrolyte 85
63. Konzentrationsänderung durch elektrolytische Leitung. Beweglichkeit der Ionen 87
64. Elektrolyse geschmolzener Salze 89
65. Elektrolytische Leitung in festen Stoffen 90
66. Polarisation 92
67. Stromerzeugung durch chemische Vorgänge 95
68. Die wichtigsten konstanten Zellen 96
69. Lokalströme 97
70. Konzentrationsketten 97
71. Normalelemente 98
72. Trockenelemente 99
73. Berechnung der elektromotorischen Kraft aus der Verbindungswärme 100
74. Akkumulatoren 102
75. Elektrische Kataphorese (Mitführung) 106

Fünftes Kapitel.

Magnetische Wirkungen des Stromes.

Seite

76. Amperesche Regel. Das magnetische Feld des Stromes 108
77. Bewegungsvorrichtungen 110
78. Die Kraft zwischen einem Stromelement und einem Magnetpol . . 111
79. Die Kraft zwischen einem unendlich langen Strom und einem Magnetpol 112
80. Magnetische Feldstärke eines Stromes in seiner nächsten Umgebung 113
81. Magnetische Feldstärke einer geschlossenen Stromfigur 114
82. Die elektromagnetische Eigenwirkung eines Stromes 116
83. Ein geradliniger Strom in einem homogenen magnetischen Felde . 118
84. Eine geschlossene Stromfigur in einem homogenen magnetischen Felde 119
85. Das magnetische Gebläse 121
86. Magnetische Platte 122
87. Potential einer geschlossenen Stromfigur 123
88. Magnetisches Feld eines Solenoides 125

Sechstes Kapitel.

Magnetische Induktion.

89. Magnetisierungsstärke 129
90. Magnetisierung durch Verteilung oder Induktion 130
91. Beziehung zwischen magnetisierender Kraft und Kraftliniendichte. Magnetisierungszahl und magnetische Durchlässigkeit 133
92. Paramagnetische und diamagnetische Stoffe 135
93. Magnetische Sättigung 136
94. Magnetische Hysterese 138
95. Dauermagnetismus und Koerzitivkraft 140
96. Magnetische Verzögerung 141
97. Magnetische Arbeit 142
98. Arbeitsverlust bei einem magnetischen Kreisprozeß 143
99. Anziehung und Abstoßung in einem magnetischen Felde 145
100. Brechung der Kraftlinien an der Grenzfläche magnetischer Stoffe . 147
101. Magnetische Schirmwirkung 149
102. Entmagnetisierende Kraft. Dauermagnete 150
103. Die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur 153
104. Das magnetische Altern des Eisens 154
105. Der magnetische Kreis 155
106. Magnetische Widerstände in Hintereinanderschaltung 157
107. Der magnetische Widerstand längerer Luftstrecken 160
108. Verzweigung eines Kraftlinienbündels. Magnetische Widerstände in Nebeneinanderschaltung 162
109. Magnetomotorische Kräfte von entgegengesetzter Richtung. Magnetische Stauung 164
110. Magnetische Streuung 166
111. Magnetische Charakteristik 170
112. Praktische Anwendungen 173
113. Der magnetische Kreis bei Dauermagneten 175
114. Anziehung zweier paralleler Flächen. Tragkraft eines Magnetes . . 177
115. Die Arbeit bei magnetischer Anziehung 178

Siebentes Kapitel.

Elektrodynamik.

Seite

116. Die Kraftwirkung zweier Ströme 180
117. Arbeitswert zweier Ströme 182
118. Formeln für die gegenseitige Induktion 184
119. Arbeitswert eines Stromes in bezug auf sich selbst; Koeffizient der Selbstinduktion 185
120. Spezielle Fälle 187
121. Verhältnis zwischen den Koeffizienten der gegenseitigen und der Selbstinduktion 188
122. Die gesamte magnetische Arbeit 189

Achtes Kapitel.

Elektrische Induktion.

123. Das Wesen der elektrischen Induktion 190
124. Größe der induzierten elektromotorischen Kraft 191
125. Die Richtung der induzierten EMK. Die Gesetze von Lenz und Fleming 193
126. Die Spannungsgleichung 195
127. Richtungswechsel der induzierten EMK 195

Neuntes Kapitel.

Der einfache Wechselstrom.

128. Die induzierte EMK als einfache periodische Funktion 197
129. Die Elektrizitätsmenge eines veränderlichen Stromes 201
130. Der arithmetische Mittelwert 202
131. Der quadratische Mittelwert 203
132. Elektromotorische Kraft der Selbstinduktion 205
133. Das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom 209
134. Arbeit und Leistung eines Wechselstromes 212
135. Das Spannungsdiagramm 215
136. Das Stromdiagramm. Wattstrom und wattloser Strom 216
137. Zusammenfassung der Ergebnisse 217
138. Drosselspulen 218
139. Graphische Darstellung der Wechselstromgrößen durch Vektoren . 220
140. Scheinbarer Widerstand bei Hintereinanderschaltung 221
141. Die Verzweigung eines veränderlichen Stromes 223
142. Der scheinbare Widerstand einer Stromverzweigung 225
143. Stromverzweigung in Hintereinanderschaltung mit Widerstand und Selbstinduktion 228

Zehntes Kapitel

Gegenseitige Induktion zweier Stromkreise.

144. Das Verhältnis der elektromotorischen Kräfte 229
145. Die primäre und sekundäre Spannungsgleichung 231
146. Der primäre Strom 234
147. Strom und Klemmenspannung des sekundären Kreises 239
148. Das Verhältnis zwischen primärem und sekundärem Strom 241
149. Der Spannungsabfall in der primären und sekundären Wickelung . 243
150. Das magnetische Feld zweier Stromkreise mit gegenseitiger Induktion 244
151. Der Magnetisierungsstrom 247

Seite

152. Das Transformatorproblem mit Berücksichtigung der magnetischen Streuung . . . 247
153. Die Streufaktoren und Selbstinduktionskoeffizienten bei einem Transformator mit Streuung . . . 254
154. Strom und Klemmenspannungen bei magnetischer Streuung . . . 257
155. Kurzschluß eines Transformators . . . 258
156. Elektrodynamische Schirmwirkung . . . 261
157. Wechselstrommotor System Benischke . . . 263
158. Transformatoren in Hintereinanderschaltung . . . 266
159. Selbstinduktion und gegenseitige Induktion in Hintereinanderschaltung. Wirksame Selbstinduktion . . . 267
160. Induktionsfreie Stromkreise . . . 270
161. Stromverzweigung bei gegenseitiger Induktion . . . 272
162. Wirbelströme . . . 273
163. Hystereseverlust bei periodischer Magnetisierung . . . 278
164. Der gesamte Eisenverlust und der Magnetisierungsstrom . . . 281
165. Einfluß der Wirbelströme auf die Magnetisierung . . . 286
166. Ungleichmäßige Verteilung des Wechselstromes über den Leiterquerschnitt. Hautwirkung . . . 288
167. Der Einfluß der Wirbelströme auf den Widerstand einer Drahtspule 292
168. Die magnetische Arbeit des Wechselstromes . . . 295
169. Das Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit . . . 299

Elftes Kapitel.

Die Kapazitätserscheinungen.

170. Scheinbarer Widerstand eines Kondensators . . . 302
171. Vergleich mit Hydrodynamik . . . 307
172. Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität in Hintereinanderschaltung . . . 308
173. Elektrische Resonanz . . . 309
174. Mehrere Kondensatoren in Nebeneinanderschaltung und in Hintereinanderschaltung . . . 313
175. Stromverzweigung bei Selbstinduktion und Kapazität . . . 314
176. Ein Kondensator im Nebenschluß zu Widerstand und Selbstinduktion 315
177. Ladungsarbeit eines Kondensators . . . 320
178. Arbeitsverlust im Dielektrikum . . . 321
179. Resonanz bei einem unvollkommenen Kondensator . . . 323
180. Das magnetische Feld eines Kondensators . . . 327
181. Wärmearbeit, magnetische Arbeit, elektrische Arbeit . . . 328
182. Resonanztransformator . . . 329

Zwölftes Kapitel.

Nichtstationäre Stromzustände.

183. Entstehen und Verschwinden eines Stromes ohne Kapazität . . . 335
184. Vergleich der Selbstinduktion mit der Trägheit . . . 338
185. Entstehen und Verschwinden eines Stromes bei gegenseitiger Induktion . . . 339
186. Funken und Lichtbogen beim Unterbrechen eines Stromkreises. Überspannung . . . 342
187. Die Wärmearbeit des Extrastromes . . . 345
188. Entstehen und Verschwinden eines Stromes in Spulen mit massivem Eisenkern . . . 347

Seite

189. Öffnen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion. Elektrische Schwingungen . . . 348
190. Schließen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion . . 358
191. Eigenschwingung und erzwungene Schwingung . . . 360
192. Die Dämpfung einer elektrischen Schwingung . . . 361
193. Der Dämpfungswiderstand des Funkens . . . 363
194. Überspannung beim Schließen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion . . . 366
195. Umformung elektrischer Schwingungen. Tesla-Transformator . . . 367
196. Resonanz zwischen zwei gekuppelten Stromkreisen . . . 374
197. Allgemeine Betrachtung über die Schwingungen gekuppelter Systeme 377
198. Mittel zur Erzeugung elektrischer Schwingungen . . . 380
199. Funkeninduktoren und ihre Unterbrecher . . . 384
200. Elektrische Strom- und Spannungskupplung . . . 389
201. Stehende elektrische Wellen . . . 391
202. Elektromagnetische Wellen im Dielektrikum . . . 394
203. Wellenanzeiger und Wellenmesser . . . 394
204. Das Wesen der drahtlosen Telegraphie . . . 398

Dreizehntes Kapitel.

Zusammengesetzte Wellenformen.

205. Die wichtigsten Wellenformen . . . 402
206. Beziehung zwischen Spannungswellen und magnetischen Wellen. Unsymmetrische Wellen . . . 404
207. Scheitelwert, effektiver Wert und arithmetischer Mittelwert einer zusammengesetzten Wellenform . . . 406
208. Formfaktor und Scheitelfaktor . . . 409
209. Leistung, Leistungsfaktor, äquivalente Sinuswelle . . . 410
210. Der Hystereseverlust im Eisen bei zusammengesetzten Wellenformen 411
211. Die Stromwelle bei Kapazität und Selbstinduktion . . . 413
212. Die Stromwelle bei Apparaten mit Eisenkern . . . 415
213. Die Wellenformen des Transformators . . . 418
214. Formeln zur Ausrechnung einer zusammengesetzten Wellenform . . 420

Vierzehntes Kapitel.

Der Durchgang der Elektrizität durch Nichtleiter.

215. Verschiedene Arten des Elektrizitätsdurchganges durch ein Gas . . 423
216. Entladung in verdünnten Gasen . . . 424
217. Spannungsgefälle in Entladungsröhren . . . 427
218. Die Eigenschaften der Kathodenstrahlen . . . 428
219. Röntgenstrahlen . . . 431
220. Die Elektronentheorie . . . 433
221. Der elektrische Strom in metallischen Leitern als Strom freier Elektronen . . . 435
222. Kathodenstrahlen als freie negative Elektronen. Kanalstrahlen als freie positive Elektronen . . . 436
223. Radiumstrahlen . . . 438
224. Elektrizitätsleitung in Gasen durch Ionisierung . . . 438
225. Unselbständige und selbständige Elektrizitätsleitung in Gasen . . . 440
226. Ursachen der unselbständigen Strömung . . . 441
227. Elektrizitätszerstreuung . . . 443
228. Ursache der selbständigen Strömung . . . 445

Seite
229. Dunkle Entladung, Glimmlicht, Büschellicht 447
230. Äußeres Bild der Funkenentladung 449
231. Die Schlagweite der Funkenentladung 452
232. Beeinflussung der Funkenentladung durch Entladeverzug und Überspannung 456
233. Elektrizitätsdurchgang durch feste und flüssige Isolatoren 458
234. Durchschlagsfestigkeit und Widerstand 460
235. Durchschlagsfestigkeit hintereinandergeschalteter Isolierstoffe . . . 462
236. Oberflächenleitung, Gleitfunken 465
237. Äußeres Bild des Lichtbogens 467
238. Lichtbogenspannung und Existenzbedingung des Lichtbogens . . . 468
239. Das Wesen des Lichtbogens 471
240. Der Quecksilberlichtbogen 472
241. Der Wechselstromlichtbogen 474
242. Elektrische Ventile. Gleichrichter 475
243. Der Lichtbogen als Schwingungserzeuger 481
244. Ozonisierung und Stickstoffbindung 483

Fünfzehntes Kapitel.

Die mehrphasigen Wechselströme.

245. Das Prinzip der mehrphasigen Motoren 485
246. Verkettung beim Zweiphasenstrom 487
247. Verkettung beim Dreiphasenstrom 490
248. Verkettung zusammengesetzter Wellenformen 494
249. Die elektrische Leistung des Dreiphasenstromes 497
250. Das resultierende magnetische Feld eines Dreiphasenstromes . . . 499
251. Das resultierende magnetische Feld eines Zweiphasenstromes . . . 504
252. Umwandlung von Zwei- in Dreiphasenstrom 505
253. Herstellung mehrphasiger Ströme aus einem Wechselstrom 505
254. Motoren mit verschobenen magnetischen Feldern 508

Sechzehntes Kapitel.

Die Grundlagen der Meßtechnik.

255. Allgemeines über Meßinstrumente 511

Strom- und Spannungsmessung.

256. Voltameter 515
257. Instrumente mit Dauermagneten 516
258. Dynamometer 518
259. Stromwagen 522
260. Hitzdraht-Instrumente 522
261. Induktionsinstrumente 524
262. Elektromagnetische Instrumente 526
263. Elektrostatische Spannungsmesser 528
264. Statische Spannungsmesser für hohe Spannungen 530
265. Galvanometrische Spannungsmesser 531
266. Indirekte Spannungsmessung 532
267. Indirekte Strommessung 534
268. Messung eines Stromstoffes oder einer Elektrizitätsmenge 535

Leistungsmessung.

269. Dynamometrische Leistungsmesser 536
270. Induktions-Leistungsmesser 538

Seite

271. Schaltung der Leistungsmesser bei Ein- und Mehrphasenströmen . 540
272. Messung des Leistungsfaktors und des wattlosen Stromes 542
273. Stromwandler 543

Widerstandsmessungen.

274. Widerstandsmessung durch Vergleichung. Thomsonsche Brücke . . 547
275. Die Wheatstonesche Brücke 549
276. Widerstandsmessung von elektrolytischen Leitern 550

Die Messung der charakteristischen Wechselstromgrößen.

277. Die Messung wirksamer, äquivalenter und scheinbarer Widerstände 551
278. Die Wheatstonesche Brücke bei Wechselstrom 554
279. Bestimmung der Periodenzahl 555
280. Die Aufnahme von Wellenformen 556

Magnetische Messungen.

281. Bestimmung der Kraftliniendichte und Kraftlinienmenge 559
282. Bestimmung des Hystereseverlustes 561
283. Die Bestimmung der magnetischen Durchlässigkeit 562

Siebzehntes Kapitel.

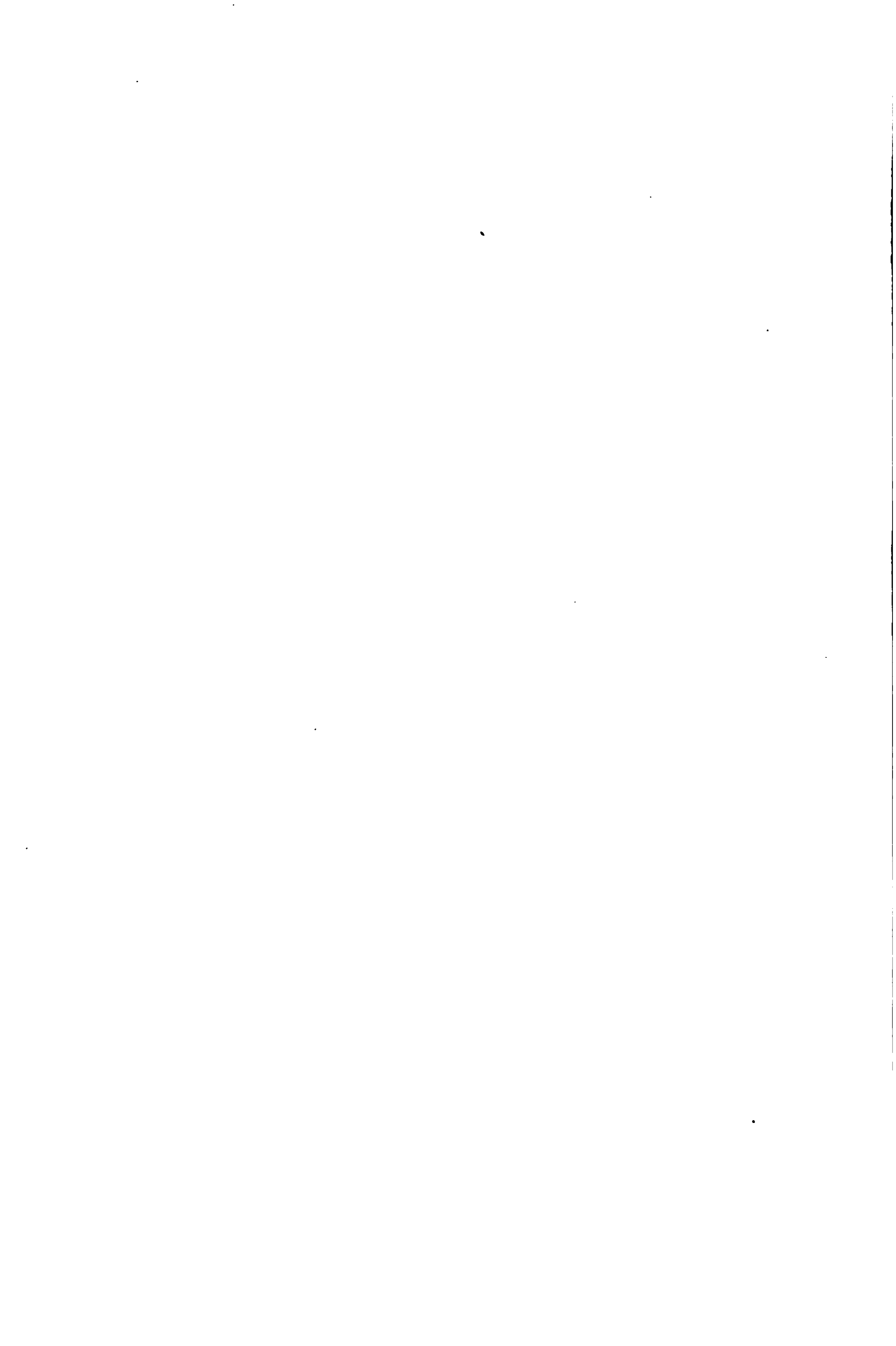
Das absolute Maßsystem.

284. Die Grundeinheiten 564
285. Geometrische Einheiten 564
286. Mechanische Einheiten 565
287. Das elektrostatische Maßsystem 567
288. Das elektromagnetische Maßsystem 567
289. Die praktischen Einheiten 569
290. Beziehung zwischen dem elektrostatischen und elektromagnetischen Maßsystem 571
291. Verwendung der Dimensionen zur Rechnungskontrolle 572

Zusammenstellung der wichtigsten Bezeichnungen 574
Schlagwörterverzeichnis 576

Verzeichnis der Zahlentafeln und Schaulinien.

	Seite
Die Dielektrizitätskonstanten der wichtigsten Stoffe	44
Spezifische Widerstände und Temperaturkoeffizienten	64, 65
Elektrochemische Äquivalente	81
Spezifischer Widerstand und Temperaturkoeffizient verdünnter Schwefelsäure	86
Spezifische Widerstände und Temperaturkoeffizienten wässeriger Lösungen	87
Magnetische Durchlässigkeit — Kraftliniendichte	136
Magnetisierungsstärke — magnetisierende Kraft	137
Kraftliniendichte — magnetisierende Kraft	137
Remanenz und Koerzitivkraft	141
Magnetischer Widerstand von Luftstrecken	160
Kraftliniendichte — Amperewindungen	173
Wirbelstromverlust	277
Hystereseverlust	279
Eisenverluste (Hystereseverlust + Wirbelstromverlust)	282
Ungleichmäßige Verteilung der Kraftlinien	287, 288
Widerstandszunahme durch Hautwirkung	292
Funkenwiderstand in Abhängigkeit von Funkenlänge und Kapazität	365
Formeln zur Ausrechnung zusammengesetzter Wellenformen	420
Glimmentladung aus Drähten bei verschiedener Spannung	448
Funkenschlagweite in Luft	454, 455
Durchschlagsspannung von Harzöl, Mineralöl, Glimmer, Gummi, Porzellan	461
Lichtbogencharakteristik	469, 470
Dimensionen der wichtigsten Größen	573



Erstes Kapitel.

Allgemeine Grundgesetze über Magnetismus und Elektrizität.

1. Anschauungen über das Wesen des Magnetismus und der Elektrizität.

Magnetismus und Elektrizität sind uns ihrem eigentlichen Wesen nach unbekannt, und zwar auch dann noch, wenn wir sie als schwingende Bewegungen eines uns unbekannten schwerlosen Stoffes, des Äthers, betrachten, oder gemäß den ältesten und jüngsten Hypothesen als einen wirklichen Stoff mit Gleichgewichts- und Bewegungszuständen. Bekannt sind und werden uns nur die Wirkungen des Magnetismus und der Elektrizität, und diese sind wir auch imstande durch Versuche zu verfolgen und rechnerisch zu bestimmen.

Da wir wissen, daß sowohl Magnetismus als auch Elektrizität in zwei derartig verschiedenen Zuständen auftreten, daß sie sich gegenseitig in ihren Wirkungen aufheben, so erklären wir sie uns durch die Annahme eines positiven und eines negativen Stoffes oder Fluidums; und je nachdem das eine oder das andere auf einem Körper im Überschuß vorhanden ist, nennen wir ihn positiv oder negativ magnetisch bzw. elektrisch.

Nun zeigt sich aber schon ein Unterschied zwischen Magnetismus und Elektrizität. Denn während ein elektrisierter Körper in seiner ganzen Ausdehnung ausschließlich positiv oder ausschließlich negativ elektrisch sein kann, enthält ein magnetisierter Körper immer gleiche Mengen positiven und negativen Fluidums, die örtlich voneinander getrennt sind. Selbst wenn man einen Magnet in der Mitte zerbricht, so hat doch jede der beiden Hälften ein positives und ein negatives Ende. Die Elektrizität kann ferner von

einem Körper auf einen anderen übergehen, der Magnetismus nicht; das elektrische Fluidum kann sich also auf seinem Träger fortbewegen, strömen, das magnetische ist immer an denselben gebunden. Aus einem unelektrischen Körper kann man durch Verteilung oder Influenz unbegrenzte Mengen Elektrizität erhalten; die Magnetisierung eines Körpers aber hat eine Grenze, die Sättigung. Man muß daher die magnetische Masse in jedem Körper von vornherein als gegeben betrachten in der Form von „Molekularmagneten", die beim unmagnetischen Zustande so unregelmäßig gelagert sind, daß ihre Gesamtwirkung nach außen Null ist. Bei der Magnetisierung findet eine regelmäßige Lagerung statt, und zwar so, daß die positiven Enden der Molekularmagnete nach der einen, die negativen nach der anderen Seite gerichtet sind.

Je stärker die Magnetisierung, desto größer ist die Anzahl der geordneten Moleküle gegenüber den ungeordneten. Der Sättigungspunkt ist erreicht, wenn alle gleich gerichtet sind. Die Gesamtwirkung nach außen scheint von einem einzigen Punkte am Ende jeder Hälfte auszugehen, den wir den positiven oder negativen Pol nennen. In diesem Sinne können wir nun ebenso wie bei der Elektrizität punktförmige magnetische Massen betrachten.

2. Das Coulombsche Gesetz.

Zwei gleichnamige magnetische oder elektrische Massen m und m', die sich in der Entfernung r voneinander befinden, stoßen sich mit einer Kraft ab, welches proportional ist dem Produkte dieser Massen und verkehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung, also mit einer Kraft

$$F = c\,\frac{m m'}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Haben wir ungleichnamige Massen $+m$ und $-m$, so ist die Kraft, mit der sie aufeinander wirken $F = -c\,\frac{m m'}{r^2}$. Das negative Vorzeichen besagt, daß die Kraft jetzt entgegengesetzte Richtung hat wie vorhin, d. h., daß sich ungleichnamige Massen anziehen.

Dieses Gesetz lautet ebenso wie das Newtonsche Gravitationsgesetz und wurde von Coulomb mittels der von ihm erfundenen Drehwage entdeckt. Der Wert des Proportionalitätsfaktors c hängt ab von der Wahl des Maßsystems, nach welchem m und m' gemessen werden, und von dem Medium, in dem sich diese Massen befinden. Das magnetische und das elektrostatische Maßsystem

sind so gewählt, daß für Luft $c = 1$ ist. Für diese Maßsysteme ist also

$$F = \frac{m m'}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Daraus gewinnen wir den Begriff der magnetischen und der elektrischen Masseneinheit, indem wir festsetzen, daß jene magnetische bzw. elektrische Masse als Einheit gilt, welche auf eine gleich große, 1 cm entfernte Masse die Krafteinheit ausübt. Dann ist $F = 1 = \frac{1^2}{1^2}$. Die absolute Krafteinheit (das Dyn) ist angenähert gleich dem Gewichte eines Milligramms (vgl. Kap. 18).

Sind die elektrischen oder magnetischen Massen mit ihren Trägern, den materiellen Massen fest verbunden, wie dies bei den magnetischen immer der Fall ist, und bei den elektrischen, wenn sie auf Nichtleitern (Isolatoren) sitzen, so wirkt diese Kraft auch zwischen den Trägern. Sitzen aber die elektrischen Massen auf Leitern, welche eine freie Bewegung der Elektrizität zulassen, so unterliegen nur sie dem Coulombschen Gesetz, d. h. gleichnamige elektrische Massen müssen sich, soweit es der leitende Körper zuläßt, voneinander entfernen, ungleichnamige soweit als möglich nähern.

3. Kraftfeld.

Würden wir um die Masse m mehrere andere Massen beliebig verteilen, so würde zwischen jeder von diesen und der Masse m eine Kraft F bestehen. Die Wirkung der Masse m erstreckt sich also über den ganzen umgebenden Raum, und diesen nennt man daher das Kraftfeld, und zwar entweder magnetisches oder elektrisches Kraftfeld.

4. Stärke, Richtung und Gestalt eines Kraftfeldes. Kraftlinien.

Die magnetischen und elektrischen Kräfte sind ebenso wie die mechanischen durch zwei Stücke, Größe und Richtung, bestimmt. Es besitzt demnach auch das magnetische und elektrische Kraftfeld an jeder Stelle eine bestimmte Stärke und Richtung.

Die Stärke des Feldes an einer gewissen Stelle ist bestimmt durch die Größe der Kraft, welche die das Feld erzeugende Masse auf eine an dieser Stelle befindliche Masse Eins ausüben würde.

Demnach ist die **Stärke** des Feldes einer punktförmigen Masse m in der Entfernung r

$$\mathfrak{H} = \frac{m}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Masse 1 erzeugt also in der Entfernung 1 die Feldstärke 1. Befindet sich statt der Masse Eins an dieser Stelle die Masse m', so ist die Kraft

$$F = \frac{m m'}{r^2} = \mathfrak{H} m', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

d. h. **die Kraft zwischen diesen zwei Massen ist gleich der Stärke des von der einen Masse erzeugten Feldes multipliziert mit der an dem betreffenden Orte befindlichen zweiten Masse.**

Die **Richtung** des Kraftfeldes an irgend einer Stelle ist bestimmt durch die **Bewegungsrichtung**, welche eine **positive** Probemasse an jener Stelle einschlagen würde. Ist die das Feld erzeugende Masse positiv, so wird sich, wenn wir von jedem Bewegungshindernis und anderen Massen absehen, jene Probemasse von dem Pole weg auf einer gewissen Bahn bis ins Unendliche fortbewegen; das ist die positive Richtung des Feldes. Rührt das Feld von einer negativen Masse her, so würde sich jene Probemasse aus unendlicher Entfernung auf derselben Bahn bis in unmittelbare Nähe dieses Pols bewegen; das ist die negative Richtung des Feldes.

Man nennt diese Bahnen **Kraftlinien**. Der Inbegriff aller Kraftlinien, deren man sich natürlich unendlich viele denken kann, ist das Kraftfeld. Durch die Form der Kraftlinien ist die Gestalt des Feldes bestimmt.

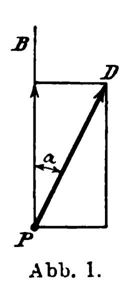


Abb. 1.

Es ist zu beachten, daß nach den vorstehenden Bestimmungen die **Feldstärke**, und die auf die Masseneinheit ausgeübte **Kraft** nur dann identisch sind, wenn **die Kraft** gemeint ist, welche in der Richtung der Kraftlinien wirkt, also auf eine **frei bewegliche** Masseneinheit. Kann sich die Masseneinheit aber nur in der Richtung PB (Abb. 1) bewegen, während PD die Richtung der durch P gehenden Kraftlinie ist, so ist die in der Richtung PB wirkende Kraft gleich der in diese Richtung fallenden Komponente von PD, also gleich $\frac{m}{r^2} \cos \alpha$, wenn α der Winkel zwischen PB und der Kraftlinienrichtung ist.

5. Bildliche Darstellung magnetischer und elektrischer Kraftfelder.

Die Kraftlinien kann man bei magnetischen Massen leicht und schön sichtbar machen, wenn man über den Magnet ein steifes Blatt Papier legt und Eisenfeilspäne gleichmäßig darüberstreut. Erschüttert man leise das Papier, so ordnen sich die Eisenfeilspäne in der Richtung der Kraftlinien.[1]) Natürlich werden auf diese Weise

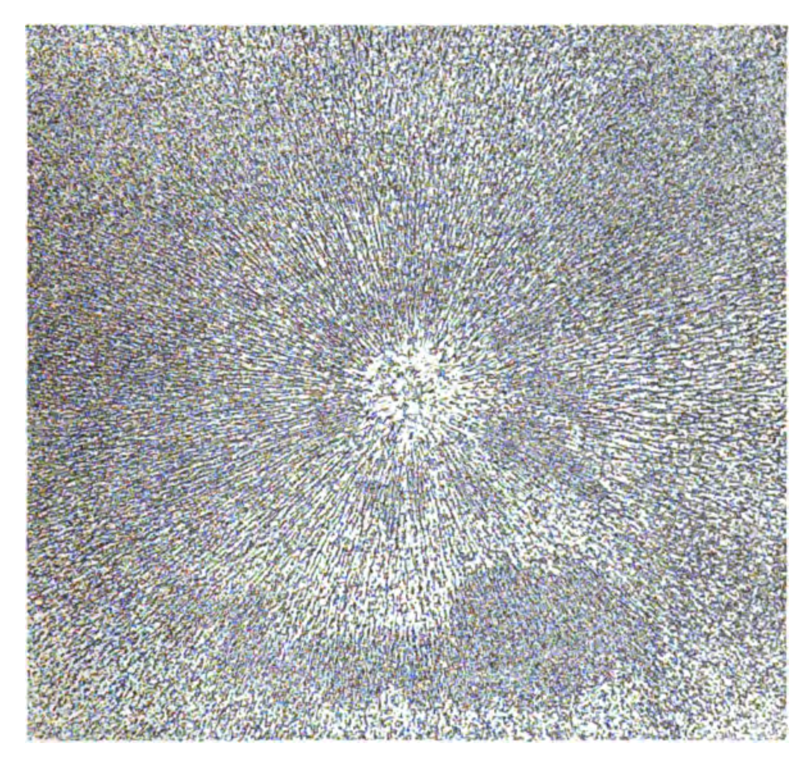


Abb. 2. Magnetisches Feld eines Poles.

nur diejenigen Kraftlinien sichtbar, welche in die Ebene des Papiers fallen. Abb. 2 zeigt das auf solche Weise dargestellte Kraftfeld eines einzelnen magnetischen Poles. Ein Stabmagnet stand dabei senkrecht unter der Papierfläche.

---

[1]) Die Fixierung der Eisenfeilspäne auf dem Papier geschieht am besten dadurch, daß man mit einem Zerstäuber eine Lösung von Schellack in Alkohol darauf bläst. In unmittelbarer Nähe der Pole finden sich blanke Stellen; dort ist die Kraft so stark, daß die Eisenfeilspäne von dem Pol an sich gerissen werden.

Ist dieser Pol ein positiver, so gehen, nach der früheren Richtungsbestimmung, die positiven Kraftlinien von ihm aus; ist er ein negativer, so laufen sie in ihm zusammen.

Die elektrischen Kraftlinien lassen sich in so einfacher Weise nicht sichtbar machen. Klebt man jedoch dünne, leicht bewegliche Papierstreifen auf eine leitende Kugel und ladet diese mit einer hinreichenden Elektrizitätsmenge, so stellen sich dieselben strahlenförmig zum Konduktor und geben ein Bild des räumlichen elektrischen Feldes.

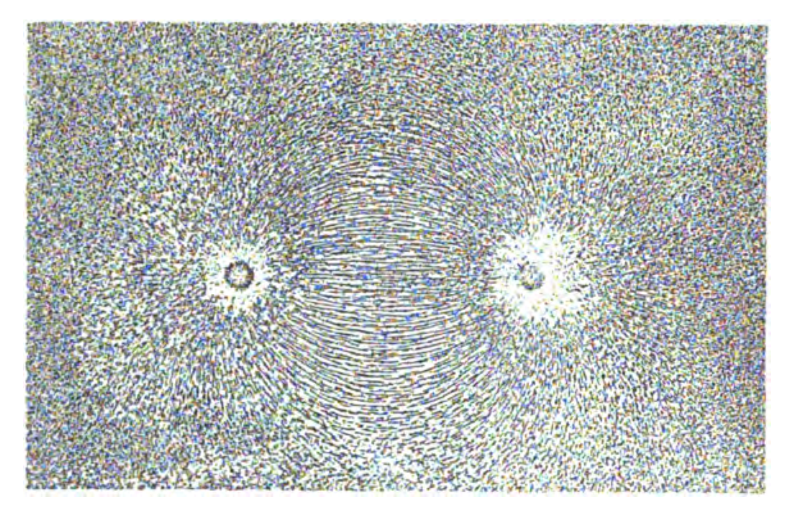


Abb. 3. Magnetisches Feld zweier ungleichnamigen Pole.

Abb. 3 zeigt das Kraftfeld zweier ungleichnamigen, gleich großen Massen, wie man es erhält, wenn man ein mit Eisenfeilspänen bestreutes Papier über zwei aufrechtstehende, gleich starke Stabmagnete bringt. Man sieht, daß ein Teil der Kraftlinien von dem einen — nach der früheren Bestimmung dem positiven Pole — ausgehen und auf dem negativen enden, während die übrigen im Unendlichen verlaufen. Eine positive Probemasse würde sich von einem positiven Pole weg zum negativen hin oder in das Unendliche fortbewegen.

Abb. 4 zeigt dasselbe Feld, aber von zwei ungleichnamigen elektrischen Massen herrührend.[1])

[1]) Dieses und die in Abb. 46 abgebildeten elektrischen Felder wurden von Seddig (Physik. Zeitschr. 5, 1904, S. 403) dadurch erhalten, daß Glyzin-Pulver in reinstes Terpentinöl geschüttet und diese Suspension in eine flache Schale gegossen wurde, in welche 2 kleine Kugeln tauchten, die mit einer Elektrisiermaschine verbunden sind.

Abb. 5 zeigt das Kraftfeld zweier gleichnamigen, gleich großen Pole. Die Kraftlinien enden alle im Unendlichen, wenn sie nicht vorher auf eine andere ungleichnamige Masse stoßen. Sind die beiden Pole z. B. negativ, so wird sich eine positive Probemasse aus dem Unendlichen her zu einem der beiden Pole, aber niemals von einem zum andern bewegen. In der Mitte gibt es eine Stelle, wo sich die von beiden Polen herrührenden Kräfte das Gleichgewicht halten. Eine Probemasse, die an diese Stelle gebracht wird, bleibt in Ruhe. Über diese Stelle gehen keine Kraftlinien, daher liegen die Eisenfeilspäne dort ungeordnet. Würde die Probemasse nur ein wenig seitlich verschoben, so würde



Abb. 4. Elektrisches Feld zweier ungleichnamigen Massen.

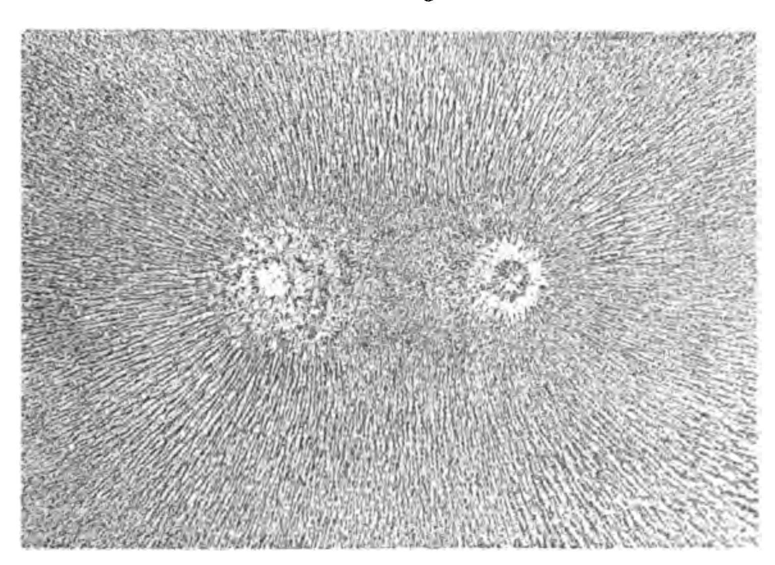


Abb. 5. Magnetisches Feld zweier gleichnamigen Pole.

sie sich, wenn sie ungleichnamig ist, bis zu einem der Pole oder, wenn sie gleichnamig ist, bis ins Unendliche weiter bewegen. Ganz gleich ist die Gestalt eines elektrischen Feldes bei derselben Anordnung zweier elektrischen Massen.

Wie äußert sich Anziehuug oder Abstoßung zweier Pole in den Kraftlinien? Den Kraftlinien kommt die Eigenschaft zu, daß sich jede einzelne wie ein elastischer Faden zu verkürzen strebt, während sie sich untereinander gegenseitig abstoßen. So erkennt man aus Abb. 3 und 4, daß sich die Pole anziehen, also ungleichnamig sind, und aus Abb. 5, daß sie sich abstoßen, also gleichnamig sind. Aber man erkennt nicht, welches positive und welches negative Pole sind. Um dies zu erfahren, muß man bei magnetischen Feldern eine kleine, frei bewegliche Magnetnadel in die Nähe bringen. Diese stellt sich in die Richtung der Kraftlinien ein und zeigt mit dem positiven Ende nach dem negativen Pole, mit dem negativen Ende nach dem positiven Pole. Bei elektrischen Feldern muß man eine leichte, z. B. mit positiver Elektrizität geladene Kugel (Holundermark an einem Seidenfaden hängend) in das Feld hereinbringen.

Da magnetische Kräfte immer nur zwischen zwei magnetischen Massen, elektrische Kräfte immer nur zwischen zwei elektrischen Massen auftreten können, so können auch die Repräsentanten dieser Kräfte, die Kraftlinien, immer nur zwischen zwei magnetischen, beziehungsweise elektrischen Massen verlaufen. Die Abb. 3 und 4 zeigen dies unmittelbar. Die Abb. 2 und 5 widersprechen dem nicht. Nur liegen die Enden der Kraftlinien bei diesen beiden Bildern nicht mehr in der Papierfläche. Auch sind die Kräfte in größerer Entfernung schon zu schwach, um noch die Eisenfeilspäne richten zu können. Die magnetischen Kraftlinien verlaufen zwischen den entgegengesetzten Polen desselben Magnetes (Abb. 6—8), wenn nicht andere magnetische Körper in der Nähe sind; und zwar verlaufen sie nicht nur durch die Luft, sondern, wie wir später sehen werden, auf dem Rückweg auch durch den Magnet von einem Pol zum anderen. Die elektrischen Kraftlinien verlaufen zwischen ungleichnamigen Massen, die auf anderen, in kleinerer oder größerer Entfernung befindlichen Leitern oder in der Erde influenziert werden.

6. Zu- und Abnahme der Kraft. Homogene Felder.

Aus den drei einfachsten Fällen von Kraftfeldern (Abb. 2—5) lassen sich einige Sätze ableiten, die für die Beurteilung anderer Fälle wertvoll sind. Man sieht, daß die Kraftlinien, je weiter man sich von

den Polen entfernt, d. h. in der Richtung der abnehmenden Kraft, auseinanderlaufen, und umgekehrt. Wir gewinnen daraus den Satz, daß in der Richtung der divergierenden Kraftlinien eine Abnahme und in der Richtung der konvergierenden Kraftlinien eine Zunahme der Kraft stattfindet. Was folgt daraus für eine Fläche, auf der die Kraftlinien parallel verlaufen? Nichts anderes, als daß die Kraft an allen Punkten dieselbe, also in der

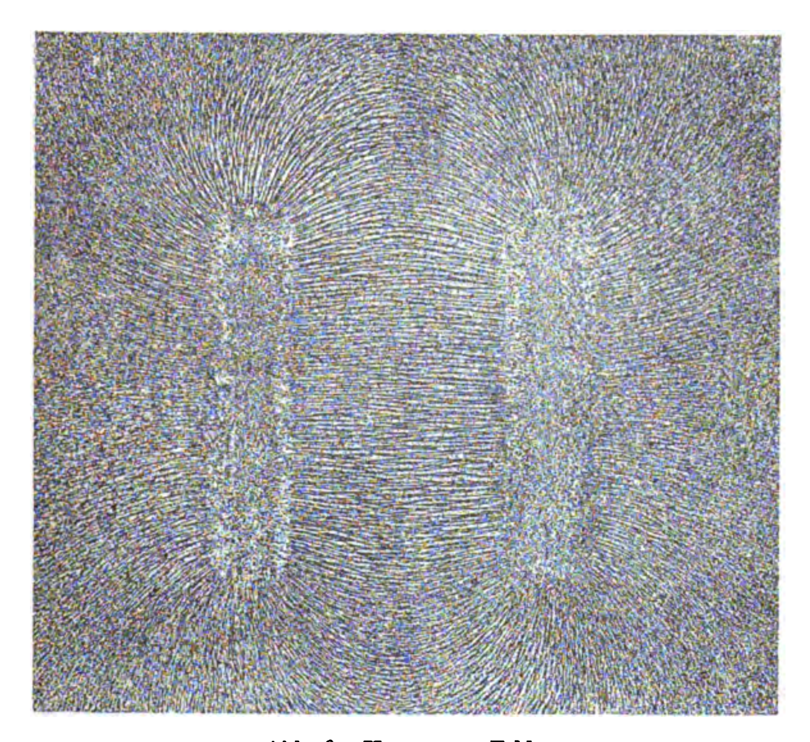


Abb. 6. Homogenes Feld.

ganzen Fläche konstant ist. Man nennt solche Felder homogene Kraftfelder. Abb. 6 zeigt ein solches, wie es zwischen zwei ungleichnamigen, in die Länge gezogenen (linearen) Polen entsteht. Zwischen zwei Polen, die aus parallelen Flächen bestehen, ist der ganze Raum bis in die Nähe des Randes ein homogenes Feld. Homogene Felder von geringer Ausdehnung finden sich endlich in größerer Entfernung von jeder magnetischen oder elektrischen Anordnung. Denn es gibt immer Stellen, wo die Kraftlinien innerhalb eines gewissen Raumes mit großer Annäherung als parallel betrachtet werden können. So ist auch das magnetische Feld der Erde für

den Raum eines Laboratoriums ein homogenes, da die Ausdehnung eines solchen verschwindend klein ist gegenüber der Entfernung von den magnetischen Polen der Erde.

Da im Felde selbst keine neuen Kraftlinien entstehen, so ist ihre Dichte ein relatives Maß für die Stärke des Feldes an der betreffenden Stelle im Vergleiche zu einer anderen. Nach diesem Grundsatze kann man aus dem Bilde, das die Eisenfeilspäne von einem magnetischen Felde geben, sehr leicht und schneller eine übersichtliche Beurteilung der gesamten Kraftverteilung einer magnetischen Anordnung gewinnen, als durch Berechnung.

7. Anzahl der Kraftlinien.

Wie schon in § 4 bemerkt wurde, können wir uns unendlich viele Kraftlinien bei jeder Anordnung denken. Bei der sichtbaren Darstellung derselben ist ihre Zahl allerdings durch die vorhandenen Eisenteilchen beschränkt, und darum kann uns auch ihre Dichte nur ein relatives Maß sein für die Stärke des Feldes an verschiedenen Stellen.

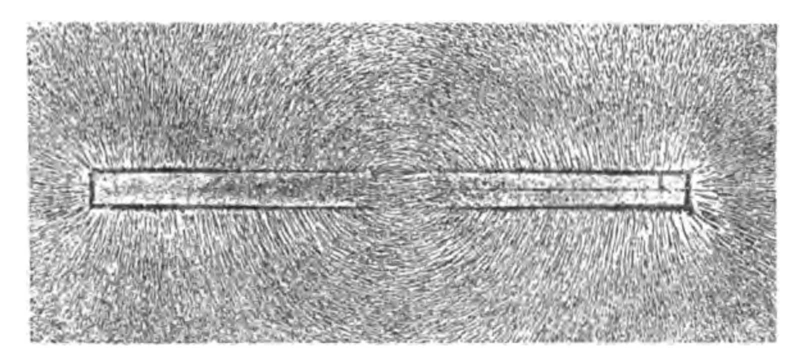


Abb. 7. Kraftfeld eines Stabmagnetes.

Es hat sich aber als zweckmäßig erwiesen, für die räumliche Dichte der Kraftlinien eine Bestimmung zu treffen und eine Einheit festzustellen. Diese Bestimmung lautet: Die Flächeneinheit einer Kugelschale vom Radius Eins, in deren Mittelpunkt sich die Masse Eins befindet, wird von **einer** Kraftlinie getroffen. Da die Kraftlinien einer punktförmigen Masse gleichmäßig im Raume verteilt sind, und die Oberfläche dieser Kugel 4π ist, so wird sie von 4π Kraftlinien getroffen. Da wir bloß die Masse Eins voraussetzen und in einem von anderen magnetischen oder elektrischen Massen freien Raume keine Kraftlinien entstehen

und keine verschwinden können, so ist die Gesamtzahl der von einem Einheitspole ausgehenden Kraftlinien 4π. Befindet sich im Mittelpunkte dieser Kugelschale die Masse m, so treffen m Kraftlinien die Flächeneinheit, und die Gesamtzahl aller Kraftlinien oder die Kraftlinienmenge ist $4\pi m$. Da die Fläche der Kugelschale

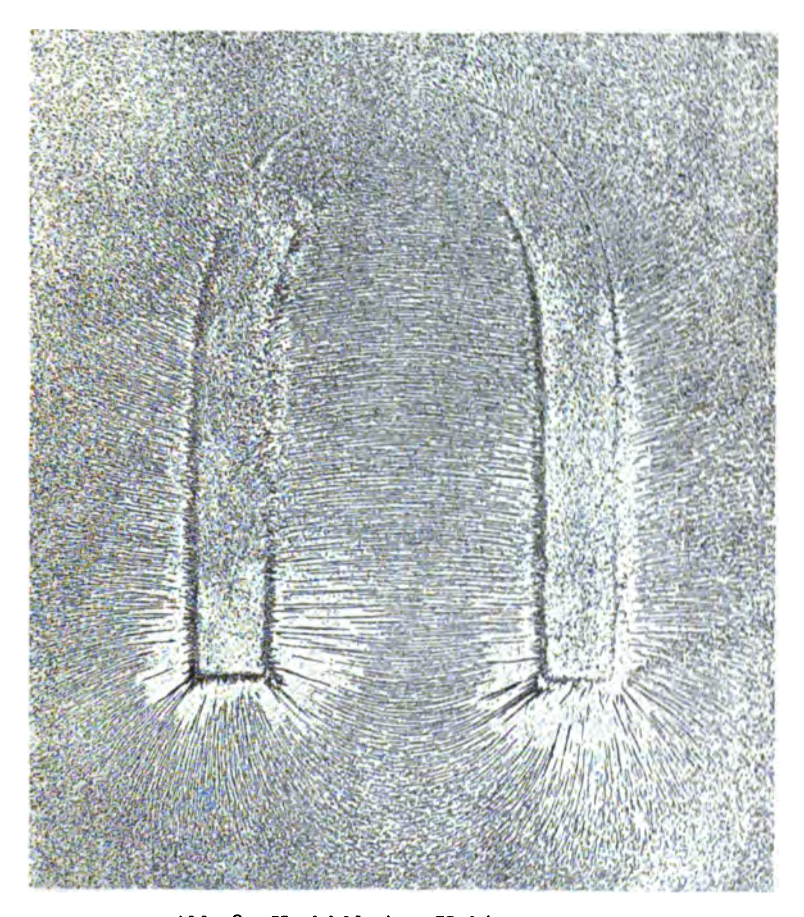


Abb. 8. Kraftfeld eines Hufeisenmagnetes.

$4\pi r^2$ ist, so wird die Flächeneinheit derselben von $\frac{4\pi m}{4\pi r^2} = \frac{m}{r^2}$ Kraftlinien getroffen. Da nach § 4 die Feldstärke in der Entfernung r von dieser Masse $\frac{m}{r^2}$ ist, so ist die Feldstärke $\mathfrak{H}$ an einer bestimmten Stelle nichts anderes, als die Anzahl der Kraftlinien, welche die **Flächeneinheit** einer die Kraftlinien an

dieser Stelle senkrecht schneidenden Fläche treffen. Man bezeichnet diese Anzahl als *Kraftliniendichte*. Die *Feldstärke ist also gleich der Kraftliniendichte*. Das gilt aber, wie wir später (§ 28) sehen werden, nicht mehr, wenn sich die wirkenden Massen in einem anderen Medium als Luft befinden.

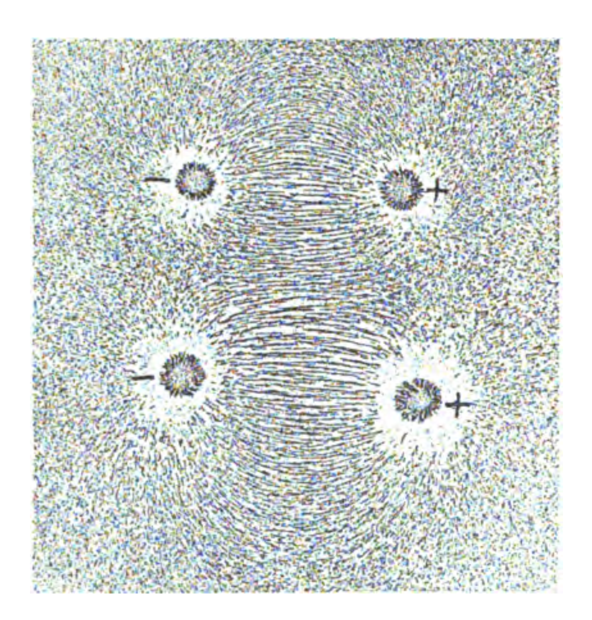


Abb. 9. Zusammengesetztes Feld von vier Polen.

Weiter folgt daraus, daß die Anzahl der Kraftlinien, die von einem Magnetpol mit der Polstärke m ausgehen, auch $4\pi m$ ist. Denn alle Kraftlinien eines Magnetes gehen von dem positiven Pole aus und treten beim negativen in den Magnet ein. Im Magnet selbst aber gehen sie vom negativen zum positiven Pole, wenn wir sie als geschlossene Kurven betrachten. Daher gehen durch einen Querschnitt des Magnetes sämtliche $4\pi m$ Kraftlinien. In Wirklichkeit ist aber nicht die ganze magnetische Masse in den Polen konzentriert, sondern teilweise auch auf die Seiten verteilt. Daher gehen auch nicht alle Kraftlinien von den Enden aus, wie uns die Betrachtung der Kraftfelder eines Stabmagnetes und eines Hufeisenmagnetes (Abb. 7 und 8) lehrt. Wir müssen dann sagen, daß von der einen *Hälfte* $4\pi m$ Kraftlinien ausgehen zur anderen *Hälfte* hin. Dann gehen aber auch alle $4\pi m$ Kraftlinien nur durch den *mittleren* Querschnitt des Magnetes.

8. Zusammensetzung von Kraftfeldern.

Zwei oder mehrere Pole geben zusammen ein resultierendes Feld. Solche haben wir schon in den Abb. 3 bis 8 kennen gelernt. Die Zusammensetzung geht an jeder Stelle des Feldes nach denselben Gesetzen vor sich, wie die Zusammensetzung zweier Kräfte nach dem Kräfteparallelogramm. Abb. 9 zeigt das resultierende Feld von 4 Polen, von denen je zwei gegenüberliegende ungleichnamig sind. Man kann sich daher dieses Feld auch entstanden denken durch kreuzweise Übereinanderlagerung zweier in Abb. 3 dargestellten Felder, wie man aus Abb. 10 erkennt. Solche zusammengesetzte Felder kommen z. B. bei Drehstrommotoren vor.

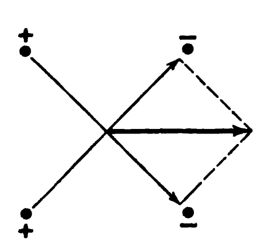


Abb. 10. Zusammensetzung zweier sich kreuzenden Kraftlinien zu einer resultierenden.

9. Magnetisches Moment.

Wir haben bisher nur die Wirkung magnetischer Massen als einzelner Pole betrachtet. Da aber jeder Magnet zwei Pole besitzt, so ist für die Fernwirkung die Gesamtwirkung beider Pole maßgebend. Dann kommt aber nicht nur die Stärke jedes Poles, sondern auch ihr Abstand in Betracht. Befindet sich z. B. ein Magnet von der Polstärke m und dem Polabstande l in einem homogenen Felde von der Stärke $\mathfrak{H}$, dessen Richtung durch die Pfeile (Abb. 11) bestimmt ist, so wirkt nach § 4 auf den einen Pol die Kraft $+m\mathfrak{H}$, auf den andern $-m\mathfrak{H}$. Jede sucht den Magnet in der Richtung des Feldes zu drehen mit einem Drehmomente $\frac{l}{2}m\mathfrak{H}$. Da beide den Magnet in demselben Sinne drehen, so ist das gesamte Drehmoment das doppelte, also gleich $lm\mathfrak{H}$. Es kommt also für die Kraft, mit der das homogene Feld $\mathfrak{H}$ den Magnet zu drehen sucht, das Produkt aus der Polstärke und dem Polabstande in Betracht, und man nennt es das magnetische Moment $\mathfrak{M}$ des Magnetes. Es ist also

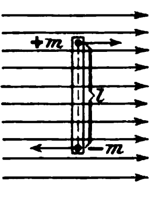


Abb. 11.

$$\mathfrak{M} = ml \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dann ist das Drehmoment des Magnetes gleich $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Bildet der Magnet mit der Richtung der Kraftlinien einen Winkel α, so ist der senkrechte Abstand des Drehpunktes von der Kraft nicht $\frac{l}{2}$,

sondern $\frac{l}{2}\sin\alpha$; daher auch das Drehmoment $\mathfrak{M}\mathfrak{H}\sin\alpha$. Für $\alpha = 0$ ist das Drehmoment null, d. h. die magnetische Achse stellt sich in die Richtung der Kraftlinien ein.

Nun ist in Wirklichkeit niemals die ganze magnetische Masse m in einem Punkte konzentriert, sondern, wie die Abb. 7 und 8 zeigen, auch auf die Seitenflächen verteilt. Es gibt aber — ebenso wie bei schweren Körpern einen Schwerpunkt — auch hier einen Punkt, in dem die ganze magnetische Kraft angreift, und diesen bezeichnet man als den Pol. Es ist dann bei einem Stabmagnete der Polabstand nicht gleich der Länge des Magnetstabes, sondern etwa $^5/_6$ desselben. Die genaue Kenntnis der Lage der Pole und des Polabstandes hat übrigens gar kein praktisches Interesse, da für alle Wirkungen des Magnetes das magnetische Moment $\mathfrak{M}$ in Betracht kommt und auch nur dieses der experimentellen Bestimmung zugänglich ist.

Die Erklärung dafür, daß für das Drehmoment eines Magnetes nicht allein seine Polstärke m, sondern auch der Abstand der Pole maßgebend ist, ergibt sich aus folgender Überlegung. Würden die beiden Pole zusammenfallen, so ist klar, daß sie keinerlei Wirkung nach außen ausüben könnten, weil sie sich gegenseitig aufheben. Rücken sie auseinander, so müssen sie sich teilweise aufheben, aber um so weniger, je weiter sie voneinander entfernt sind.

10. Das magnetische Feld der Erde.

Die Erde kann als ein Stabmagnet, jedoch von sehr ungleichmäßiger Magnetisierung, betrachtet werden. Da die Lage der Pole nur beiläufig bekannt ist, so kann man zur Bestimmung des Einflusses der Erde auf einen Magnet das Coulombsche Gesetz nicht anwenden, sondern man bestimmt für jeden Ort der Erde die Stärke $\mathfrak{H}$ ihres magnetischen Feldes. Dann gelten für die Wirkungen der Erde auf einen Magnet die Gesetze der §§ 4 und 9. Die Erde hat natürlich wie jeder andere Magnet ihre Kraftlinien (Abb. 12), die uns an jeder Stelle die Richtung des Feldes angeben. Ihre Neigung zur horizontalen Ebene eines Ortes ist nichts anderes als der Inklinationswinkel, wie er von einer frei beweglichen Nadel angezeigt wird. Der Deklinationswinkel eines Ortes ist der Winkel zwischen der Richtung der

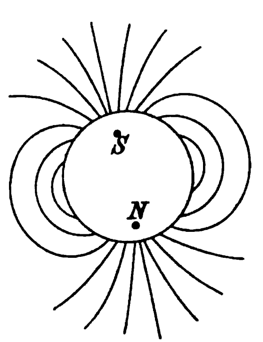


Abb. 12. Magnetisches Feld der Erde.

Kraftlinien und dem geographischen Meridian dieses Ortes. Er wäre Null, wenn der magnetische und geographische Pol zusammenfielen. Da der magnetische Nordpol[1]) im Norden von Amerika liegt, so haben wir in Europa eine westliche Deklination.

In den meisten Fällen haben wir es mit Magnetnadeln zu tun, die nur in einer horizontalen Ebene beweglich sind. Auf solche kann natürlich nur die in die horizontale Ebene fallende Komponente des Erdmagnetismus einwirken. Nach dem Vorigen ist der Inklinationswinkel i der Winkel zwischen der horizontalen Ebene des betreffenden Ortes und der Richtung der erdmagnetischen Kraft. Um also die horizontale Komponente des magnetischen Feldes der Erde zu finden, haben wir die Zerlegung nach einem Kräfteparallelogramm vorzunehmen, das den Winkel i enthält (Abb. 13). Dann ist die horizontale Komponente $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \cos i$ und die vertikale Komponente $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \sin i$.

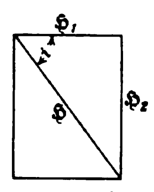


Abb. 13.

Die folgende Tabelle enthält die Größe der horizontalen Komponente für einige Orte oder die Anzahl der Kraftlinien, die nach den Bestimmungen des § 7 die Flächeneinheit einer zur horizontalen Ebene senkrechten Fläche treffen:

Berlin	0,187	Kiel	0,178	Petersburg	0,165
Darmstadt	0,195	London	0,183	Rom	0,235
Graz	0,212	München	0,205	Wien	0,207
Hamburg	0,181	Paris	0,197	Zürich	0,206

Diese Werte bleiben aber nicht konstant, sondern ändern sich im Laufe der Zeit.

Beispiel: Um in Wien eine um eine lotrechte Achse drehbare Magnetnadel von 24 cm Länge senkrecht zum magnetischen Meridian zu stellen und in dieser Stellung festzuhalten, so daß sie senkrecht zu den Kraftlinien steht wie in Abb. 11, ist eine Kraft von 0,1 Grammgewicht erforderlich. Wie groß ist das magnetische Moment und die Polstärke der Magnetnadel (in absol. Einheiten)? Da ein Grammgewicht gleich 980 absol. Krafteinheiten (Dyn, Kap. 18) ist, ist das Drehmoment gleich $12 \cdot 2 \cdot 98 = 2352$ absol. Einh. Dieses ist nach § 9 gleich dem Drehmoment, das von der Horizontalkomponente des Erdmagnetismus herrührt, nämlich $\mathfrak{M}\mathfrak{H}_1$. Da $\mathfrak{H}_1$ für Wien nach obiger Tabelle 0,207 ist, so ist $\mathfrak{M} = \frac{2352}{0{,}207} = 11362$. Nimmt man an, daß der Abstand der Pole der Nadel $^5/_6$ ihrer Länge, also 20 cm ist, so ist die Polstärke $m = \frac{11362}{20} = 568$ absol. Einh. Nach § 7 ist die Anzahl der von einem Pol ausgehenden Kraftlinien $4\pi m$, also hier $4 \cdot 3{,}14\ 568 = 7134$.

---

[1]) Der magnetische Nordpol besitzt negativen Magnetismus, da sich ihm das positive Ende einer Magnetnadel zuwendet.

11. Feldstärke neben und zwischen Flächen, die gleichmäßig mit magnetischer oder elektrischer Masse bedeckt sind.

Im folgenden soll die Feldstärke einer gleichmäßig mit magnetischer oder elektrischer Masse belegten Fläche in einem seitwärts gelegenen Punkte und die Feldstärke eines homogenen Feldes zwischen zwei parallelen Flächen bestimmt werden.

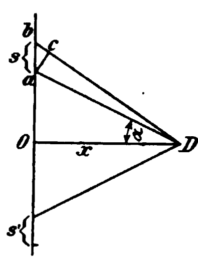


Abb. 14.

Die Linie Ob (Abb. 14) sei ein Schnitt durch eine ebene Fläche, die gleichmäßig mit Masse belegt ist. Ist σ die Masse auf einer Flächeneinheit, so nennt man σ die Flächendichte. Wir wollen die Stärke des Feldes im Punkte D bestimmen, der sich im Abstande x von der Mitte O der Fläche befindet, und in dem wir uns die Masse Eins denken. Greifen wir ein kleines Stück s, dargestellt durch ab, aus der Fläche heraus, so befindet sich auf dieser die Masse σs. Ist diese Fläche sehr klein, so können wir die Masse darauf als punktförmig betrachten, und die Kraft, die von ihr auf den Punkt D ausgeübt wird, ist $\frac{\sigma s}{r^2}$. Die zur Ebene senkrechte Komponente derselben ist $\frac{\sigma s}{r^2} \cos \alpha$. Vom Punkte D aus gesehen, erscheint die Fläche s als die Projektion ac auf die von D aus beschriebene Kugelfläche. Die Größe dieser Projektion ist $s \cos \alpha$. Dann ist aber $\frac{s \cos \alpha}{r^2}$ die Projektion der Fläche s auf eine Kugelschale vom Radius Eins; das ist nichts anderes als der Gesichtswinkel, unter dem die Fläche s von D aus gesehen erscheint. Bezeichnen wir diesen mit ω, so ist die zur Fläche senkrechte Komponente der Kraft $\sigma \omega$. Die Kraft, die von der ganzen Fläche auf den Punkt D ausgeübt wird, erhalten wir, wenn wir die Wirkung aller dieser Flächenstücke summieren. Da vorausgesetzt wurde, daß die Senkrechte vom Punkt D in den Mittelpunkt der Fläche fällt, so entspricht jedem Flächenstück s ein ebensolches bei s'. Daher gibt es unter den in die Fläche fallenden Komponenten immer je zwei von entgegengesetzter Richtung, die sich gegenseitig aufheben. Es bleiben also für die Summierung nur die senkrechten Komponenten. Da diese aber nur von der Flächendichte und dem Gesichtswinkel abhängen, so ist die ganze von der Fläche auf den Punkt D wirkende Kraft gleich dem Produkte aus der Flächendichte und dem Gesichtswinkel, unter dem die Fläche von D aus erscheint.

Ist diese Fläche unendlich groß, so ist ihr Gesichtswinkel von jedem in endlicher Entfernung befindlichen Punkte aus eine halbe Kugelfläche vom Radius Eins, also gleich 2π. Die Kraft auf den Punkt D mit der Masse Eins oder die Feldstärke der Fläche im Punkte D ist also $2\pi\sigma$. Dasselbe gilt von einer endlichen Fläche, wenn die Entfernung des Punktes von der Fläche so klein ist, daß sie gegenüber dem Durchmesser der Fläche vernachlässigt werden kann. Denn dann ist der Gesichtswinkel auch 2π und daher auch die Feldstärke der Fläche in diesem Punkte $\mathfrak{H} = 2\pi\sigma$.

Befindet sich in D eine Masse m, so ist die zwischen ihr und der Fläche wirkende Kraft $F = \mathfrak{H} m = 2\pi\sigma m$. Haben σ und m gleiche Zeichen, so wirkt die Kraft von der Fläche weg, also abstoßend, und umgekehrt, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben.

Haben wir nun zwei parallele Flächen (Abb. 15) mit gleich großen, gleichnamigen Flächendichten σ, so heben sich die Kräfte in allen zwischen ihnen liegenden Punkten D auf, wenn der Abstand der Flächen sehr klein ist gegenüber ihrer Größe; die Feldstärke zwischen den Platten ist also Null. Haben die beiden Flächen gleiche Größe, aber ungleichnamige Flächendichten, so wirkt die eine abstoßend, die andere anziehend. Die Kräfte summieren sich also, und die Feldstärke zwischen den Platten ist

Abb. 15.

$$\mathfrak{H} = 4\pi\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wir haben demnach ein homogenes Feld bis in die Nähe der Ränder. Hat der Punkt die Masse m, so ist die auf ihn wirkende Kraft: $F = 4\pi\sigma m$.

12. Das Potential; seine mathematische und physikalische Bedeutung.

Für sehr viele magnetische und elektrische Probleme ist es von Vorteil, statt der Kraftfunktion $F = \frac{m}{r^2}$, welche die von einer Masse m auf eine in der Entfernung r befindliche Masse Eins ausgeübte Kraft darstellt, die Potentialfunktion $U = \frac{m}{r}$ einzuführen. Zwischen beiden besteht eine einfache mathematische Beziehung.

Differenziert man nämlich die Potentialfunktion nach r, so erhält man

$$\frac{dU}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{m}{r}\right) = -\frac{m}{r^2} = -F$$

oder
$$F = -\frac{dU}{dr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Man findet also die von einer Masse m aus in irgend einer Richtung auf die Masseneinheit wirkende Kraft, wenn man das Potential nach dieser Richtung differenziert und negativ nimmt. Hat man statt der Masse 1 eine Masse m', so hat man noch mit m' zu multiplizieren.

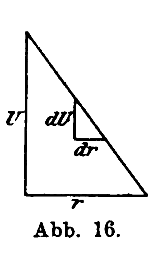


Abb. 16.

Aus Abb. 16, wo die unendlich kleinen Größen dU und dr als Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes dargestellt sind, ersieht man ohne weiteres, daß das Verhältnis $\frac{dU}{dr}$ nichts anderes ist als das Gefälle des Potentiales. Das heißt, die in irgend einem Punkte herrschende Kraft ist gleich dem negativen Potentialgefälle an dieser Stelle in der Richtung der Kraft.

Das Potential $\frac{m}{r}$ hat aber auch eine wichtige physikalische Bedeutung, es stellt nämlich eine Arbeit vor. Nach den Gesetzen der Mechanik ist die Arbeit, die eine konstante Kraft F längs eines mit der Richtung der Kraft zusammenfallenden Weges l leistet, ausgedrückt durch $A = Fl$. Um die Arbeit bei der Bewegung einer Masse 1 unter dem Einflusse einer Masse m zu bestimmen, hat man zu bedenken, daß die zwischen beiden wirkende Kraft F nicht konstant ist, sondern mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt. Man darf daher diese Definition der Arbeit nur auf ein unendlich kleines Wegstückchen dr, für welches die Kraft als konstant angenommen werden kann, anwenden (Abb. 17). Die auf diesem Wegstöckchen geleistete Arbeit ist dann

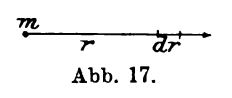


Abb. 17.

$$dA = F\,dr = \frac{m}{r^2}\,dr.$$

Will man die Arbeit bestimmen, welche durch diese Kraft geleistet wird bei der Bewegung der Masse 1 von r bis in unendliche Entfernung, so hat man das Differential der Arbeit von r bis ∞ zu integrieren.

Also
$$A = \int_r^\infty dA = \int_r^\infty \frac{m}{r^2}\,dr = -\left[\frac{m}{r}\right]_r^\infty = -\left(\frac{m}{\infty} - \frac{m}{r}\right)$$
$$= \frac{m}{r} = U.$$

Das Potential der Masse m, bezogen auf einen Punkt in der Entfernung r, ist also gleich der Arbeit, welche die von der Masse m ausgehende Kraft leistet, wenn sich eine gleichartige Masse 1 aus der Entfernung r bis ins Unendliche bewegt, oder jene Arbeit, welche von äußeren Kräften aufgewendet werden muß, um eine gleichartige Masse 1 aus dem Unendlichen bis zum Abstand r von der Masse m heranzubringen. Dabei ist es gleichgültig, welchen Weg die Masse 1 einschlägt, ob den kürzesten oder mit Umwegen; es kommt nur auf den Anfangs- und Endpunkt an, wie man aus der Integration ersieht. Das Potential hat also ebenso wie die Arbeit keine Richtung, während zum Begriffe der Kraft notwendig auch die Richtung derselben gehört. Das ist der Hauptvorteil des Potentialausdruckes vor dem Kraftausdruck.

Hat man statt der Masse 1 eine Masse m', so ist der Arbeitswert (potentielle Energie) zwischen den Massen m und m'

$$A = \frac{m m'}{r} = m' U \qquad \ldots \ldots \quad (8)$$

Oder wenn wir von der Masse m' und ihrem Potential

$$U' = \frac{m'}{r}$$

ausgehen, so ist der Arbeitswert $A = m U'$.

Da wir bisher die Kraft und das Potential als positiv angenommen haben, so haben wir es nach § 2 mit abstoßenden Kräften, also mit gleichnamigen Massen zu tun. Die Bewegung einer frei beweglichen Masse 1 bis ins Unendliche erfolgt also von selbst, und die Arbeit U ist von der Kraft geleistet worden und erscheint daher positiv. Wären die Massen ungleichnamig, so wäre auch F und U und A negativ; wir hätten dann eine anziehende Kraft, und die Bewegung ins Unendliche hätte gegen die Kraft F von einer anderen äußeren Kraft geleistet, also Arbeit aufgewendet werden müssen.

Das Entfernen einer magnetischen oder elektrischen Masse bis ins Unendliche ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden oder der Vernichtung derselben. Ihr Heranbringen aus unendlicher Entfernung ist gleichbedeutend mit der Erzeugung derselben durch Induktion oder Influenz.

13. Potential mehrerer Massen.

Um das Potential mehrerer verschieden gelegener Massen auf eine Masse 1 zu finden, können wir die Potentiale der einzelnen Massen ohne weiteres addieren, da nach dem Vorigen das Potential keine Richtung besitzt. Es ist also

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots .$$

Um die gesamte Kraft aller dieser Massen auf die Masse 1 in irgend einer Richtung zu erhalten, hat man U nach dieser Richtung zu differenzieren und negativ zu nehmen. Die Kräfte dürfte man nicht ohne weiteres addieren, sondern nur die in die betreffende Richtung fallenden Komponenten. Man ersieht daraus den Vorteil des Potentiales.

14. Bewegungsrichtung und Potential.

Der Potential- oder Arbeitswert zweier gleichnamigen Massen ist $\frac{m m'}{r}$. Sind sie beweglich, so stoßen sie sich ab; dabei wird r immer größer und der Potentialwert kleiner. Sind die Massen ungleichnamig, so ist der Potentialwert $-\frac{m m'}{r}$. Sind sie beweglich, so ziehen sie sich an; dabei wird r und damit auch der Potentialwert immer kleiner, da er jetzt negativ ist. Die Bewegung geht also wie bei jeder potentiellen Energie immer so vor sich, daß der Potentialwert kleiner wird. Jede Masse bewegt sich so, daß sie von Punkten höheren Potentiales zu Punkten kleineren Potentiales gelangt. Dabei wird von den Kräften selbst Arbeit geleistet. Eine umgekehrte Bewegung kann nur mit Hilfe anderer Kräfte und Arbeitsaufwand durchgeführt werden. Zwischen zwei Punkten gleichen Potentiales findet von selbst keine Bewegung statt. Erfolgt sie dennoch infolge anderer Umstände, so wird dabei weder Arbeit geleistet noch aufgewendet. Daß zwischen zwei Punkten gleichen Potentiales von selbst keine Bewegung elektrischer oder magnetischer Massen eintreten kann, folgt mathematisch auch aus der Gleichung (7), denn zwischen zwei Punkten, deren Potential U denselben Wert hat, ist die Änderung $dU = 0$, also auch $\mathfrak{H}$ und $F = 0$. Und wenn die Kraft Null ist, kann keine Bewegung eintreten.

15. Die Niveauflächen und ihre Beziehung zu den Kraftlinien.

Flächen, deren Punkte denselben Potentialwert haben, bezeichnet man als Flächen gleichen Potentiales oder Niveauflächen. Da das Potential einer punktförmigen Masse m gleich $\frac{m}{r}$ ist, so müssen ihre Niveauflächen konzentrische Kugelflächen sein, deren Mittelpunkt die Masse m bildet. Ist beispielsweise $m = 5$ Einheiten, so hat die Kugelfläche vom Radius 1 den Potentialwert 5, die Niveaufläche vom Radius $\frac{5}{4}$ den Wert 4, die Niveaufläche vom Radius $\frac{5}{3}$ den Wert 3 usw., die Niveaufläche vom Radius 5 den Wert 1 (Abb. 18). Die Abstände zwischen den einzelnen Niveauflächen, deren Werte sich um denselben Betrag unterscheiden, werden also immer größer, je weiter man sich von der Masse entfernt. Selbstverständlich kann man sich zwischen je zweien der in Abb. 18 angedeuteten Niveauflächen noch unendlich viele denken.

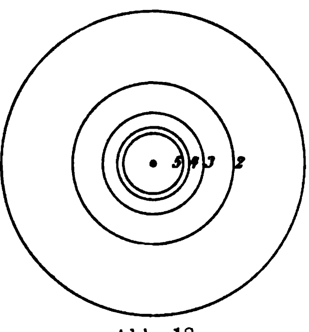


Abb. 18.

Die Kraftlinien, die von einer punktförmigen Masse m ausgehen, müssen radial verlaufen (wie auch Abb. 2 zeigt), da sich eine Probemasse in der Richtung der geraden Verbindungslinie beider bewegen muß. Die Kraftlinien stehen also senkrecht zu den Niveauflächen. Das gilt aber nicht nur für diesen besonderen Fall, sondern ganz allgemein. Denn wie auch ein Kraftfeld beschaffen sein mag, eine in dasselbe hineingebrachte frei bewegliche Probemasse wird sich immer auf dem kürzesten Wege von einer Niveaufläche zur unmittelbar benachbarten bewegen. Dieser kürzeste Weg ist die Senkrechte zwischen zwei unendlich nahen Niveauflächen.

Da die Feldstärke nach § 4 bestimmt ist durch die Kraft, welche auf eine Masse 1 ausgeübt wird, und diese Kraft, wie wir eben gesehen haben, senkrecht zu den Niveauflächen wirkt, so ist die Feldstärke $\mathfrak{H}$ nach Gl. 7

$$\mathfrak{H} = -\frac{dU}{dr_{senkr}} \quad \text{. . . . . (9),}$$

wenn mit r_{senkr} die an der betreffenden Stelle zur Niveaufläche senkrechte Richtung bezeichnet wird.

Die Feldstärke ist also auch definiert durch das negative Potentialgefälle senkrecht zu den Niveauflächen.

Kennt man die Niveauflächen irgend einer magnetischen oder elektrischen Anordnung, so kann man demnach die Gestalt der Kraftlinien oder die Richtung der Kraft in jedem beliebigen Punkte angeben, und umgekehrt: kennt man die Kraftlinien, so kann man die Niveauflächen einzeichnen. So ergeben sich z. B. die Niveauflächen in Abb. 19 (gestrichelte Linien) aus dem in Abb. 3 dargestellten Kraftlinienbild zweier ungleichnamigen punktförmigen Massen von gleicher Größe.

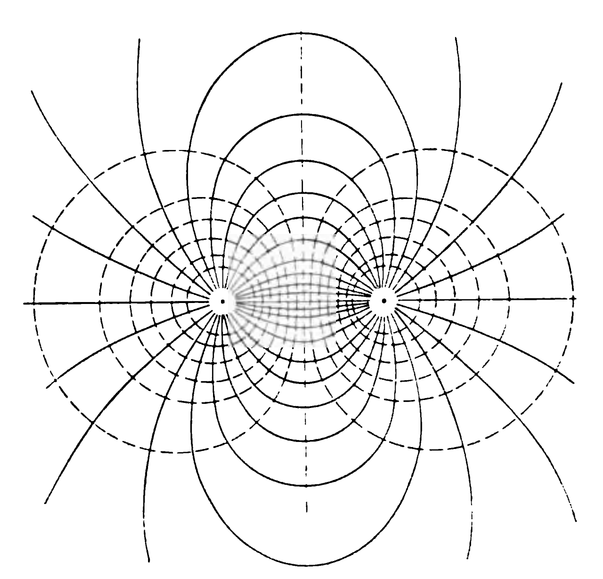


Abb. 19. Kraftlinien und Niveauflächen zweier ungleichnamigen Massen von gleicher Größe.

Abb. 20 zeigt die Niveauflächen und Kraftlinien zweier gleichnamigen Massen von verschiedener Größe. Wie man sieht, ist die Gestalt der Niveauflächen und Kraftlinien in nächster Nähe jeder der beiden Massen so, als wenn jede allein vorhanden wäre. Dann kommt eine Niveaufläche, die sich in der Mitte zwischen den beiden Massen zu einem Punkte G vereinigt wie zwei mit der Spitze zusammenstoßende Kegelflächen. Die folgenden Niveauflächen vereinigen sich bereits und umschließen beide Massen. In einer Entfernung, gegen welche der gegenseitige Abstand beider Massen verschwindend klein ist, werden die Niveauflächen zu Kugelflächen wie bei einer einzelnen Masse. Im Punkte G herrscht labiles Gleichgewicht. Eine Probemasse in diesem Punkte erfährt keine Kraft,

da hier beide Massen gleich stark, aber in entgegengesetzter Richtung wirken.

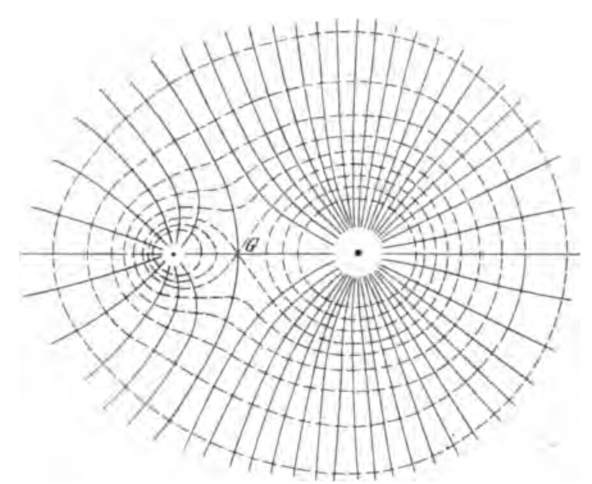


Abb. 20. Kraftlinien und Niveauflächen zweier gleichnamigen Massen von verschiedener Größe.

Betrachten wir zwei Niveauflächen vom Werte U_1 und U_2; nach § 12 ist U_1 nichts anderes als die Arbeit bei der Bewegung der Masse 1 vom Unendlichen bis auf die Niveaufläche U_1; und U_2 nichts anderes als die Arbeit bei der Bewegung der Masse 1 vom Unendlichen bis auf die Niveaufläche U_2. Mithin ist die Potentialdifferenz $U_2 - U_1$ nichts anderes als die Arbeit bei der Bewegung der Masse 1 von der Niveaufläche U_1 bis zur Niveaufläche U_2. Betrachten wir nun ein Kraftfeld, dessen sämtliche Niveauflächen parallele Ebenen sind, und dessen ganzzahlige Niveauflächen (4, 3, 2, 1) gleichen Abstand l haben (Abb. 21 im Gegensatz zu Abb. 18—20, wo die Abstände der ganzzahligen Niveauflächen immer größer werden), so ist die Feldstärke zwischen zwei solchen Niveauflächen nach Gl. 9

Abb. 21. Homogenes Feld.

$$\mathfrak{H} = -\frac{dU}{dr_{senkr}} = -\frac{U_2 - U_1}{l} = -\frac{U_3 - U_2}{l} = \ldots$$

d. h., die Feldstärke ist im ganzen Bereich dieses Feldes konstant; mithin ist es (nach der Definition in § 6) ein homogenes Feld. Da nach dem Vorigen die Kraftlinien senkrecht zu den

Niveauflächen verlaufen, so sieht man sofort, daß die Kraftlinien in Abb. 21 parallele Geraden sein müssen.

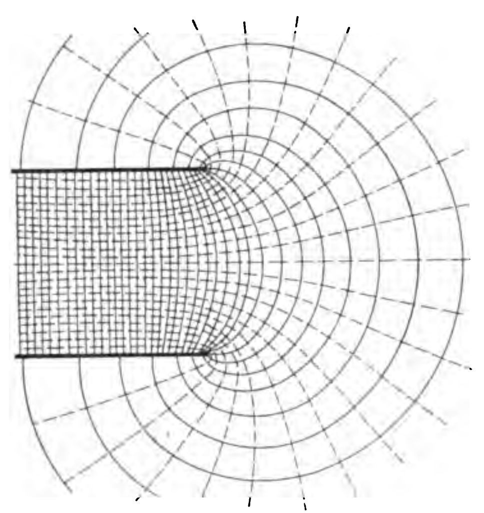


Abb. 22. Kraftlinien und Niveauflächen zweier paralleler Ebenen mit entgegengesetzter Ladung.

Bei einem homogenen Felde, d. h. bei einem solchen, dessen Feldstärke an allen Stellen gleich ist, sind demnach nicht nur die Kraftlinien parallele Geraden und die Niveauflächen parallele Ebenen, sondern es sind sogar die Abstände der aufeinanderfolgenden Niveauflächen gleich.

Homogene Felder treten nach § 11 auf zwischen 2 parallelen Flächen, die mit ungleichnamigen Massen von gleichmäßiger Dichte belegt sind. Abb. 22 zeigt die Niveauflächen und Kraftlinien eines solchen Feldes entsprechend dem Bilde in Abb. 6. In der Nähe des Randes und außerhalb dessen ist das Feld nicht mehr homogen.

Zweites Kapitel.

Grundgesetze der Elektrostatik.

16. Potential auf sich selbst.

Nach § 12 ist der Ausdruck $\frac{m}{r}$ das Potential einer Masse m auf eine in der Entfernung r befindliche Masse 1. Das Potential der gesamten elektrischen Ladung irgend eines Leiters in bezug auf eine der Einheit gleiche Masse von sich selbst nennt man das Potential der Ladung auf sich selbst, oder kurzweg das Potential des Leiters oder auch Selbst-Potential. Es ist dies jene Arbeit, welche notwendig ist, um diese Einheit aus unendlicher Entfernung auf diesen Leiter zu bringen. Befindet sich die Ladung im Gleichgewicht, so muß das Selbst-Potential an allen Stellen des Körpers gleich sein; denn wäre dies nicht der Fall, so würde nach § 14 die Elektrizität von den Punkten höheren Potentials zu denen kleineren Potentials strömen, so lange, bis das Gleichgewicht hergestellt ist. Die Oberfläche jedes geladenen Leiters muß daher zugleich eine Niveaufläche sein. Da nach § 15 die Kraflinien an jeder Stelle senkrecht zu den Niveauflächen sind, müssen sie auch senkrecht auf der Oberfläche des Leiters stehen. Beides gilt jedoch nur für elektrische und nicht mehr für magnetische Massen, da sich die letzteren auf ihrem Träger nicht bewegen können.

17. Elektrizitätserzeugung. Hypothesen der Elektrizität.

Die einfachste Art der Elektrizitätserzeugung ist die, daß man zwei Körper aus verschiedenem Material miteinander reibt. Hat man auf diese Weise einen geladenen Körper erhalten, so kann man damit unbegrenzte Mengen Elektrizität erzeugen, indem man ihm

einen anderen, gut leitenden Körper nähert. Auf der zugewendeten Seite zeigt sich dann eine jenem entgegengesetzte Elektrizitätsmenge, auf der abgewendeten Seite eine gleichnamige. Man nennt diesen Vorgang Elektrisierung durch Verteilung oder Influenz. Verbindet man diesen influenzierten Leiter mit einem dritten, unelektrischen Leiter, so strömt die gleichnamige Elektrizität auf diesen ab, während die ungleichnamige vermöge der durch das Coulombsche Gesetz ausgedrückten Kraft festgehalten wird. Hebt man die Verbindung mit dem dritten Körper wieder auf und entfernt den influenzierten Körper von dem ersten, so verteilt sich die zurückgebliebene Ladung über den ganzen influenzierten Körper. Diese, sowie die entgegengesetzte Ladung auf dem dritten Körper kann man nun irgendwo anders hin ableiten und dann denselben Vorgang mit dem zweiten und dritten Körper wiederholen. Auf diesem Vorgang beruhen alle Influenz-Elektrisiermaschinen. Da jede der so erzeugten Ladungen eine gewisse Energie darstellt, so entsteht die Frage, wo das nach dem Gesetz von der Erhaltung der Arbeit notwendige Arbeitsäquivalent zu suchen ist. Es besteht in der bei der Entfernung des zweiten, influenzierten Körpers zur Überwindung der elektrischen Anziehungskraft nötigen Arbeit. Darum dreht sich eine Influenz-Maschine schwerer, wenn sie Elektrizität abgibt, als wenn sie leer gedreht wird.

Die Erscheinung der Influenz führt zu der ältesten Hypothese über das Wesen der Elektrizität, nach der man annimmt, daß jeder Körper unbegrenzte Mengen eines positiven und eines negativen Fluidums enthält (dualistische Hypothese). Im influenzierten Körper findet eine Trennung der beiden dadurch statt, daß entsprechend dem Coulombschen Gesetz das ungleichnamige Fluidum angezogen, das gleichnamige abgestoßen wird.

Eine andere Hypothese ist die, daß es nur ein Fluidum gibt, das mit einer gewissen Menge in jedem Körper enthalten ist (unitarische Hypothese). Hat ein Körper mehr von diesem Fluidum als im gewöhnlichen Zustande, so ist er beispielsweise positiv elektrisch; hat er weniger, so ist er negativ elektrisch. Der Vorgang der Influenz erklärt sich nach dieser Hypothese in der Weise, daß ein Teil des im influenzierten Körper vorhandenen Fluidums nach der dem influenzierenden Körper zugewendeten Seite strömt und daher auf dieser Seite ein Überschuß, auf der entgegengesetzten Seite aber ein entsprechender Mangel auftritt.

In neuerer Zeit nimmt man an, daß die Elektrizität — ebenso wie die materiellen Stoffe aus Atomen — aus kleinsten Teilchen bestehe, die man Elektronen nennt, und die mit den Atomen in einer Art chemischer Verbindung stehen. Dabei schwankt man noch

ebenso wie früher zwischen der Annahme, ob es zwei verschiedene Arten von Elektronen oder nur eine Art gibt (vgl. Kap. 15).

Ist einer der beiden Körper, der influenzierende oder der influenzierte, leicht beweglich, z. B. an einem isolierenden Seidenfaden aufgehängt, so nähern sich die beiden, weil die ungleichnamige influenzierte Elektrizität näher an dem influenzierenden Körper liegt, als die gleichnamige. Infolgedessen überwiegt nach dem Coulombschen Gesetz die Anziehung über die Abstoßung. Ist kein Hindernis vorhanden, so nähern sich die beiden Körper mit wachsender Kraft bis zur Berührung. In diesem Augenblick findet ein Ausgleich zwischen den ungleichnamigen Elektrizitäten beider Körper statt, so daß schließlich nur eine Art Elektrizität vorhanden ist. Sind beide Körper gute Leiter, so findet die Verteilung über beide nach dem im vorigen Paragraphen gewonnenen Satz statt, nämlich so, daß das Potential beider Körper gleich wird. Da sie durch die Berührung gleichnamige Ladung erhalten haben, so tritt jetzt eine Abstoßung zwischen ihnen ein.

Abb. 23 zeigt die Kraftlinien und Niveauflächen, wenn eine leitende Kugel *B* in das Feld einer punktförmigen Masse *m*, wie es durch Abb. 2 dargestellt ist, gebracht wird. Da nach dem im vorigen Paragraphen gewonnenen Satz die Oberfläche dieser Kugel eine Niveaufläche sein muß, so müssen alle vorher an der Stelle der Kugel vorhandenen Niveauflächen vor dieser zurückweichen bis auf eine, welche denselben Wert hat, wie die Oberfläche der Kugel, und die vorher durch jene Stelle des Raumes ging, wo sich jetzt der Mittelpunkt dieser Kugel befindet. Wo diese Niveaufläche die Oberfläche der Kugel trifft, befindet sich die Grenze zwischen der ungleichnamigen und gleichnamigen induzierten Elektrizität. Daher endet ein Teil der von *m* ausgehenden Kraftlinien auf dem links von dieser Niveaufläche liegenden Teil der Kugeloberfläche, während von dem rechtsliegenden Teil, auf dem die mit *m* gleichnamige Elektrizität sitzt, neue Kraftlinien ausgehen. Wird nun diese Elektrizität abgeleitet, so daß nur die zu *m* entgegengesetzte Ladung zurückbleibt, so geht das Kraftfeld über in das durch Abb. 24 dargestellte Feld zweier verschieden großen, ungleichnamigen

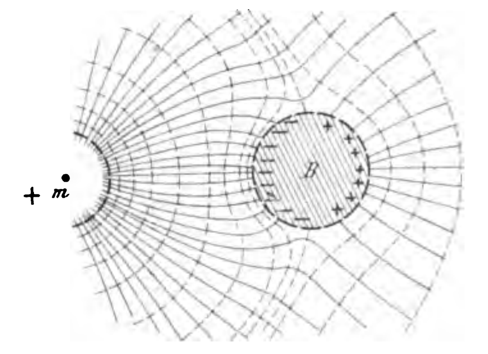


Abb. 23. Kraftlinien und Niveauflächen einer von *m* influenzierten Kugel.

Ladungen. Es hat ähnlichen Charakter wie das in Abb. 19 dargestellte Feld. Bemerkenswert ist hierbei die Niveaufläche, welche die Kugel B umschließt und sich jenseits derselben zum Punkt G zusammenzieht, der ein Punkt labilen Gleichgewichtes ist. Von hier

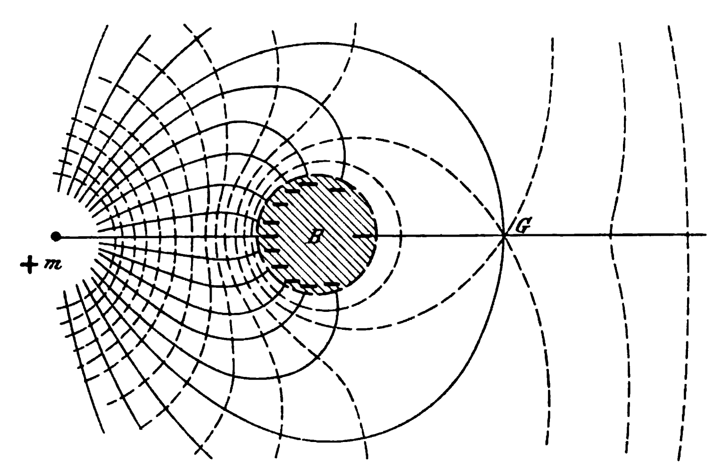


Abb. 24. Kraftlinien und Niveauflächen zweier ungleichnamigen Ladungen von verschiedener Größe.

aus bildet sie wieder eine geschlossene Fläche, welche nun beide Ladungen umschließt. Auch alle folgenden Niveauflächen umschließen beide Ladungen, weil die induzierende Ladung m größer ist als die auf B induzierte und daher überwiegt. Nur wenn entgegengesetzte Ladungen genau gleich groß sind (Abb. 19), gibt es keine Niveauflächen, welche beide umschließen, weil keine Ladung überwiegt.

18. Verteilung der Elektrizität auf Leitern und auf Isolatoren.

Befindet sich eine elektrische Ladung auf einem Leiter im Gleichgewicht, so muß ihre Verteilung eine solche sein, daß auf keinen Punkt im Innern des Leiters eine elektrische Kraft ausgeübt wird. Denn wäre eine solche Kraft an irgend einer Stelle vorhanden, so würde hier Elektrizität durch Influenz erzeugt werden und eine Bewegung derselben so lange stattfinden, bis das Gleichgewicht hergestellt ist, d. h. bis diese Kraft wieder verschwunden ist. Es ist dabei ganz gleichgültig, ob sich Elektrizität nur auf dem betreffenden Leiter selbst oder auch auf anderen benachbarten Leitern befindet.

Dasselbe ergibt sich aus dem in § 16 gewonnenen Satz, wonach das Potential eines Leiters in allen Punkten dasselbe ist. Da

die elektrische Kraft gleich dem negativen Differentialquotienten des Potentials ist, und der Differentialquotient einer nach allen Richtungen konstanten Größe null ist, so ist auch die Kraft nach jeder beliebigen Richtung im Innern des Leiters null. Daraus folgt auch, daß die von einem geladenen Leiter ausgehende Kraft nur nach außen wirken kann. Ferner folgt daraus, daß sich keine Elektrizität im Innern eines Leiters, sondern nur in einer sehr dünnen Schicht auf der Oberfläche befinden kann. Denn gäbe es irgendwo im Innern elektrische Massen, so müßten zwischen diesen und den auf der Oberfläche befindlichen Kräfte auftreten.

Diese Sätze sind durch sorgfältige experimentelle Untersuchungen Faradays bestätigt worden. Der bemerkenswerteste dieser Versuche ist folgender. Führt man einen geladenen Leiter an einer isolierenden Handhabe in das Innere eines genügend tiefen, leitenden Hohlzylinders ein und berührt damit die innere Fläche, so gibt er seine ganze Ladung an den Zylinder ab, und sie findet sich dann nur auf der äußeren Oberfläche des Zylinders vor, während auf der inneren keine Spur einer Ladung nachzuweisen ist. Hätte man den geladenen Leiter von außen mit dem Zylinder in Berührung gebracht, so hätte er nur einen Teil seiner Ladung abgegeben, nämlich nur so viel, um auf beiden Leitern gleiches Potential herzustellen.

Wenn es im Innern eines Leiters keine elektrische Kraft gibt, kann es da auch keine Kraftlinien geben. Wenn wir in § 5 lediglich aus der Betrachtung der sichtbar gemachten Kraftlinien folgern konnten, daß sie immer zwischen entgegengesetzten Massen verlaufen, so kommt jetzt für die elektrischen Kraftlinien noch dazu, daß sie in den auf Leitern sitzenden freien Ladungen ihren Anfang oder ihr Ende haben. Und da schließlich alle elektrischen Kräfte von irgend welchen freien Ladungen herrühren, so müssen wir schließen, daß die elektrischen Kraftlinien überhaupt keine geschlossenen Linien sein können, sondern daß sie immer einen Anfang und ein Ende auf irgend zwei freien Ladungen haben.

Für magnetische Kraftlinien gelten diese Schlüsse nicht, da die magnetischen Körper auch im Innern magnetische Massen haben. Desgleichen gelten sie nicht für solche Körper, auf denen sich die Elektrizität nicht frei bewegen kann, also für Isolatoren. Denn wenn sich die elektrischen Massen nicht bewegen können, so verbleiben sie an ihren Stellen auch dann, wenn Kräfte auf sie wirken. Aus demselben Grunde kann auf solchen Körpern auch keine freie Ladung influenziert werden. Infolgedessen ist das Potential im Innern eines Isolators nicht konstant, die Kraftlinien können auf einem solchen nicht anfangen oder enden, sondern gehen durch ihn hin-

durch. Nur infolge dieses Umstandes ist es möglich, die Kraftlinien in Luft oder in einer isolierenden Flüssigkeit sichtbar darzustellen, wie in § 5. Streng genommen, gibt es allerdings keine Isolatoren, denn unter dem Einfluß sehr starker Kräfte tritt auch in den besten Isolatoren, wie Harz, Gummi, Glimmer, Glas, Porzellan, eine langsame Bewegung der Elektrizität auf; d. h., vollkommene Isolatoren, welche eine Ladung unter allen Umständen festzuhalten vermöchten, gibt es nicht.

19. Elektrostatische Schirmwirkung.

Das im vorigen Paragraphen gewonnene Gesetz, daß auf das Innere eines leitenden Körpers keine elektrische Kraft wirken kann, hat eine für die Praxis wichtige Folge. Bringt man in das Innere eines hohlen Leiters einen anderen, so kann auf diesen keine Elektrizität durch Influenz von außen her erzeugt werden, weil eben keine Kraft auf ihn wirkt, welche die Verteilung der Elektrizität bewirken würde. Die äußere Oberfläche eines Leiters wirkt auf den ganzen inneren Raum wie ein Schirm. Versuche haben gezeigt, daß dies auch dann noch gilt, wenn der schirmende Leiter nicht aus einer geschlossenen Fläche, sondern aus einem engmaschigen leitenden Gitter besteht. Der Grund liegt darin, daß die auf den Drähten des Gitters influenzierte Elektrizität die äußeren Kraftlinien an sich heranzieht, wie die Abb. 25 zeigt, so daß keine übrig bleiben, welche in das Innere gelangen könnten. Nur wenn die Maschen so weit sind, daß nicht alle Kraftlinien an die Drähte des Gitters herangezogen werden können, gelangen einzelne in das Innere.

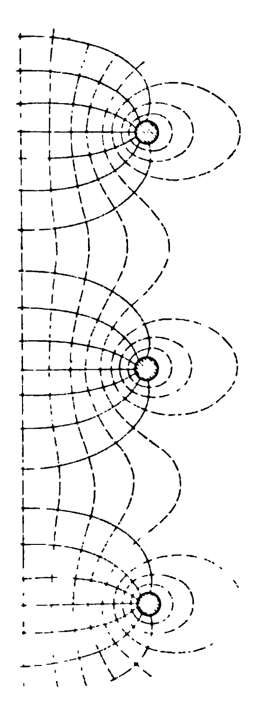


Abb. 25. Schirmwirkung eines Drahtgitters.

Für die Schirmwirkung genügt auch schon eine zylindrische Fläche oder ein zylindrisches Gitter, wenn es so aufgestellt ist, daß alle Kraftlinien die Mantelfläche treffen und nicht durch die offenen Basisflächen in das Innere eintreten können. Solche Schirme werden angewendet, wenn man z. B. beim Experimentieren einen Körper vor elektrischen Kräften

schützen will, sowie als Schutz gegen atmosphärische Entladungen.[1])

Eine Schirmwirkung nach einer Seite wird auch von einer vollen oder gegitterten leitenden Fläche ausgeübt, wenn sie zur Erde abgeleitet ist. Die Kraftlinien, die z. B. von einer positiven Ladung ausgehen und von links auf diese Fläche treffen (Abb. 26), induzieren auf ihrer linken Seite eine negative Ladung. In dieser finden die Kraftlinien ihr Ende. Der Raum rechts von der Fläche ist demnach frei von Kraftlinien. Wäre aber die Fläche nicht mit der Erde verbunden, so wäre eine gleichgroße positive Ladung auf der rechten Seite der Fläche vorhanden und würde Kraftlinien nach rechts aussenden.

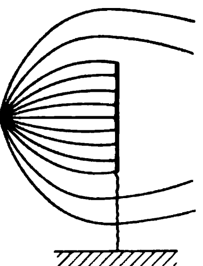


Abb. 26. Schirmwirkung einer zur Erde abgeleiteten Fläche.

20. Potential einer geladenen Kugel auf sich selbst und auf einen äußeren Punkt.

Befindet sich eine geladene, leitende Kugel außerhalb des Bereiches aller anderen elektrischen Massen, so muß die Dichte der auf der Oberfläche sitzenden Elektrizität an allen Stellen dieselbe sein, weil eine Kugel ein nach allen Richtungen symmetrisches Gebilde ist. Da das Potential der Ladung auf alle Punkte der Kugel dasselbe ist, so muß dies auch vom Mittelpunkt gelten. Ist σ die Ladung auf der Flächeneinheit, also die Flächendichte, so ist das Potential derselben auf den Mittelpunkt $\frac{\sigma}{r}$, wenn r der Radius der Kugel ist. Da alle Teilchen der Ladung gleichweit vom Mittelpunkt entfernt sind, und die Potentiale mehrerer Massen ohne weiteres addiert werden können (§ 13), so ist das Potential der gesamten Ladung Q auf den Mittelpunkt $U = \frac{Q}{r}$, und das ist zugleich das Potential der Kugelladung auf sich selbst. Bei anderen Körpern ist die Berechnung des Potentials schwierig und für die meisten überhaupt unausführbar. Man muß es dann durch experimentelle Messung bestimmen.

[1]) Solche Schutzgitter sind zuerst von der österreichischen technischen Militärverwaltung zum Schutz von Wachhäusern und Pulvertürmen in dem häufigen atmosphärischen Entladungen ausgesetzten Karstgebiete angewendet und neuerdings vom Elektrotechnischen Vereine zum Schutze von Sprengstoffabriken und -lagerhäusern empfohlen worden. ETZ 1904, S. 885; 1906, S. 576.

Infolge der allseitigen Symmetrie einer gleichmäßig geladenen Kugel ist nicht nur die Oberfläche, sondern auch jede andere die Kugel konzentrisch umschließende Kugelfläche eine Niveaufläche. Daran ändert sich nichts, wenn wir uns die Kugel mit ihrer Ladung zu einer kleineren Kugel zusammengeschrumpft denken. Die frühere Oberfläche ist jetzt auch eine Niveaufläche. Schließlich können wir uns die Kugel ganz in ihrem Mittelpunkt zusammengeschrumpft denken, wo nun die ganze Ladung Q sitzt. An den äußeren Niveauflächen ist dadurch nichts geändert worden, und daher ist das Potential der geladenen Kugel auf einem äußeren Punkt so, als ob die Ladung im Mittelpunkt konzentriert wäre, also $\frac{Q}{a}$, wenn a der Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkt ist. Die Kraft in diesem Punkte ist dann $\frac{Q}{a^2}$.

Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß in gleicher Weise eine auf einem Zylinder gleichmäßig verteilte Ladung nach außen so wirkt, als ob die Ladung in gleichmäßiger linearer Verteilung auf der Achse säße. Streng genommen, gilt das nur, wenn man von der Ladung auf den Endflächen des Zylinders absieht, also von einem Hohlzylinder oder von einem im Verhältnis zum Durchmesser sehr langen Zylinder. Es sei hier gleich bemerkt, daß auch ein elektrischer Strom in einem zylindrischen Leiter so nach außen wirkt, als wenn er in der Achse konzentriert wäre.

21. Abhängigkeit der elektrischen Dichte vom Krümmungsradius. Spitzenwirkung.

Werden zwei geladene, leitende Kugeln durch einen dünnen Draht verbunden (Abb. 27), so stellt sich nach § 16 das elektrische Gleichgewicht derart her, daß das Potential beider Kugeln gleich ist. Ist Q die Elektrizitätsmenge auf der einen, Q' die auf der anderen Kugel, so ist demnach $U = \frac{Q}{r} = \frac{Q'}{r'}$; d. h., die Ladungen verteilen sich so zwischen den beiden Kugeln, daß die Elektrizitätsmengen sich so verhalten wie die Radien.

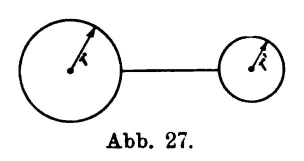


Abb. 27.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$Q = rU \quad \text{und} \quad Q' = r'U.$$

Da die Oberfläche der einen Kugel $4\pi r^2$, die der anderen $4\pi r'^2$

ist, so ist die Flächendichte der elektrischen Ladung auf der einen $\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{U}{4\pi r}$ und auf der anderen $\sigma' = \frac{Q'}{4\pi r'^2} = \frac{U}{4\pi r'}$.

Daraus folgt

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{r'}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

d. h., die Dichten verhalten sich umgekehrt wie die Radien.

Daraus folgt, daß auf irgend einem anders geformten Körper die elektrische Dichte dort am größten ist, wo der Krümmungsradius am kleinsten ist. Hat der Leiter eine Spitze, so muß demnach die Dichte am äußersten Ende der Spitze theoretisch unendlich groß, praktisch jedenfalls sehr groß sein.

Da die Feldstärke in unmittelbarer Nähe einer geladenen Oberfläche nach § 11 gleich $2\pi\sigma$ und andererseits nach § 15 gleich dem negativen Potentialgefälle $-\frac{dU}{dr_{senkr}}$ ist, so folgt, daß auch das Potentialgefälle gegenüber einer Spitze am größten ist, d. h., daß die Niveauflächen hier am dichtesten an die Oberfläche herantreten, wie Abb. 28 zeigt. Daraus folgt weiter, daß in der Spitze verhältnismäßig am meisten Kraftlinien zusammenlaufen und am stärksten konvergieren müssen.

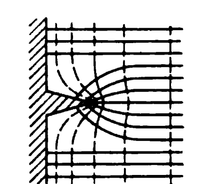


Abb. 28. Kraftlinien und Niveauflächen bei einer leitenden Spitze.

22. Kapazität.

Ebenso wie ein Gefäß ein bestimmtes Fassungsvermögen für irgend ein Gas hat, so besitzt auch jeder Leiter ein bestimmtes Fassungsvermögen für Elektrizität. Man nennt es die Kapazität des Körpers.

So wie die von einem Gefäß aufgenommene Gasmenge dem Druck, unter dem es steht, proportional ist, ist auch die auf einem Leiter befindliche Elektrizitätsmenge dem Potential proportional; also

$$Q = CU \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Mithin ist C die Kapazität des Leiters; sie ist abhängig von der Größe und Gestalt des Körpers. Für eine Kugel kann man sie leicht angeben, wenn man die letzte Gleichung mit der im vorigen Paragraphen vergleicht. Man sieht, daß

$$C = r$$

ist, d. h., die Kapazität einer Kugel ist gleich ihrem Radius. Drückt man den Radius in Zentimetern aus, so erhält man die Kapazität

in **absoluten elektrostatischen** Einheiten. Die üblichen **praktischen** Einheiten der Elektrotechnik sind das **Farad** und das **Mikrofarad**. 1 Farad $= 9 \cdot 10^{11}$ absoluten elektrostatischen Einheiten. 1 Mikrofarad $= 9 \cdot 10^{5}$ absoluten elektrostatischen Einheiten (vgl. Kap. 17).

Die Kapazität einer **kreisförmigen Scheibe** vom Radius r, auf deren beiden Seiten Elektrizität sitzt, ist:

$$C = \frac{2r}{\pi} = \frac{r}{1{,}57}$$

Für einen besonderen Fall, $r = 10$, ist $C = \frac{10}{1{,}57} = 6{,}4$ absol. Einh., d. h., die Kapazität einer solchen Scheibe ist gleich der einer Kugel von 6,4 cm Radius.

Die Kapazität eines **Kreiszylinders**, dessen Länge l sehr groß ist gegenüber dem Radius r (Draht von kreisförmigem Querschnitt), ist:

$$C = \frac{l}{2 \log \operatorname{nat} \frac{l}{r}}$$

Für einen besonderen Fall: $l = 1$ m, $r = 1$ mm ist

$$C = \frac{100}{2 \log \operatorname{nat} \frac{100}{0{,}1}} = \frac{50}{\log \operatorname{nat} 1000} = \frac{50}{6{,}9} = 7{,}3$$

d. h., seine Kapazität ist gleich der einer Kugel von 7,3 cm Radius.

Für Rotationsellipsoide gelten folgende Formeln, wenn die beiden Achsen mit a und b, die Exzentrizität $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ mit g bezeichnet wird. Es ist dann für ein Rotationsellipsoid, entstanden durch Rotation um die große Achse:

$$C = \frac{2ag}{\log \operatorname{nat} \frac{1+g}{1-g}}$$

und für das Rotationsellipsoid um die kleine Achse

$$C = \frac{ag}{\arcsin g}$$

Befinden sich diese Leiter nicht in Luft, sondern in einem Dielektrikum von der Konstante ϑ, so sind diese Formeln noch mit ϑ zu multiplizieren (vgl. § 28).

Über die Kapazität von Kondensatoren vgl. § 30.

23. Potential und Kapazität der Erde.

Die Kapazität der Erde, als leitende Kugel betrachtet, ist gleich ihrem Radius. Demnach ist ihre Kapazität gegenüber allen unseren Apparaten so groß, daß man sie ohne weiteres als unendlich groß annehmen kann. Wenn man eine elektrische Ladung, wie man

sie gewöhnlich gebraucht, der Erde zuführt, so ist dies ebenso, als würde man ein Glas Wasser ins Meer schütten.

Die Erde besitzt jedoch, wie unzweifelhaft nachgewiesen ist, ein gewisses Potential und daher auch eine Ladung. Ihr Potential kann dadurch bestimmt werden, daß man die Potentialdifferenz zwischen der Erde und einigen Stellen über ihr mißt, woraus sich das Potentialgefälle und daraus das absolute Potential der Erde ergibt. Daß wir von ihrer Ladung nichts merken, kommt daher, daß wir in ihrer unmittelbaren Nähe sind und daher dasselbe Potential haben wie sie. Eine Ladung wird aber nur dann für uns bemerkbar, wenn wir eine andere haben, mit der wir sie vergleichen können. Wir nehmen daher das Potential der Erde als den Nullwert des Potentials an und beziehen alle anderen darauf, ebenso wie wir die Meeresoberfläche für die Bodenerhebungen als Nullpunkt annehmen und von diesem aus zählen. Die Definition des Potentiales als Arbeitswert (§ 12, 16) ist jetzt dahin abzuändern, daß es jene Arbeit darstellt, welche notwendig ist, um eine gleichnamige Masse 1 von der Erde aus an die betreffende Stelle oder auf den betreffenden Leiter zu bringen. Ein positives Potential hat dann jeder Körper, der ein größeres Potential besitzt als die Erde; wir sagen kurz: er ist positiv geladen. Ein negatives Potential besitzt jeder Körper, der ein kleineres Potential besitzt als die Erde. Wir sagen kurz: er ist negativ geladen.

24. Elektroskop, Elektrometer.

Zur ungefähren Messung des Potentiales dient das Elektroskop, das aus zwei an einem Draht befestigten Streifen von Blatt-Gold oder Blatt-Aluminium besteht (Abb. 29), die zum Schutz gegen Luftzug in einem Glasgefäße eingeschlossen sind. Die durch den herausragenden Draht den beiden Blättchen zugeführte Ladung bringt eine Divergenz der Blättchen infolge gegenseitiger Abstoßung hervor, die um so größer ist, je größer die zugeführte Elektrizitätsmenge ist. Da die Kapazität der Blättchen konstant ist, so ist nach Gl. 10 diese Elektrizitätsmenge proportional dem Potential desjenigen Leiters, von dem die Blättchen ihre Ladung erhalten. Die Divergenz der Blättchen ist also ein Maß für das Potential des Leiters, mit dem man das Elektroskop in Berührung gebracht hat. Das gilt aber nur, wenn sich in der Nähe des Elektroskops keine Ladung befindet, die einen Einfluß auf die Blättchen ausüben kann. Insbesondere darf auf dem Glasgehäuse des Elektroskops keine

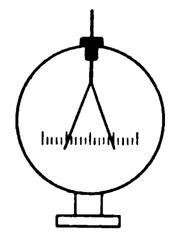


Abb. 29. Goldblattelektroskop.

Ladung sitzen. Da dies im allgemeinen schwer zu erreichen ist, macht man den Mantel des Gehäuses aus Metall und verbindet ihn mit der Erde. Die Divergenz der Blättchen hängt dann ab von ihrem Potential, bezogen auf das Nullpotential der Erde. Bringt man die Blättchen mit einem Körper vom Potential U_1 und das Gehäuse mit einem Potential U_2 in Verbindung, so hängt die Divergenz von der Potentialdifferenz $U_1 - U_2$ ab. Potentialdifferenzen in einem bestimmten Maßsystem kann man leicht durch galvanische Zellen, oder elektrische Maschinen herstellen; man ist dadurch in der Lage, ein Elektroskop empirisch zu eichen. Um die Divergenz der Blättchen ablesen zu können, bringt man auf der vorderen Glasplatte eine Skala an. Die Rückwand trägt zweckmäßigerweise einen Spiegel, um die Blättchen auf ihr Spiegelbild projizieren zu können und so eine schiefe Ablesung zu vermeiden.

Abb. 30 zeigt ein ähnliches Instrument, das Braunsche Elektrometer (ausgeführt von Günther & Tegetmeyer, Braunschweig), das sich für größere Potentialdifferenzen eignet. Es besteht aus einem doppelarmigen, um die Mitte drehbaren Aluminiumstreifen. Die untere Hälfte ist etwas schwerer als die obere, so daß sich der Streifen lotrecht einstellt. Die Achse des Streifens wird von dem durch die Mitte des Gehäuses gehenden, isolierten Metallstab getragen. Wird diesem von oben eine Ladung zugeführt, so teilt sie sich durch die Achse dem Streifen mit, dessen oberer und unterer Teil infolgedessen von dem Stabe abgestoßen wird. Der Streifen stellt sich mithin um so schräger ein, je größer das Potential der zugeführten Ladung, bzw. die Potentialdifferenz zwischen ihr und dem Gehäuse ist.



Abb. 30. Elektrometer nach Braun.

25. Oberflächenspannung einer elektrischen Ladung.

In § 11 haben wir gefunden, daß die Kraft, welche zwischen der mit der Dichte σ geladenen Oberfläche eines Leiters und einer in unmittelbarer Nähe befindlichen elektrischen Masse m wirkt,

$F = 2\pi\sigma m$ ist. Haben σ und m gleiches Vorzeichen, so wird m abgestoßen. Setzt man für m die Elektrizitätsmenge ein, welche auf der Flächeneinheit des Leiters selbst sitzt, das ist die Flächendichte σ, so ist

$$F_{ob} = 2\pi\sigma^2 \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Das ist also die Kraft, welche von der Ladung eines Leiters auf jede Flächeneinheit dieser Ladung selbst ausgeübt wird. Da nach § 18 auf das Innere eines Leiters keinerlei Kraft wirken kann, so muß F_{ob} nach außen wirken, und zwar an jeder Stelle senkrecht zur Oberfläche, da nach § 16 die Oberfläche eines Leiters eine Niveaufläche sein muß. Die Ladung eines Leiters wirkt also so, wie eine nach außen drückende Oberflächenspannung.

Zahlenbeispiel: Eine leitende Kugel von 5 cm Radius werde mit einer Elektrizitätsquelle von 3000 Volt Spannnung gegen Erde verbunden. Da eine absolute Einheit gleich 300 Volt ist (Kap. 18), so sind dies 10 absolute Einheiten. Nach § 22 ist die Elektrizitätsmenge auf der Kugel $Q = rU = 5 \cdot 10 = 50$ absol. Einh. Die Oberfläche der Kugel ist $4\pi r^2 = 314\,\text{cm}^2$. Daher die elektrische Dichte auf der Kugel $\sigma = \frac{50}{314} = 0{,}16$. Wird die Kugel mit einer kurzen Spitze versehen, deren äußerster Krümmungsradius 0,001 cm ist, so ist nach § 21 die elektrische Dichte an der Spitze $\sigma' = \sigma \frac{r}{r'} = 0{,}16 \frac{5}{0 \cdot 001} = 80.$ Daher wäre die Oberflächenspannung an dieser Spitze $F_{ob} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 80^2 = 40000\,\text{Dyn} = \frac{40000}{980} = 41$ Grammgewicht, wenn die Spitze eine Oberfläche von 1 cm² hätte. Da sie aber entsprechend dem angenommenen Radius nur ungefähr 0,000001 cm² Fläche hat, ist der Druck der Ladung nach außen ungefähr 0,000041 Grammgewicht.

26. Einfluß eines benachbarten mit der Erde verbundenen Leiters. Kondensator.

Nach § 16 ist das Potential eines geladenen Leiters jene Arbeit, welche geleistet werden muß, wenn man die Elektrizitätsmenge 1 aus unendlicher Entfernung oder von der Erde aus auf diesen Leiter bringt.

Wir setzen den Fall, daß sich in der Nähe eines positiv geladenen Körpers ein anderer, negativ geladener befinde. Wenn wir nun eine positive Elektrizitätsmenge 1 von der Erde aus heranbringen, so wird uns dabei die von dem negativ geladenen Körper ausgehende Anziehung auf diese Elektrizitätsmenge unterstützen. Wir werden infolgedessen weniger Arbeit zu leisten haben; d. h., durch die Anwesenheit des negativen Körpers ist das Potential des positiven erniedrigt worden. Dasselbe gilt natürlich auch für den

negativen Körper; auch sein Potential ist durch die Nachbarschaft des positiven erniedrigt worden.

Eine derartige Anordnung kann man am leichtesten dadurch herstellen, daß man in die Nähe eines geladenen Leiters einen anderen bringt, der zur Erde abgeleitet ist. In diesem wird eine entgegengesetzte Ladung induziert, während eine gleich große gleichnamige zur Erde abströmt. Wir haben also zwei entgegengesetzt geladene Körper, für welche das oben Gesagte gilt. Die günstigste Anordnung wird natürlich die sein, wo die beiden Leiter möglichst nahe beieinander sind und möglichst große Oberflächen haben; also parallele Flächen, wie z. B. 2 konzentrische Hohlkugeln, 2 konaxiale Zylinder, oder 2 ebene parallele Platten. Man nennt solche Anordnungen Kondensatoren, da jede der beiden Flächen jetzt mehr Elektrizität aufnehmen kann, als jede für sich allein. Der Grund dafür liegt in der eben geschilderten Erniedrigung des Potentiales; denn nach § 22 ist die Kapazität einer der beiden Flächen $C = \frac{Q}{U}$. Wird nun durch die Anwesenheit der zweiten Platte U kleiner, so ist bei gleicher Elektrizitätsmenge der Wert des Bruches größer. Die Kapazität ist also größer geworden, und man muß jetzt, um wieder das Potential U zu erreichen, mehr Elektrizität zuführen.

Die Abnahme des Potentiales bei gleichbleibender Elektrizitätsmenge kann man zeigen, wenn man eine Platte mit einem Elektroskop verbindet und entfernt von der anderen lädt. Nähert man nun die zweite zur Erde abgeleitete Platte, so wird der Ausschlag kleiner. Die Fähigkeit, bei konstantem Potential eine größere Elektrizitätsmenge aufzunehmen, also die Vergrößerung der Kapazität, kann man dadurch zeigen, daß man die eine Platte entfernt von der anderen mit einer Elektrizitätsquelle von bestimmtem Potentiale verbindet, also etwa mit einem Pole eines galvanischen Elementes, dessen anderer zur Erde abgeleitet ist. Die Elektrizitätsmenge, die der Platte zuströmt, kann man an dem Ausschlag eines empfindlichen Galvanometers ersehen. Macht man nun denselben Versuch, nachdem die andere zur Erde abgeleitete Platte genähert wurde, so ist dieser Ausschlag größer.

Die Ladung der beiden Leiter mit entgegengesetzten Elektrizitäten kann natürlich auch dadurch geschehen, daß man sie mit den beiden Polen einer Stromquelle verbindet. Diese liefert dann so viel Elektrizität, als nötig ist, um jeden Leiter auf dasselbe Potential zu bringen wie die entsprechenden Pole der Stromquelle. Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Platten ist dann gleich der elektromotorischen Kraft der Stromquelle E.

Im allgemeinen ist jede Anordnung von zwei aufeinander einwirkenden Leitern, die sich auf verschiedenen Potentialen befinden, ein Kondensator.

27. Plattenkondensator.

Die Kapazität eines Kondensators, der aus zwei gleich großen, parallelen, im Abstand a befindlichen Platten besteht, läßt sich leicht berechnen, wenn sie mit gleich großen, entgegengesetzten Ladungen versehen sind, denn dann ist das Feld zwischen ihnen ein homogenes und die Flächendichte der Elektrizität auf beiden gleich groß. Sie ist auch an allen Stellen jeder Platte dieselbe, wenn wir von den Rändern absehen. Die Feldstärke zwischen den Platten ist also nach Gl. 6

$$\mathfrak{H} = 4\pi\sigma.$$

Andererseits ist die Feldstärke in einem homogenen Felde (§ 15)

$$\mathfrak{H} = \frac{U_2 - U_1}{a},$$

wenn U_2 das Potential der einen, U_1 das der anderen Platte und a ihr gegenseitiger Abstand ist. Mithin

$$\sigma = \frac{U_2 - U_1}{4\pi a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Ist S die Fläche jeder der beiden Platten, so ist die Ladung auf der einen

$$Q = \sigma S = \frac{U_2 - U_1}{4\pi a} S,$$

auf der anderen

$$Q = -\sigma S = -\frac{U_2 - U_1}{4\pi a} S.$$

Das Verhältnis der Ladung Q auf einer der Platten zu der Potentialdifferenz zwischen beiden $(U_2 - U_1)$ bezeichnet man als Kapazität C des Kondensators. Es ist also

$$C = \frac{Q}{U_2 - U_1} = \frac{S}{4\pi a}$$

Es ist zu beachten, daß hier nicht etwa $\frac{Q}{U_2}$ oder $\frac{Q}{U_1}$ wie bei einem einzelnen Leiter als Kapazität gilt.

Setzt man die Potentialdifferenz $U_2 - U_1$ gleich E (z. B. die elektromotorische Kraft einer Stromquelle, an deren Pole die Platten des Kondensators angeschlossen sind), so ist

$$Q = CE \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Wir wollen noch die Kraft berechnen, mit welcher die beiden Kondensatorplatten aufeinander einwirken. Nach § 11 ist die Kraft zwischen einer mit der Flächendichte σ belegten Platte und einer in unmittelbarer Nähe befindlichen Ladung m:

$$F = 2\pi\sigma m.$$

Hier in diesem Falle ist m nichts anderes als die Ladung der zweiten Platte von entgegengesetztem Vorzeichen; daher ist

$$m = -\sigma S.$$

Mithin

$$F = -2\pi\sigma^2 S \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Durch das negative Vorzeichen wird zum Ausdruck gebracht, daß die beiden Platten sich anziehen.

Setzt man Gl. 13 ein, so ist

$$F = -\frac{SE^2}{8\pi a^2}.$$

Da das Potentialgefälle $\frac{E}{a}$ gleich der Feldstärke $\mathfrak{H}$ ist, so geht die Gleichung über in

$$F = -\frac{S\mathfrak{H}^2}{8\pi}.$$

Die vorstehenden Formeln sind abgeleitet worden unter der Voraussetzung, daß das Feld zwischen den Platten bis zum Rand homogen ist, und auf den Außenseiten der Platten keine Ladung sitzt. Wie Abb. 22 zeigt, ist aber das Feld in der Nähe des Randes nicht homogen, und auf den Außenseiten sitzen auch Ladungen, weil Kraftlinien von ihnen ausgehen. Daher sind die obigen Formeln um so ungenauer, je größer der Abstand a ist. Genaue Werte gibt folgende Formel von Kirchhoff für kreisförmige Platten vom Radius r und der Dicke b

$$C = \frac{r^2}{4a} + \frac{r}{4\pi}\left[\log\text{nat}\,\frac{16\pi(a+b)r}{\varepsilon a^2} + \frac{b}{a}\log\text{nat}\,\frac{a+b}{b}\right];$$

darin ist ε die Basis der natürlichen Logarithmen.

28. Das Dielektrikum.

Alle bisherigen Betrachtungen gingen aus von dem Coulombschen Fernwirkungsgesetz (§ 2), nach welchem zwischen zwei Massen, die in keiner Verbindung miteinander stehen, eine direkte Kraftwirkung besteht. Das entspricht aber nicht den Tatsachen, sondern die Versuche von Faraday haben gezeigt, daß das zwischen den elektrischen oder magnetischen Massen befindliche nichtleitende Medium die Kraft vermittelt. Dieses Zwischenmedium ist jedoch nicht die Luft oder ein anderer mit den Sinnen wahrnehmbarer Stoff, sondern ein uns gänzlich unbekanntes Etwas, das wir Äther nennen; denn auch im äußerst luftverdünnten Raume besteht dasselbe Kraftgesetz, wenn auch mit einem geringen quantitativen Unterschiede. Viel auffallender ist dieser Unterschied, wenn sich die wirkenden Massen statt in einem lufterfüllten Raume in Öl, Paraffin, Schwefel oder irgend einen anderen, die Elektrizität nicht leitenden Stoff befinden. Es besteht wohl immer noch Proportionalität der Kraft mit den wirkenden Massen und dem reziproken Werte des Quadrates der Entfernung, aber um den Wert der Kraft absolut auszudrücken, muß der Ausdruck $\frac{m m'}{r^2}$ mit einem Faktor $\frac{1}{\vartheta}$ multipliziert werden, wobei ϑ immer größer ist als 1 (im Verhältnis zu Luft von gewöhnlichem Atmosphärendruck).

Das Coulombsche Gesetz lautet also in der allgemeinsten Form

$$F = \frac{1}{\vartheta} \frac{m m'}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Dementsprechend ist auch das Potential einer elektrischen Masse m in der Entfernung r

$$U = \frac{1}{\vartheta} \frac{m}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Für den luftleeren Raum ist $\vartheta = 1$. Da aber für alle unsere Versuche die atmosphärische Luft das ursprüngliche Zwischenmedium ist, so setzen wir den Faktor ϑ für diese gleich 1 und beziehen alle anderen isolierenden Stoffe auf Luft. Man nennt ein solches isolierendes Zwischenmedium Dielektrikum und den ihm eigentümlichen konstanten Faktor ϑ die Dielektrizitätskonstante.

Infolge der Änderung der Kraft und des Potentiales in einem Dielektrikum ändern sich nun auch die anderen Größen. Ist E die Potentialdifferenz eines Luftkondensators mit der Ladung Q, und wird nun die Luft durch einen Stoff mit der Dielektrizitätskonstante ϑ ersetzt, während Q konstant bleibt, so geht nach Vor-

stehendem der Potentialwert E über in $\frac{E}{\vartheta}\cdot$ Mithin ist jetzt die Kapazität dieses Kondensators zufolge Gl. 14

$$C = \vartheta \frac{Q}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Die Kapazität ist also um das ϑ-fache größer geworden. Demnach ist z. B. die Kapazität eines Plattenkondensators

$$C = \vartheta \frac{S}{4\pi a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Aus der Gl. 18 ergibt sich sofort folgendes: Wird das Potential eines Kondensators konstant gehalten (z. B. durch Verbindung der Platten mit den Polen einer Batterie), so wächst die von ihm aufgenommene Elektrizitätsmenge auf das ϑ-fache.

Das gilt natürlich auch von der Kapazität eines einzelnen Leiters, wenn er sich in einem Dielektrikum von solcher Ausdehnung befindet, daß seine Wirkung auf Punkte außerhalb des Dielektrikums verschwindend klein ist. Bringt man also eine geladene Kugel in ein Dielektrikum von der Konstanten ϑ, so ist ihre Kapazität nicht mehr r, sondern ϑr. Ist ihre Ladung konstant, so sinkt ihr Potential um das ϑ-fache; oder wenn das Potential konstant gehalten wird (indem sie z. B. mit einem Pol einer Batterie verbunden ist, deren anderer Pol an Erde liegt), so steigt ihre Ladung auf das ϑ-fache.

Da nach § 7 die gesamte Anzahl der Kraftlinien gleich der 4π-fachen Ladung ist, so muß bei konstantem Potential auch die Kraftlinienmenge um das ϑ-fache wachsen. In demselben Verhältnis muß daher auch die Kraftlinienzahl pro Flächeneinheit, das ist die Kraftliniendichte, wachsen. Die Gl. 6 geht also über in

$$\vartheta \mathfrak{H} = 4\pi\sigma.$$

Bezeichnen wir nun die Kraftliniendichte in Luft wie bisher mit $\mathfrak{H}$, und die Kraftliniendichte in einem Dielektrikum mit $\mathfrak{B}$, so ist

$$\mathfrak{B} = \vartheta \mathfrak{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

und

$$\mathfrak{B} = 4\pi\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Die vorletzte Gleichung besagt, daß die Kraftliniendichte um das ϑ-fache wächst, wenn unter sonst gleichen Verhältnissen an Stelle der Luft ein Dielektrikum von der Konstante ϑ tritt. Da $\mathfrak{H}$ nach § 15 das Potentialgefälle und nach § 4 die Feldstärke bedeutet, so folgt, daß in einem Dielektrikum die Kraftliniendichte

nicht mehr gleich dem Potentialgefälle oder der Feldstärke ist, sondern dem ϑ-fachen. Um Mißverständnisse zu vermeiden, ist es am besten, wenn man $\mathfrak{H}$ in einem Dielektrikum nicht als Feldstärke, sondern als elektrisierende Kraft bezeichnet, da sie das Dielektrikum tatsächlich elektrisiert (vergl. § 33), so daß die Gl. 20 lautet: Die Kraftliniendichte ist gleich der ϑ-fachen elektrisierenden Kraft.

Wir haben nun noch zu untersuchen, wie sich die Kraft, mit der sich 2 Kondensatorplatten anziehen, ändert, wenn der Zwischenraum mit einem Dielektrikum ausgefüllt wird. Infolge des Umstandes, daß sich die Kraft zwischen gegebenen elektrischen Ladungen um das ϑ-fache vermindert, geht die Gl. 15 über in

$$F = -\frac{2\pi\sigma^2 S}{\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Führen wir die Gl. 21 ein, so ist

$$F = -\frac{S\mathfrak{B}^2}{8\pi\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Da $\mathfrak{H}$ das Potentialgefälle bedeutet, so ist bei einem Plattenkondensator $\mathfrak{H} = \frac{E}{a}$ und zufolge Gl. 20

$$\mathfrak{B} = \vartheta\frac{E}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23\text{a})$$

Mithin

$$F = -\frac{\vartheta S E^2}{8\pi a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

oder wenn man die Kapazität (Gl. 19) einführt,

$$F = -\frac{CE^2}{2a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Wir sehen aus Gl. 22, daß bei konstanter Flächendichte, also bei konstanter Ladung, die gegenseitige Anziehung der Kondensatorplatten um das ϑ-fache abnimmt, und aus Gl. 24, daß bei konstantem Potential die gegenseitige Anziehung um das ϑ-fache zunimmt, wenn an Stelle der Luft ein anderes Dielektrikum tritt.

Da die Gleichungen dieses Paragraphen für ein beliebiges Dielektrikum gelten, so stellen sie gegenüber den früheren in § 27, die nur für Luft gelten, den allgemeineren Fall dar. Sie gehen für $\vartheta = 1$ in die früheren über.

29. Die Dielektrizitätskonstanten der wichtigsten Stoffe.

Bezogen auf Luft bei gewöhnlichem atmosphärischem Druck.

Stoff	Wert	Stoff	Wert	Stoff	Wert
Paraffin	1,9—2,3	Glas	3—8	Petroleum	2,0—2,2
Hartgummi	2,0—3,2	Porzellan[1]	5,3	Terpentinöl	2,2—2,6
Kautschuk rein	2,2	Marmor	6	Maschinen-	
„ vulkanisiert	2,7	Glimmer	5,5—8	schmieröl	2,2
Kolophonium	2,5	Kunstglimmer[1]		Rizinusöl	4,7—4,9
Schellack	2,7—3,7	(Mikanit)	5—6	Alkohol	5—27
Schwefel[1]	2,4—4,0	Eis (trocken)	3	Wasser(reinstes)	75—90

Luft bei einem Druck von weniger als 1 mm Quecksilbersäule: 0,99.

Die bei manchen Stoffen sehr großen Abweichungen erklären sich aus der verschiedenen Zusammensetzung (Hartgummi, Glas) oder Verunreinigungen (Glimmer, Alkohol). Der hohe Wert für Wasser ist sehr unwahrscheinlich, da es nicht gelingt, unbedingt reines Wasser herzustellen, und die geringste Leitfähigkeit Fehler bei der Messung verursacht.[2])

30. Formeln für verschiedene Kondensatoren.

Nebst der schon aus Gl. 19 bekannten Kapazität eines Plattenkondensators und den in Paragraph 22 angegebenen Kapazitäten einzelner Leiter sind noch folgende Formeln von Wichtigkeit:

Zwei konzentrische Kugelflächen mit den Radien r_2, r_1

$$C = \vartheta \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Zwei konzentrische Kreiszylinder, deren Länge l groß ist gegenüber den Radien r_2 und r_1

$$C = \vartheta \frac{l}{2 \log \operatorname{nat} \frac{r_2}{r_1}}.$$

Zwei parallele Zylinder (Drähte), mit den Radien r_1, r_2, und deren Achsen den Abstand a haben

$$C = \vartheta \frac{l}{2 \log \operatorname{nat} [b + \sqrt{b^2 - 1}]}, \text{ wobei } b = \frac{a^2 - r_1^2 - r_2^2}{2 r_1 r_2}.$$

Sind r_1 und r_2 verschwindend klein gegen a, so ist

$$C = \vartheta \frac{l}{2 \log \operatorname{nat} \frac{a^2}{r_1 r_2}}.$$

[1]) Nach Messungen des Verfassers.

[2]) Eine Zusammenstellung zahlreicher Messungen an zahlreichen Stoffen findet sich in Winkelmann, Handbuch der Physik 4. Bd., 1905.

Ist ferner $r_1 = r_2$, so ist

$$C = \vartheta \frac{l}{4 \log \operatorname{nat} \frac{a}{r}}.$$

Zylinder und Ebene (Drahtleitung in der Höhe h über dem Erdboden)

$$C = \vartheta \frac{l}{2 \log \operatorname{nat} \frac{2h}{r}}.$$

Es ist zu betonen, daß diese Formeln die gesamte Kapazität der betreffenden Anordnung angeben; es ist also nicht etwa die Kapazität des Drahtes für sich nach der in § 22 angegebenen Formel und dann noch dazu nach vorstehender Formel auszurechnen.

Für die in der Elektrotechnik vorkommenden Leiteranordnungen gelten folgende Näherungsformeln.[1])

Zwei Drähte in Luft vom Radius r, im Abstand a und in der Höhe h über dem Erdboden (Abb. 31).

$$C = \frac{l}{2 \log \operatorname{nat} \frac{\left(\frac{2h}{r}\right)^2}{1 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2}}.$$

Liegen die Drähte nicht neben-, sondern übereinander und ist a klein gegen $2h$, so ist die obige Formel für zwei parallele Zylinder ohne Berücksichtigung der Erde zu benutzen.

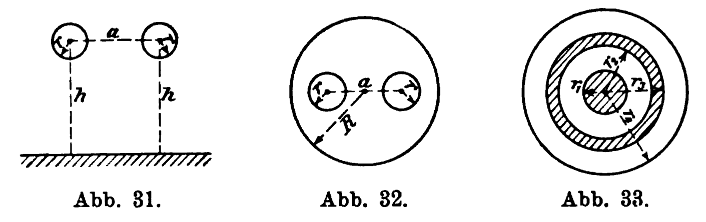


Abb. 31. Abb. 32. Abb. 33.

Kabel bestehend aus 2 Leitern (Abb. 32). Mantel geerdet. ϑ ist die Dielektrizitätskonstante des Isoliermateriales.

$$C = \vartheta \frac{l}{4 \log \operatorname{nat} \left[\frac{a}{r} \cdot \frac{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \right]}.$$

Für die vorstehenden Formeln ist die Ladung Q auf einem der Leiter (nach § 27) $Q = CE$, wobei $E = U_2 - U_1$ die Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den beiden Leitern bedeutet. Ist $U_1 = -U_2 = U$, so ist $U = \frac{E}{2}$, wenn U das Potential des Leiters bezogen auf unendliche Entfernung oder auf Erde (§ 23) bedeutet.

---

[1]) Lichtenstein, ETZ 1904, S. 126.

Beispiel: Zwei Drähte von je 1 m Länge, $r = 1$ mm, $a = 10$ cm. Nach der 5. Formel dieses Paragraphen ist

$$C = \frac{100}{4 \log \text{nat} \frac{10}{0{,}1}} = \frac{25}{\log \text{nat}\, 100} = \frac{25}{4{,}6} = 5{,}4 \text{ absol. Einh.}$$

Werden diese beiden Drähte mit einer Stromquelle verbunden, deren Potentialdifferenz 10 absol.-elektrost. Einh. (= 3000 Volt) ist, so erhält jeder eine Ladung von $Q = CE$, $Q = 5{,}4 \cdot 10 = 54$ absol. Einh. In § 22 haben wir für die Kapazität eines einzelnen gleichen Drahtes gefunden: $C' = 7{,}3$. Wird dieser an den einen Pol derselben Stromquelle angeschlossen, während der andere Pol mit der (genügend weit entfernten) Erde verbunden wird, so ist $U = \frac{E}{2}$. Die Ladung, die dieser Draht erhält, ist $Q' = C'U = 7{,}3 \cdot 5 = 36{,}5$.

Kabel bestehend aus zwei konzentrischen Leitern (Abb. 33). Mantel geerdet. ϑ_i ist die Dielektrizitätskonstante der inneren, ϑ_a die der äußeren Isolierung.

Für den Innenleiter:

$$C_i = \vartheta_i \frac{l}{\log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}} \qquad Q_i = C_i \frac{E}{2}.$$

Für den Außenleiter:

$$C_a = \vartheta_i \frac{l}{\log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}} + \vartheta_a \frac{l}{2 \log \text{nat} \frac{r_4}{r_3}} \qquad Q_a = C_a \frac{E}{2},$$

wobei E wieder die Spannung zwischen den beiden Leitern, $\frac{E}{2}$ also das Potential eines Leiters bedeutet.

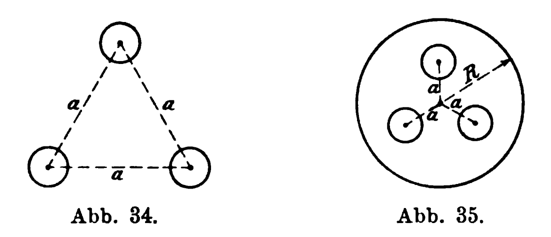


Abb. 34. Abb. 35.

Drei Drähte (Drehstromleitung), die ein gleichseitiges Dreieck bilden (Abb. 34) und deren Abstände a klein sind gegenüber den Abständen von der Erde

$$C = \frac{l}{2 \log \text{nat} \frac{a}{r}} \qquad Q = CE.$$

Drehstromkabel (Abb. 35). Mantel geerdet.

$$C = \vartheta \frac{l}{\log \text{nat} \left[\frac{3a^2}{r^2} \cdot \frac{(R^2 - a^2)^3}{R^6 - a^6} \right]} \qquad Q = CE.$$

In den beiden letzten Fällen bedeutet E die Sternspannung des Drehstromsystemes.

In allen Formeln bedeutet l die Länge **einer** der Leitungen. Alle Größen sind in Zentimeter einzusetzen. Dann erhält man C in absoluten elektrostatischen Einheiten. Um sie in Farad umzuwandeln, sind sie mit $\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ zu multiplizieren (Kap. 17). Drückt man dann E in Volt aus, so erhält man Q in Coulomb.

31. Kondensatoren in Neben- und Hintereinanderschaltung.

Befinden sich mehrere Kondensatoren mit den Kapazitäten C_1, C_2, C_3 in Nebeneinanderschaltung (Abb. 36), so gelten folgende Beziehungen

$$Q_1 = C_1 (U_2 - U_1)$$
$$Q_2 = C_2 (U_2 - U_1)$$
$$Q_3 = C_3 (U_2 - U_1),$$

weil alle drei an dieselben Potentialpunkte U_2 und U_1 angeschlossen sind, so daß auf alle drei dieselbe Potentialdifferenz $U_2 - U_1$ wirkt. Bezeichnet man mit Q die gesamte Elektrizitätsmenge und mit C die gesamte Kapazität, so gilt

$$Q = C (U_2 - U_1).$$

Abb. 36.

Und da die gesamte Elektrizitätsmenge gleich sein muß der Summe der auf allen Kondensatoren sitzenden Ladungen, so ist

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 (U_2 - U_1) + C_2 (U_2 - U_1) + C_3 (U_2 - U_1)$$
$$= C_1 + C_2 + C_3 (U_2 - U_1),$$

also ist

$$C = C_1 + C_2 + C_2,$$

d. h. die gesamte Kapazität mehrerer parallelgeschalteter Kondensatoren ist gleich der Summe aller Kapazitäten.

Befinden sich mehrere Kondensatoren in Hintereinanderschaltung oder Kaskadenschaltung (Abb. 37), so nehmen wir der Einfachheit halber an, daß der letzte an das Potential U_0 der Erde angeschlossen sei, während die zur Ladung nötige Elektrizitätsmenge von dem Potential U_3 zugeführt werde. Nimmt die mit letzterem verbundene Kondensatorplatte die Ladung Q auf, so erhält die andere Platte desselben Kondensators die Ladung $-Q$, während eine Ladung $+Q$ auf die erste

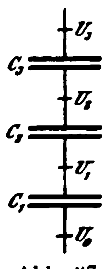


Abb. 37.

Platte des zweiten Kondensators abströmt. Hier spielt sich derselbe Vorgang ab; d. h. es findet sich schließlich auf jedem Kondensator dieselbe Ladung Q vor. Es gelten also für die einzelnen Kondensatoren folgende Beziehungen

$$U_3 - U_2 = \frac{Q}{C_3}$$

$$U_2 - U_1 = \frac{Q}{C_2}$$

$$U_1 - U_0 = \frac{Q}{C_1}.$$

Bedeutet C die Kapazität der hintereinandergeschalteten Kondensatoren als ein Ganzes betrachtet, so gilt

$$U_3 - U_0 = \frac{Q}{C}.$$

Addiert man die vorletzten drei Gleichungen, so ist

$$U_3 - U_0 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt dann

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Für zwei hintereinandergeschaltete Kondensatoren folgt daraus

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

32. Ladungsenergie.

Unter Ladungsenergie eines elektrisch geladenen einfachen Leiters oder Kondensators versteht man jene potentielle Energie, welche seiner Ladung gemäß der in § 25 erläuterten Oberflächenspannung innewohnt. Es ist jene Arbeit, welche aufgewendet werden muß, um die betreffende Ladung vom Unendlichen oder von der Erde aus auf den betreffenden Leiter zu bringen, oder sie auf dem betreffenden Leiter (z. B. durch Influenz) zu erzeugen. Sie entspricht — um ein Beispiel aus der Mechanik heranzuziehen — genau der potentiellen Energie einer gespannten Feder. Diese Arbeit wird frei und setzt sich teils in lebendige Kraft, teils in Wärme um, sobald die Feder losgelassen bzw. der geladene Leiter entladen wird.

Die **Ladungsenergie** ist nicht identisch mit dem **Potential einer Ladung auf sich selbst**, das in § 16 als Energie einer Ladung in bezug auf eine der **Einheit** gleiche Masse von sich selbst definiert wurde, sondern die Ladungsenergie ist die Summe aller Energien, welche zwischen der ganzen Ladung und jedem ihrer einzelnen Teilchen besteht.

Bezeichnet man die ganze auf dem Leiter sitzende Ladung mit Q, und ein unendlich kleines Teilchen derselben mit dQ, und ist U das Potential des Leiters oder Kondensators, auf dem die Ladung sitzt, so ist nach § 12 die unendlich kleine Arbeit dA, welche geleistet werden muß, um dieses Teilchen vom Potential null auf das Potential U zu bringen

$$dA = dQ \cdot U.$$

Aus Gl. 11 folgt durch Differentiation (da C konstant ist)

$$dQ = C \cdot dU.$$

Mithin

$$dA = C \cdot U \cdot dU.$$

Durch Integration erhält man nun die gesamte Ladungsenergie A.

$$A = C \int U \cdot dU = \frac{CU^2}{2} \quad \text{. . . . . (26)}$$

Setzt man Gl. 11 ein, so erhält man zwei weitere Ausdrücke für die Ladungsenergie, nämlich

$$A = \frac{QU}{2} \quad \text{. . . . . (27)}$$

und

$$A = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{. . . . . (28)}$$

Für einen Kondensator, dessen Platten auf den Potentialen U_2 und $-U_1$ sind, ist die gesamte Ladungsenergie gleich der beider Platten, also

$$A = \frac{QU_2}{2} - \frac{QU_1}{2}.$$

Setzt man $U_2 - U_1 = E$, so ist

$$A = \frac{QE}{2} \quad \text{. . . . . (29)}$$

oder

$$A = \frac{CE^2}{2}.$$

33. Die Faradaysche Vorstellung über die Beschaffenheit des Dielektrikums.

Über die Beschaffenheit des Dielektrikums hat sich Clausius eine Vorstellung gebildet, welche genügt, um alle Erscheinungen zu erklären. Demnach hat man sich das Dielektrikum vorzustellen als einen Stoff, in dem sich sehr kleine leitende Teilchen (vielleicht von der Größe eines Moleküles) in großer Zahl eingestreut vorfinden. Wirkt auf einen so beschaffenen Stoff eine elektrische Kraft, indem er z. B. zwischen die Platten eines Kondensators gebracht wird, so findet in jedem Teilchen eine Elektrisierung durch Influenz statt, so daß auf der einen Seite positive, auf der entgegengesetzten negative Pole auftreten (Abb. 38). Man sagt daher auch, das Dielektrikum ist polarisiert. Die elektrische Kraft oder Feldstärke $\mathfrak{H}$ bewirkt also die Elektrisierung des Dielektrikums; man nennt sie daher auch elektrisierende Kraft.

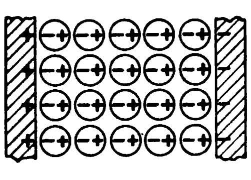


Abb. 38.

Aus der Abb. 38 erklärt sich jetzt auch, warum die Kraftlinien wie elastische Fäden wirken, die sich zu verkürzen streben, und die sich gegenseitig abstoßen (§ 5). Denn die in der Kraftlinienrichtung einander gegenüberliegenden ungleichnamigen Pole der verschiedenen Teilchen ziehen sich gegenseitig an, während senkrecht zur Kraftlinienrichtung gleichnamige Pole nebeneinander liegen, so daß senkrecht zur Kraftlinienrichtung Abstoßung zwischen den einzelnen Teilchen herrscht.

Ferner ersieht man aus dieser Abbildung, daß sich hinsichtlich der Wirkung nach außen alle Pole der leitenden Teilchen im Innern gegenseitig aufheben, da immer zwei ungleichnamige nebeneinander liegen. Dagegen treten auf den an den Kondensatorplatten liegenden Endflächen des Dielektrikums freie elektrische Ladungen auf, und zwar an der positiven Platte eine negative und umgekehrt. Man erkennt hieraus sofort, warum infolge der Anwesenheit des Dielektrikums die Kraft und das Potential nach Gl. 16 und 17 um das ϑfache sinkt, wenn die Ladung konstant ist. Denn durch die auf der linken Endfläche des Dielektrikums auftretende freie negative Ladung wird ein Teil der positiven Ladung der linken Kondensatorplatte neutralisiert; ebenso auf der rechten Seite. Wird hingegen die Potentialdifferenz zwischen den Platten konstant gehalten, indem die semit einer Elektrizitätsquelle von konstanter Spannung verbunden werden, so strömt soviel Elektrizität auf die Platten

nach, als durch die Endflächen des Dielektrikums neutralisiert wurde, so daß die Ladung auf das ϑfache steigt.

Während die auf den Kondensatorplatten sitzenden Ladungen abgeleitet werden können (durch Verbindung mit der Erde), ist dies bei den auf den Endflächen des Dielektrikums sitzenden Ladungen nicht möglich, da sie eben auf einem Nichtleiter sitzen. Da ferner die auf einem Leiter sitzende Ladung Anfang oder Ende von Kraftlinien darstellt, während durch das Dielektrikum die Kraftlinien hindurchgehen, so bezeichnet man die Ladungen auf einem Leiter als wahre oder wirkliche Ladungen, und die auf den Endflächen eines Dielektrikums infolge Polarisation entstehenden als scheinbare. Beim Verschwinden der elektrisierenden Kraft verschwinden diese scheinbaren Ladungen dadurch, daß sich die getrennten Ladungen in jedem Teilchen der Abbildung 38 wieder vereinigen und neutralisieren.

Greifen wir aus dem Dielektrikum einen Würfel von 1 cm Seitenlänge heraus und zwar so, daß zwei gegenüberliegende Flächen parallel zu den Kondensatorplatten sind, so ist die auf diesen Flächen sitzende Ladung, das ist die Flächendichte σ_d, ein Maß für die Elektrisierung des Dielektrikums.[1] Betrachten wir ein zylindrisches Stück des Dielektrikums, dessen Endflächen S sind, so ist

$$\sigma_d = \frac{m_d}{S},$$

wenn m_d die ganze auf einer Endfläche sitzende Ladung bedeutet.

Es entsteht nun die Frage nach der Kraftlinienmenge, die durch dieses zylindrische Stück des Dielektrikums geht. Wäre statt des Dielektrikums Luft vorhanden, so wäre die Kraftlinienmenge gleich $\mathfrak{H}S$, weil $\mathfrak{H}$ die Kraftliniendichte in Luft bedeutet (§ 7). Von der an den Endflächen des Zylinders sitzenden Ladung m_d kommen aber neue Kraftlinien hinzu, deren Anzahl nach § 7 gleich $4\pi m_d$ ist. Die gesamte Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$ ist also

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{H}S + 4\pi m_d.$$

Daraus ergibt sich die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$, wenn man durch die Fläche S dividiert. Es ist also

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{Z}}{S} = \mathfrak{H} + 4\pi\frac{m_d}{S}$$

und nach Einsetzung der obigen Gleichung ist

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\sigma_d \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

[1]) Der Index d bei σ und m bedeutet, daß es sich um die Ladung des Dielektrikums, nicht um die der Platten handelt.

34. Elektrisierungszahl und Dielektrizitätskonstante.

Aus der Faradayschen Vorstellung läßt sich ohne weiteres die durch Messungen bestätigte Folgerung ziehen, daß die Stärke der Elektrisierung eines Dielektrikums, d. h. die an den Endflächen einer Volumseinheit auftretende Ladung σ_d der elektrisierenden Kraft $\mathfrak{H}$ proportional ist, weil eben in jedem Teilchen um so mehr Elektrizität durch Influenz erzeugt wird, je stärker die elektrisierende Kraft ist. Es ist also

$$\sigma_d = \varepsilon \mathfrak{H} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

wobei ε ein Faktor ist, der nach den bisherigen Messungen für denselben Stoff als konstant betrachtet werden kann.[1]) Für verschiedene Stoffe ist er verschieden, was sich nach der Faradayschen Vorstellung erklären läßt, wenn man annimmt, daß die Anzahl der leitenden Teilchen in der Volumseinheit verschieden ist. Man nennt ε die Elektrisierungszahl des betreffenden Stoffes.

Aus der letzten und vorletzten Gleichung folgt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\varepsilon\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(1 + 4\pi\varepsilon).$$

Vergleicht man diese mit der Gl. 20, so erhält man

$$\vartheta = 1 + 4\pi\varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

als Beziehung zwischen der Dielektrizitätskonstante und der Elektrisierungszahl.

35. Innere Energie eines polarisierten Dielektrikums.

In § 33 haben wir gesehen, warum in der Richtung der Kraftlinien ein Zug, und senkrecht zu den Kraftlinien eine Abstoßung wirkt: die in den einzelnen Teilchen induzierten Ladungen wirken derart aufeinander. Das unter dem Einfluß einer elektrischen Kraft stehende Dielektrikum befindet sich also in einem inneren Spannungszustand.[2]) Diesem Spannungszustand muß wie bei einer gespannten Feder eine potentielle Energie entsprechen. Greifen wir einen Einheitswürfel aus dem Dielektrikum heraus, so befindet sich entsprechend Abb. 38 auf seinen zu den Kraftlinien senkrechten Endflächen die Ladung σ_d. Nach Gl. 29 ist dann die Ladungsenergie dieses Einheitswürfels

---

[1]) Das gilt aber nur für homogene Stoffe. Bei Kristallen ist ε je nach der Richtung, in welcher die elektrische Kraft den Kristall durchsetzt, verschieden.

[2]) Dieser Spannungszustand äußert sich in Gestaltsveränderungen fester Isolatoren, die man als Elektrostriktion bezeichnet.

$$A_{einh} = \frac{\sigma_d E}{2},$$

wenn E die Potentialdifferenz zwischen den Endflächen bedeutet. Zufolge Gl. 21 ist dann

$$A_{einh} = \frac{\mathfrak{B} E}{8\pi}$$

oder nach Einführung von Gl. 23a, wobei für einen Einheitswürfel $a = 1$ ist,

$$A_{einh} = \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

oder wenn man statt der Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ die elektrisierende Kraft $\mathfrak{H}$ einführt (Gl. 20)

$$A_{einh} = \vartheta \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Für einen Kondensator mit den Flächen S und dem Abstand a erhält man die ganze innere Energie A, wenn man mit dem Rauminhalt aS multipliziert, also

$$A = \vartheta \frac{aS\mathfrak{H}^2}{8\pi}$$

und weil $\mathfrak{H}$ gleich dem Potentialgefälle $\frac{E}{a}$ ist (§ 15), und $C = \vartheta \frac{S}{4\pi a}$ (§ 28), so folgt

$$A = \frac{CE^2}{2}.$$

Das ist dieselbe Formel, die wir in § 32, ausgehend von der wirklichen Ladung der Kondensatorplatten, erhalten haben. Die beiden müssen gleich sein, ebenso wie beim Spannen einer Feder die Kraft, welche spannt und die Gegenkraft der Feder.

36. Anziehung und Abstoßung eines Nichtleiters in einem elektrischen Felde.

Wir betrachten nun den Fall, daß sich zwei nichtleitende Stoffe mit den Dielektrizitätskonstanten ϑ und ϑ' nebeneinander in einem elektrischen Felde befinden, das von einer positiv geladenen Platte CD (Abb. 39) erzeugt wird. GH sei die Grenzfläche zwischen den beiden Stoffen, von der wir voraussetzen, daß sie senkrecht zu den Kraftlinien verläuft.

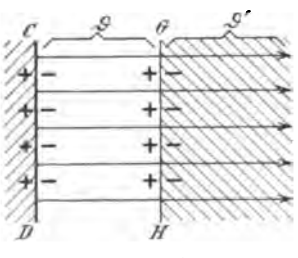


Abb. 39.

Da Kraftlinien in einem Dielektrikum nicht entstehen oder verschwinden können, ist ihre Dichte $\mathfrak{B}$ an allen Stellen dieselbe. Daher ist nach Gl. 20

$$\mathfrak{B} = \vartheta \mathfrak{H} = \vartheta' \mathfrak{H}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

d. h. die elektrischen Kräfte in den beiden Stoffen verhalten sich umgekehrt wie die Dielektrizitätskonstanten. Das steht in Übereinstimmung mit Gl. 16, wonach die in einem Dielektrikum wirkende Kraft umgekehrt proportional der Dielektrizitätskonstante ist. Die Flächendichte der scheinbaren Ladung an der Endfläche des einen Stoffes ist nach Gl. 31

$$\sigma_d = \varepsilon \mathfrak{H}$$

und an der Endfläche des anderen Stoffes

$$\sigma_d' = \varepsilon' \mathfrak{H}'.$$

An der Grenzfläche GH sind diese Ladungen entgegengesetzt. Mithin ist die resultierende Flächendichte an der Grenzfläche

$$\sigma_d' - \sigma_d = \varepsilon' \mathfrak{H}' - \varepsilon \mathfrak{H}.$$

Zufolge Gl. 32 ist

$$\varepsilon' = \frac{\vartheta' - 1}{4\pi} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon = \frac{\vartheta - 1}{4\pi}.$$

Nach Einsetzung dieser Werte und des Wertes für $\mathfrak{H}'$ aus Gl. 35 ergibt sich

$$\sigma'_d - \sigma_d = \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta'}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

oder nach Einsetzung von Gl. 20

$$\sigma'_d - \sigma_d = \frac{\mathfrak{B}}{4\pi}\left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{\vartheta'}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Ist $\vartheta' > \vartheta$, so ist die rechte Seite der Gleichung positiv, und umgekehrt. D. h. in der resultierenden Flächendichte $\sigma'_d - \sigma_d$ überwiegt die Ladung jenes Stoffes, der die größere Dielektrizitätskonstante hat, und zwar ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Ladungen, das ja nur davon abhängt, ob die Platte CD positiv oder negativ geladen ist. Ist in Abb. 39 $\vartheta' > \vartheta$, so überwiegt die Ladung des rechts von GH gelegenen Stoffes und daher ist die resultierende Ladung an der Grenzfläche GH negativ, wird also von der positiven Platte CD angezogen. Ist hingegen $\vartheta' < \vartheta$, so ist die resultierende Ladung der Grenzfläche positiv und wird daher von der positiven Platte CD abgestoßen. Ist der zweite Stoff ein begrenzter Körper, z. B. $GHKL$ (Abb. 40), der in einem homogenen

Felde von dem ersten Stoff allseitig umgeben ist, so überwiegt an der Grenzfläche *KL* die negative Ladung, wird also von *CD* angezogen. Da nun in einem homogenen Felde die Kraft an allen Stellen des Feldes dieselbe ist, heben sich die Anziehung der Fläche *KL* und die Abstoßung der Fläche *GH* gegenseitig auf und der Körper bleibt in Ruhe. Ist aber das Feld nicht homogen (Abb. 41), so ist die Kraft an der Fläche *GH* größer als an der Fläche *KL*, es überwiegt die Abstoßung der Fläche *GH* und daher wird der ganze Körper in der Richtung der divergierenden Kraftlinien abgestoßen. Ist also ein nichtleitender, begrenzter Körper von einem anderen nichtleitenden Stoff umgeben und befinden sich beide in einem homogenen Felde, so bleiben beide in Ruhe; ist aber das Feld **nicht** homogen, so sucht sich der Körper in der Richtung der divergierenden Kraftlinien zu bewegen, wenn seine Dielektrizitätskonstante kleiner ist als die des umgebenden Stoffes, hingegen in der Richtung der konvergierenden Kraftlinien (also in gleicher Weise wie ein leitender Körper), wenn seine Dielektrizitätskonstante größer ist als die des umgebenden Stoffes. Gegenüber den Nichtleitern verhält sich ein Leiter so wie ein Körper, dessen Dielektrizitätskonstante unendlich groß ist.

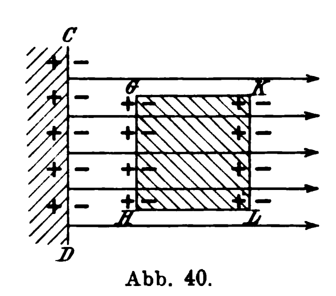


Abb. 40.

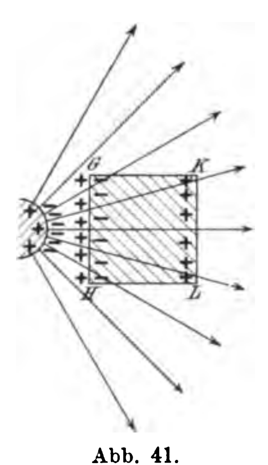


Abb. 41.

37. Brechung der Kraftlinien an der Grenzfläche zweier Nichtleiter.

Wir betrachten nun den Fall, wo die Grenzfläche *GH* zweier nichtleitender Stoffe von den Kraftlinien schief getroffen wird (Abb. 42). *KON* sei eine Kraftlinie, α und α' ihre Einfallswinkel in den beiden Stoffen. Die Größe der elektrisierenden Kraft $\mathfrak{H}$ im linken Stoff sei durch die Strecke *OK*, die der elektrisierenden Kraft $\mathfrak{H}'$ im rechten Stoff durch die Strecke *ON* darge-

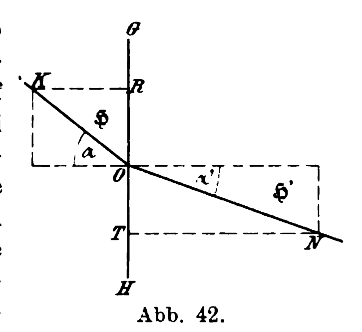


Abb. 42.

stellt. Wir zerlegen beide in ihre Komponenten parallel und senkrecht zur Grenzfläche. Die parallelen Komponenten sind

$$OR = \mathfrak{H} \sin\alpha$$

$$OT = \mathfrak{H}' \sin\alpha'.$$

Da diese nach Voraussetzung parallel zur Grenzfläche sind, also nicht von einem Stoff in den andern übergehen, sondern beide nur in dem einen oder in dem anderen verlaufen, so müssen sie einander gleich sein und sich aufheben, weil zu derselben Kraftlinie in demselben Stoff nicht zwei verschiedene magnetisierende Kräfte, die auf denselben Punkt O wirken, gehören können. Es ist also

$$OR = OT$$

und daher

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

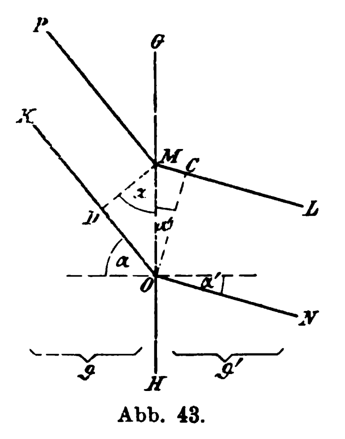


Abb. 43.

d. h. die Sinus der Einfallswinkel zu beiden Seiten der Grenzfläche verhalten sich umgekehrt wie die elektrisierenden Kräfte in den beiden Stoffen.

Wie verhalten sich nun die Kraftliniendichten in den beiden Stoffen. Aus Abb. 43, welche ein durch die Kraftlinien KON und PML begrenztes Kraftlinienbündel darstellt, erkennt man schon, daß die Kraftliniendichte in dem Stoff mit dem kleineren Einfallswinkel (α') kleiner sein muß als in dem anderen, weil der Querschnitt des Kraftlinienbündels größer ist. Zieht man von O und M aus die Senkrechten OC und MD, so ist

$$MD = OM \cdot \cos\alpha$$

$$OC = OM \cdot \cos\alpha'$$

Die Kraftliniendichten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ sind umgekehrt proportional den Strecken MD und OC, da ja bei derselben Anzahl der Kraftlinien ihre Dichte um so größer ist, je kleiner der Querschnitt des Bündels ist. Es ist also

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \frac{OC}{MD}.$$

Mithin

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

d. h. die Kraftliniendichten in den beiden Stoffen verhalten sich umgekehrt wie die Kosinus der Einfallswinkel; die Kraftliniendichte ist also um so größer, je größer der Einfallswinkel ist.

Dividiert man die letzte Gleichung durch Gl. 38, so ist

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} : \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'} = \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} : \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}.$$

Zufolge der Gl. 20 wird daraus

$$\frac{\vartheta}{\vartheta'} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

d. h. die trig. Tangenten der Einfallswinkel verhalten sich wie die Dielektrizitätskonstanten. Das ist das Brechungsgesetz der Kraftlinien. Gehen z. B. die Kraftlinien von einem Stoffe (ϑ) über in

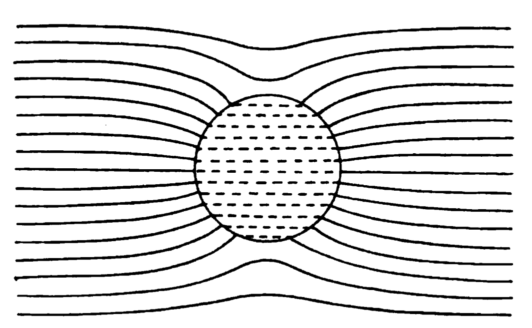


Abb. 44. Kraftlinienverlauf, wenn die Dielektrizitätskonstante der Kugel größer ist als die der Umgebung.

einen Stoff, dessen Dielektrizitätskonstante $\vartheta' = \infty$ ist, so muß nach der letzten Gleichung $\operatorname{tg}\alpha' = \infty$, also $\alpha' = 90^0$ sein, selbst wenn α

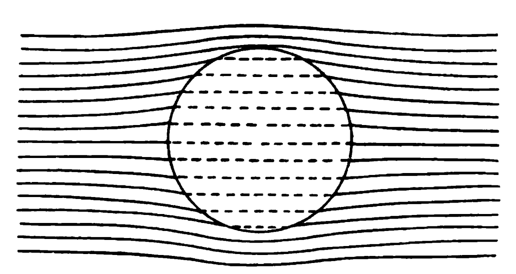


Abb. 45. Kraftlinienverlauf, wenn die Dielektrizitätskonstante der Kugel kleiner ist als die der Umgebung.

nahezu 90^0 ist. Nur wenn $\alpha = 90$ ist, verliert die Formel ihre Bedeutung, denn dann laufen die Kraftlinien parallel zur Trennungsfläche. Leitende Körper kann man als Stoffe betrachten, deren

$\vartheta = \infty$ ist. Dann müssen also alle Kraftlinien von der Oberfläche eines Leitérs senkrecht ausgehen. Dasselbe hat sich in § 16 daraus ergeben, daß die Oberfläche eines Leiters eine Niveaufläche ist.

Aus den Gl. 38, 39 und 40 läßt sich in jedem Fall der Verlauf der Kraftlinien konstruieren, wenn ihre Richtung in einem der nichtleitenden Stoffe gegeben ist. Abb. 44 zeigt den Verlauf, wenn in ein homogenes Feld eine nichtleitende Kugel gebracht wird, deren Dielektrizitätskonstante größer ist als die des umgebenden Stoffes. Man sieht, die Kraftlinien werden von der Kugel an sich gezogen, wie von einem Leiter (vgl. Abb. 23). Abb. 45 zeigt den Verlauf der Kraftlinien, wenn die Dielektrizitätskonstante der Kugel kleiner ist als die des umgebenden Stoffes. Abb. 46 zeigt dasselbe; es ist die photographische Aufnahme[1]) der durch suspendiertes Glyzin-Pulver in Öl sichtbar gemachten Kraftlinien eines elektrischen Feldes, in dem sich ein Hartgummiring befindet. Die Kraftlinien werden von dem Ring abgedrängt, weil seine Dielektrizitätskonstante kleiner ist als die des Öles.



Abb. 46. Hartgummiring in Öl.

38. Rückstandsbildung im Dielektrikum.

Wir haben im Vorstehenden Stoffe vorausgesetzt, die vollkommene Nichtleiter (Isolatoren) sind, d. h. solche, die auch unter den stärksten elektrischen Kräften keine Leitung der Elektrizität, sondern nur Polarisation zulassen. Die Elektrizität, die an den Endflächen eines solchen Stoffes durch die Wirkung der elektrisierenden Kraft entsteht und sich nicht ableiten läßt, wurde als scheinbare Ladung bezeichnet, im Gegensatz zu der Ladung eines Leiters, die sich ableiten läßt, und die wir als wahre oder wirkliche Ladung bezeichnet haben. Die scheinbare Ladung eines Isolaters verschwindet, sobald die elektrisierende Kraft verschwindet. Die Erfahrung lehrt aber, daß dies bei keinem bekannten Stoff vollkommen zutrifft, sondern daß nach längerer Einwirkung der elektrisierenden Kraft immer eine gewisse Ladung zurückbleibt, die

[1]) Von M. Seddig. Siehe die Fußnote auf S. 6.

man als Rückstand bezeichnet. Sie entsteht dadurch, daß eine Trennung und Bewegung der Elektrizität durch Influenz wie bei einem Leiter eintritt. Wegen des großen Leitungswiderstandes im Isolator geschieht dies nur allmählich, und aus demselben Grunde kann die Wiedervereinigung der durch Influenz getrennten Elektrizitäten nur sehr langsam, bei festen Isolatoren zumeist aber gar nicht erfolgen, weil zur Wiedervereinigung keine starke elektrische Kraft antreibt, wie zur Trennung. In der Regel kann der nach einer starken Elektrisierung an der Oberfläche verbleibende Rückstand nur dadurch beseitigt werden, daß man den betreffenden festen Isolator von einer Flamme oder wenigstens den Flammengasen bestreichen läßt (vgl. Kap. 14). Aber auch dadurch wird nur die auf der Oberfläche zurückgebliebene Ladung beseitigt, nicht aber diejenige, die im Innern sitzt. Die geringste Rückstandsbildung zeigen jene Stoffe, die am reinsten erhalten werden können (Paraffin, Quarz, Glimmer). Je größer die Verunreinigung (oder Mischung mit anderen Stoffen), desto größer die Rückstandsbildung.

Bei festen und flüssigen Isolatoren, die mit geladenen Leitern in unmittelbarer Berührung (ohne Luftzwischenschicht) stehen, können Ladungen natürlich auch von diesen auf jene übergehen.

Bei wechselnder Elektrisierung (Kondensator in einem Wechselstromkreis) verursachen die nach jedem Wechsel zurückbleibenden Ladungen Arbeitsverluste, die sich in Wärme umsetzen (vgl. § 178).

Drittes Kapitel.

Grundgesetze der strömenden Elektrizität.

39. Das Zustandekommen eines elektrischen Stromes.

In §§ 15 und 16 sind wir zu dem Ergebnis gekommen, daß bei allen magnetischen und elektrischen Anordnungen das Bestreben vorhanden ist, eine solche Bewegung einzuschlagen, daß dadurch der Potentialwert verkleinert wird. Bei den elektrischen Erscheinungen haben wir zu unterscheiden zwischen Bewegungen der Träger, d. h. jener Körper, auf welchen die elektrischen Massen sitzen (ponderomotorisch), und zwischen Bewegungen der elektrischen Massen selbst auf ihren Trägern (elektromotorisch). Bei den magnetischen Erscheinungen gibt es nur die erste Art von Bewegung.

Wenn also auf einem leitenden Körper zwei Punkte mit verschiedenem Potentiale vorhanden sind, so findet eine Bewegung der Elektrizität vom höheren zum niederen Potentiale so lange statt, bis der Unterschied ausgeglichen ist. Gelingt es durch irgend welche Vorrichtung, einen Potentialunterschied beständig aufrecht zu erhalten, so findet ein beständiges Strömen der Elektrizität statt, und man hat einen elektrischen Strom.

Da wir aus der Mechanik gewohnt sind, die Ursache einer Bewegung Kraft zu nennen, so nennen wir die Ursache eines elektrischen Stromes elektromotorische Kraft E und bezeichnen damit den Potentialunterschied $U_2 - U_1$ zwischen jenen Punkten.[1])

Der Ausdruck Strom ist daraus entstanden, daß eine Ähnlichkeit mit den Erscheinungen bei Flüssigkeiten besteht. Verbindet

[1]) In dieser Gleichstellung der Begriffe Potentialunterschied und elektromotorische Kraft liegt eine unrichtige Ausdrucksweise, die sich leider nicht mehr wird beseitigen lassen. Denn nach § 13 ist Potential und daher auch Potentialunterschied ein Arbeitsbegriff und keine Kraft.

man nämlich die beiden mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefäße *A* und *B* (Abb. 47) durch eine Röhre, so strömt die Flüssigkeit von *A* nach *B* so lange, als das Niveau der Flüssigkeit in *A* höher steht als in *B*. Den analogen Fall für die Elektrizität stellt Abb. 48 dar, wo zwei leitende Kugeln durch einen Draht verbunden sind. Durch diesen strömt so lange Elektrizität, als die eine Kugel höheres Potential hat wie die andere.

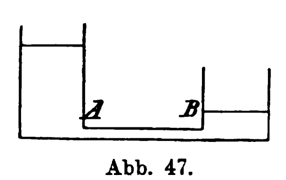


Abb. 47.

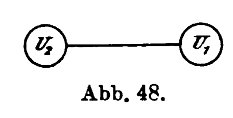


Abb. 48.

40. Stromquellen.

Einen beständigen Potentialunterschied kann man dadurch in einfacher Weise herstellen, daß man ein Metall in eine Flüssigkeit taucht, welche auf dasselbe chemisch einwirkt. Es besitzt dann, solange eine chemische Reaktion stattfindet, die Flüssigkeit einen höheren Potentialwert als das Metall. Verbindet man das Metall *A* (Abb. 49) durch einen Leiter, der selbst nicht von der Flüssigkeit angegriffen wird (Kohle oder Platin), mit dieser, so findet ein Strömen der Elektrizität von der Flüssigkeit durch diesen Leiter zum Metalle statt. Es ist die einfachste Form eines galvanischen Elementes, nämlich das von Smee, wenn als wirksames Metall Zink und als Flüssigkeit verdünnte Schwefelsäure verwendet wird. Man bezeichnet dann die Kohle oder das Platin als den positiven, das Zink als den negativen Pol des Elementes.

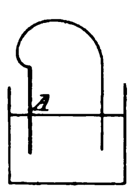


Abb. 49.

Die Vorgänge in der Flüssigkeit selbst zwingen zu der Annahme, daß der Strom auch durch diese und zwar vom Zink zur Kohle geht. Die Elektrizität vollführt also einen Kreislauf; die Strombahn ist eine geschlossene. Das gilt für alle wie immer erzeugten dauernden Ströme, so daß wir zu dem Grundsatz gelangen, es gibt überhaupt keine ungeschlossenen Ströme, und in einer Stromquelle wird bloß die Elektrizität in Bewegung gesetzt, nicht aber erzeugt. Die Potentialdifferenz zwischen Metall und Flüssigkeit besteht natürlich immer, auch wenn der Stromkreis durch keinen äußeren Leiter geschlossen ist.

41. Begriff der Stromstärke.

Die Stärke eines elektrischen Stromes oder kurz Stromstärke, die wir mit J bezeichnen, ist jene Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des betreffenden Leiters fließt.

Um daraus die während einer Zeit t durch den Leiter geflossene Elektrizitätsmenge Q zu erfahren, hat man mit der Zeit zu multiplizieren; es ist also

$$Q = J \cdot t.$$

Man erkennt sofort, daß diese Begriffsbestimmung den Gesetzen der strömenden Flüssigkeiten entnommen ist; sie ist allgemein gültig, ohne Rücksicht darauf, in welchen Maßeinheiten wir diese Größen messen.

42. Das Ohmsche Gesetz.

Allgemein nehmen wir Kraft und Bewegung proportional an. Wir setzen daher auch die Ursache eines elektrischen Stromes, die Potentialdifferenz oder elektromotorische Kraft, proportional der Stromstärke. Lehnen wir uns wieder an das Beispiel aus der Hydrodynamik (§ 39) an, so sieht man ein, daß auch dort die in der Zeiteinheit durch die Röhre strömende Flüssigkeitsmenge proportional ist der Niveaudifferenz in beiden Gefäßen. Man erkennt aber auch, daß an den Wänden der Röhre eine Reibung stattfindet, welche der Strömung einen Widerstand entgegensetzt, und daß die Strömung um so schwächer ist, je größer dieser Widerstand ist.

Ganz analog ist auch die elektrische Stromstärke proportional der Potentialdifferenz $U_1 - U_2$ und verkehrt proportional dem elektrischen Leitungswiderstande W, so daß wir haben

$$J = k \frac{U_2 - U_1}{W}.$$

Dieses Gesetz gewinnt an Einfachheit, wenn man die Maßeinheiten, durch welche die vorkommenden Größen ausgedrückt werden, so wählt, daß der Proportionalitätsfaktor $k = 1$ wird. Dann lautet das Gesetz

$$J = \frac{U_2 - U_1}{W},$$

oder wenn man die Potentialdifferenz (elektromotorische Kraft) mit E bezeichnet,

$$J = \frac{E}{W} \quad \text{oder} \quad E = JW.$$

Dieses Gesetz heißt nach seinem Entdecker das Ohmsche Gesetz. Für den Ausdruck Potentialdifferenz wird in der Elektrotechnik meist der Ausdruck Spannung angewendet.

Die praktischen Einheiten, die der Bedingung $k = 1$ entsprechen, sind für die Stromstärke das Ampere, das ist ein Strom, der aus einer Lösung von Kupfervitriol in einer Minute 19,7 mg Kupfer ausscheidet. Für den Leitungswiderstand ist die Einheit das Ohm. Diesen Widerstand besitzt eine Quecksilbersäule von 106 cm Länge und 1 mm² Querschnitt bei 0° Celsius. Für die elektromotorische Kraft[1]) (Potentialdifferenz) ist die Einheit das Volt. Diese besteht zwischen zwei Punkten eines Leiters, zwischen welchen der Widerstand 1 Ohm beträgt und der von einem Strome von 1 Ampere durchflossen wird. Denn nach der letzten Gleichung ist $E = 1$, wenn J und W gleich 1 sind (vgl. Kap. 18).

43. Leitungswiderstand und Leitungsvermögen.

Der Widerstand eines Leiters ist um so größer, je größer seine Länge und je kleiner sein Querschnitt ist. Man sieht auch dies leicht ein, wenn man an die von einer Flüssigkeit durchströmte Röhre denkt. Man hat also

$$W = \alpha \frac{l}{q},$$

wobei α ein Proportionalitätsfaktor ist, dessen Bedeutung man erkennt, wenn man $l = 1$ und $q = 1$ setzt; dann ist $W = \alpha$, d. h. α ist der Widerstand eines Leiters von der Länge 1 und dem Querschnitt 1. Sind diese Einheiten *cm*, so heißt α der spezifische Leitungswiderstand. Dieser ist natürlich für verschiedene Stoffe verschieden und hängt außerdem auch noch vom physikalischen Zustande und der Temperatur ab.

Für die Praxis ist es bequem, den Wert von α so anzugeben, daß man den Widerstand in Ohm erhält, wenn man die Länge in Metern und den Querschnitt in mm² mißt. Die folgende Tabelle enthält diese Werte von α bei 15° Celsius und den Temperaturkoeffizienten γ (vgl. § 44) für käuflich reine Metalle.

---

[1]) Im folgenden wird „elektromotorische Kraft“ durch EMK abgekürzt bezeichnet.

Den reziproken Wert des Widerstandes $\frac{1}{W}$ nennt man **Leitungsvermögen** oder **Leitungsfähigkeit**. Dementsprechend gibt es auch ein **spezifisches** Leitungsvermögen $\varkappa$, es ist dies der reziproke Wert des spezifischen Widerstandes, also $\varkappa = \frac{1}{a}$. Das elektrische Verhalten eines Stoffes ist durch diese Zahl ebenso gut charakterisiert, wie durch den spezifischen Widerstand.

	Widerstand von 1 m Länge, 1 mm² Querschnitt in Ohm	Temperaturkoeffizient γ
Aluminium	0,029	0,0039
Blei (gepreßt)	0,21	0,0039
Eisen (Draht und Blech) . .	0,12—0,14	0,0048
Gold	0,022	0,0036
Kupfer	0,017—0,018	0,0044
Nickel (geglüht)	0,13	0,0036
Platin	0,094	0,0024
Quecksilber	0,954	0,0088
Silber (weich)	0,016	0,0038
Zink (gepreßt)	0,06	0,0037
Zinn	0,14	0,0037
Messing (Cu, Zn)	0,07—0,085	0,0015
Nickelin (Cu, Ni)	0,35—0,44	0,0002
Neusilber (Cu, Ni, Zn) . . .	0,2—0,4	0,0003
Rheotan (Cu, Ni, Zn) . . .	0,47	0,00023
Konstantan (Cu, Ni)	0,46—0,5	0,00001—0,0003
Manganin (Cu, Mn)	0,4—0,45	— 0,00001
Achenrainer Draht 000 . . .	0,5	— 0,00002

Bei den Legierungen hängt der Widerstand natürlich sehr vom Mischungsverhältnis ab.

Spezifische Widerstände (Würfel von 1 cm) von sehr schlechten Leitern (Isolatoren)[1]) in Ohm:

Zement (trocken)	$5 \cdot 10^3$	Paraffin	10^{18}—10^{23}
Schiefer . . .	1—$100 \cdot 10^5$	Wasser (reinstes) . . .	10^9
Marmor . . .	2—$6 \cdot 10^8$	Alkohol	$2 \cdot 10^{10}$
Holzkohle . .	$2 \cdot 10^{11}$	Olivenöl	10^{12}—10^{15}
Glimmer . . .	$2 \cdot 10^{12}$	Rizinusöl	10^{15}
Glas	10^{12}—10^{18}	Schmieröl	10^{18}
Gummi (rein) .	10^{14}—10^{20}	Petroleum	10^{18}
Hartgummi . .	10^{13}—10^{22}		

[1]) Nach Koller, Ber. d. Wiener Akad., B. 98, 1889. Humann, ETZ 1903 S. 1082. Uppenborn, Kalender 1905.

Mit steigender Temperatur nimmt der Widerstand der Isolatoren stark ab.

Über den Widerstand von Kohle und Selen siehe § 45, über den Widerstand elektrolytischer Leiter § 62.

Nach dieser Tabelle berechnet sich z. B. der Widerstand einer 1000 m langen Kupferleitung von 5 mm² Querschnitt bei 15°:

$$\frac{0{,}0175 \cdot 1000}{5} = 3{,}5 \text{ Ohm.}$$

44. Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur.

Der Widerstand aller Substanzen ändert sich mit der Temperatur, und zwar nimmt bei steigenden Temperatur der Widerstand der Metalle zu, der der Kohle und elektrolytischen Leiter hingegen ab.

Bezeichnet man die Zunahme der Widerstandseinheit bei einer Temperaturerhöhung um 1^0 Celsius mit γ, so ist die Zunahme des Widerstandes W bei einer Temperaturerhöhung um t Grade $Wt\gamma$. Daher ist der Widerstand bei t Graden

$$W_t = W + Wt\gamma = W\,(1 + t\gamma).$$

Berechnet man den Widerstand W nach der Tabelle (S. 64), so ist t von 15^0 an zu zählen. Für Temperaturen unter 15^0 ist dann zu setzen $W_t = W(1 - t\gamma)$. Für Kohle und Flüssigkeiten ist γ bei zunehmenden Temperaturen negativ.

Die vorstehende Formel gilt genau nur für Temperaturen zwischen 0 und 50^0; für höhere Temperaturen näherungsweise. Für Temperaturen über 100^0 ist der Widerstand durch folgende Formel darzustellen, wenn W_0 den Widerstand bei 0^0 bedeutet

$$W_t = W_0(1 + \beta t + \delta t^2).$$

Für die Koeffizienten β und δ gelten folgende Werte

	β	δ
Aluminium	0,00388	0,0000013
Kupfer	0,00364	0,0000006
Platin	0,00245	0,0000006
Silber	0,00397	0,0000007

Ein eigentümliches Verhalten zeigt chemisch reines Eisen. Der Temperaturkoeffizient γ ist unter 100^0 gleich 0,0048, nimmt dann zu und erreicht bei etwa 850^0 den Wert 0,018. Dann fällt er

rasch wieder auf 0,0067. Abb. 50 zeigt die Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur eines chemisch reinen Eisendrahtes, der (in Wasserstoff) bis zur Weißglut durch einen Strom erhitzt wird. Von technischer Bedeutung ist es, daß der Widerstand zwischen 500° und 750° ungefähr proportional der Temperatur zunimmt. Infolgedessen bleibt die Stromstärke in einem solchen Draht über einen gewissen Bereich konstant, trotz zunehmender Spannung. Abb. 51 zeigt dies; die Stromstärke ist zwischen 20 und 35 Volt nahezu konstant. Diese Eigenschaft wird bei den Nernstlampen benützt. Da der Widerstand des Leuchtkörpers

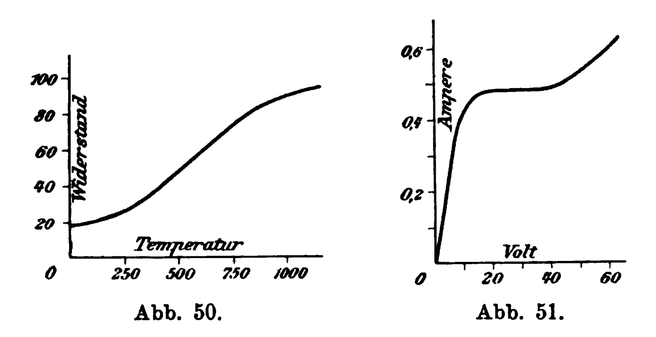


Abb. 50. Abb. 51.

(Magnesiastäbchen) bei Weißglut sehr rasch abnimmt, wird ein solcher Eisendraht in einer mit Wasserstoff gefüllten Glasröhre vorgeschaltet, und dadurch ein Ausgleich bewirkt, wenn die Betriebsspannung über den Sollwert steigt. Mit anderen Worten: während der Temperaturkoeffizient des Glühkörpers bei Weißglut abnimmt, nimmt der des vorgeschalteten Eisendrahtes in der oben angegebenen Weise bis 0,018 zu, d. h. die Stromstärke ist innerhalb dieses Bereiches von der Temperatur unabhängig.

1. Beispiel: Ein dünner Platindraht von 500 Ω Widerstand bei 15° nimmt bei einer Temperaturerhöhung von 1° um $500 \cdot 0{,}0024 = 1{,}2\ \Omega$ zu. Das ist eine Größe, die noch sehr leicht meßbar ist. Man kann daher, wenn man eine solche Widerstandsänderung gemessen hat, daraus die Temperaturänderung berechnen. Man nennt eine solche Vorrichtung Bolometer.

2. Beispiel: Wie groß ist der Temperaturkoeffizient x eines Voltmeters, dessen Kupferdrahtwicklung einen Widerstand von $w_1 = 100$ Ohm und einen Temperaturkoeffizienten von $\gamma_1 = 0{,}004$ hat, dessen Vorschaltwiderstand $w_2 = 500$, $\gamma_2 = 0{,}00001$ ist. Der gesamte Widerstand ist also $W = 600$. Es gilt folgende Gleichung $W(1 + x) = w_1(1 + \gamma_1) + w_2(1 + \gamma_2)$. Daraus

$$x = \frac{w_1(1 + \gamma_1) + w_2(1 + \gamma_2)}{W} - 1 = \frac{100{,}4 + 500{,}005}{600} - 1 = 1{,}0007 - 1 = 0{,}0007.$$

45. Widerstand von Kohle und Selen.

Kohlenstoff zeigt in seinen Modifikationen als Steinkohle, Koks, Retortenkohle, Graphit metallisches Leitungsvermögen. Der spezifische Widerstand (1 m Länge, 1 mm^2 Querschnitt) liegt zwischen 10 und 100 Ohm (Glühlampenfäden etwa 40, Graphit aus Bleistiften bis zu 800). Der Widerstand nimmt im Gegensatz zu den Metallen mit wachsender Temperatur ab. Der Koeffizient γ ist $-0{,}0003$ bis $-0{,}0008$.

Die Modifikationen Diamant und reine Holzkohle gehören zu den Isolatoren.

Der Widerstand des Selens nimmt plötzlich sehr stark ab, wenn es belichtet wird. Wird es wieder abgedunkelt, so nimmt der Widerstand wieder zu, und zwar anfangs schneller, dann langsamer. Den anfänglichen Wert erreicht es oft erst nach stundenlanger Verdunkelung. Der Einfluß des Lichtes von verschiedener Wellenlänge ist verschieden, geht aber weder der chemischen, noch der physiologischen Wirkung proportional, sondern die Wirkung des roten Lichtes ist am stärksten. Amorphes, grobkörniges Selen zeigt die größte Lichtempfindlichkeit. Im Dunkeln ist sein spezifischer Widerstand (ein Zentimeterprisma) $4 \cdot 10^9$ Ohm. Im diffusen Tageslicht vermindert er sich bis auf die Hälfte, im direkten Tageslicht selbst bis auf ein Zehntel.

46. Weitere Bemerkungen zu dem Ohmschen Gesetze.

Wie aus der Begründung in § 42 hervorgeht läßt sich das Ohmsche Gesetz

$$J = \frac{E}{W} \quad \text{oder} \quad E = JW$$

nicht nur auf die EMK der Stromquelle und den ganzen Stromkreis, sondern auch auf jeden beliebigen Teil desselben anwenden. Dann bedeutet E die Potentialdifferenz zwischen den Enden dieses Teiles und W seinen Widerstand. Das Verständnis dessen wird durch folgende Darstellung gefördert. In dem Dreiecke (Abb. 52) sei die Größe der EMK einer Stromquelle durch die eine Kathete und der Widerstand des ganzen Stromkreises W durch die andere Kathete dargestellt. Dann gibt die Neigung der Hypotenuse einen Begriff von der Abnahme des Potentiales längs des Stromkreises. Aus dem Ohmschen Gesetze

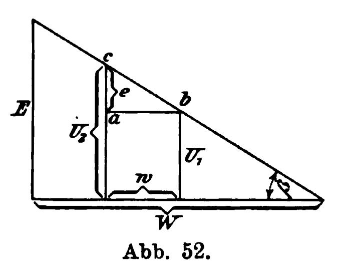


Abb. 52.

$J = \frac{E}{W} = \operatorname{tg} \beta$ folgt, daß die Stromstärke dargestellt ist durch die Tangente des der EMK gegenüberliegenden Winkels.

Greifen wir nun aus dem Stomkreise ein Stück mit dem Widerstande w heraus, so stellen die Linien U_2 und U_1 die Potentialwerte an den Endpunkten dieses Leiterstückes vor. Die Potentialdifferenz für dieses Stück ist $U_2 - U_1 = e$, und das kleine Dreieck abc stellt nun die Stromverhältnisse für dasselbe dar. Wir ersehen daraus, daß die Stromstärke in diesem Leiterstücke dieselbe ist wie im ganzen Stromkreise, da der Winkel β derselbe ist, und es gilt das Ohmsche Gesetz auch für dieses Stück allein:

$$J = \frac{e}{w}.$$

Daß die Stromstärke in allen Teilen des Stromkreises dieselbe sein muß, sieht man leicht ein, wenn man sich erinnert, daß die Stromstärke jene Elektrizitätsmenge ist, die in der Zeiteinheit den Querschnitt des Leiters durchströmt. Es kann nämlich aus einem Leiterstück nicht mehr Elektrizität wegströmen, als von der anderen Seite zuströmt, und ebensowenig kann mehr zu- als wegströmen.

Die Potentialdifferenz e eines Leiterstückes nennt man auch den Potential- oder Spannungsabfall, und dieser ist für ein Leiterstück mit dem Widerstande w nach dem Ohmschen Gesetze $e = Jw$, also gleich dem Produkte aus Stromstärke und Widerstand. Den Spannungsabfall in jenem Teile eines Stromkreises, der nicht nutzbar gemacht werden kann (Zuleitungsdrähte, Fernleitungen), bezeichnet man häufig als Spannungsverlust.

47. Klemmenspannung.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß ein Spannungsabfall auch schon im Innern der Stromquelle stattfindet, da sie einen inneren Widerstand besitzt (bei galvanischen Zellen die Flüssigkeit zwischen den Elektroden, bei Dynamomaschinen die Ankerwicklung). Bezeichnet man diesen inneren Widerstand mit w_i und den des äußeren Schließungskreises mit w_a, so ist der gesamte Widerstand

$$W = w_i + w_a.$$

Nach dem vorigen entfällt daher auf das Innere der Stromquelle ein Spannungsabfall Jw_i, und für den äußeren Stromkreis bleibt eine verfügbare Potentialdifferenz $J \cdot w_a = E'$. Dies ist die Potentialdifferenz zwischen jenen Punkten, wo der äußere Stromkreis an die Stromquelle angeschlossen ist, also zwischen den Pol-

klemmen. Man nennt sie daher **Klemmenspannung** oder auch kurz **Spannung des Stromes**. Die Summe beider gibt die EMK der Stromquelle nach der Gleichung

$$E = JW = J\,(w_i + w_a).$$

Abb. 53 zeigt, wie sich der Abfall der Spannung längs des Stromkreises verteilt. Aus der Definition und der Figur folgt, daß die Klemmenspannung nichts anderes ist als $E' = E - Jw_i$, das ist die Differenz zwischen der EMK und dem Spannungsabfall (Spannungsverlust) im Innern der Stromquelle.

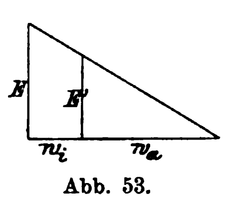


Abb. 53.

Man erkennt ferner, daß bei gegebener EMK E die Klemmenspannung um so größer ist (um so weniger verschieden von E), je größer der äußere Widerstand im Verhältnis zum inneren ist.

Beispiel: Die EMK eines Daniellschen Elementes ist 1,1 Volt. Der innere Widerstand sei $w_i = 0{,}3$, und der Widerstand des äußeren Schließungskreises $w_a = 0{,}7$. Dann ist $W = 1$, und daher die Stromstärke $J = 1{,}1$. Der Spannungsverlust im Innern des Elementes ist dann 0,33 Volt, die Klemmenspannung 0,77 Volt. Ist aber der äußere Widerstand $w_a = 2$, so ist $W = 2{,}3$; daher die Stromstärke $J = 0{,}48$ und der Spannungsverlust im Innern $0{,}48 \cdot 0{,}3 = 0{,}144$ Volt, die Klemmenspannung aber $0{,}48 \cdot 2 = 0{,}96$ Volt.

48. Mehrere elektromotorische Kräfte in einem Stromkreise.

Treten mehrere EMKe: $e_1\ e_2\ e_3$ an verschiedenen Stellen des Stromkreises auf, so addieren sich dieselben, und die gesamte EMK ist $E = e_1 + e_2 + e_3$.

Abb. 54 stellt den Fall dar, wo e_2 und e_3 entgegengesetzte Richtung haben wie e_1. Dann ist also $E = e_1 - e_2 - e_3$. Die Stromstärke ist natürlich auch in diesem Falle an allen Stellen die gleiche:

$$J = \frac{E}{W}.$$

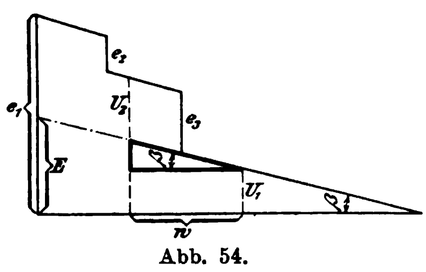


Abb. 54.

Will man das Ohmsche Gesetz auf ein Stück des Stromkreises mit dem Widerstand w anwenden, so muß man darauf achten, ob nicht innerhalb dieses Stückes ein EMK vorhanden ist. Z. B. gilt für das in der Figur abgegrenzte Stück w

$$J = \frac{(U_2 - U_1) - e_3}{w}$$

das ist das stark gezeichnete Dreieck.

49. Ableitung zur Erde.

Für die Stromstärke ist nicht der absolute Potentialwert (bezogen auf die Erde), sondern nur die Potentialdifferenz maßgebend. Wenn man einen Punkt des Stromkreises mit der Erde verbindet, so besitzt er ebenso wie die Erde den Potentialwert Null. Nichtsdestoweniger muß die Potenzialdifferenz oder EMK der Stromquelle dieselbe bleiben, da ja an dieser nichts geändert wurde. Abb. 55 zeigt die graphische Darstellung dieses Falles, wobei C der zur Erde abgeleitete Punkt des Stromkreises AB ist. Die EMK ist

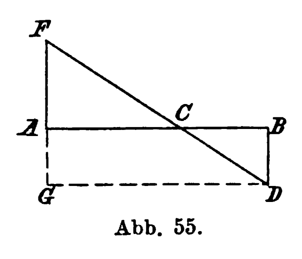


Abb. 55.

$$AF - (-BD) = FG.$$

Werden zwei Punkte zur Erde abgeleitet, so ist die Potentialdifferenz zwischen beiden Null, und daher gibt es auch keinen Strom zwischen beiden. Abb. 56 stellt diesen Fall dar. Es ist dann so, als würden diese beiden Punkte C und C' in einen zusammenfallen.

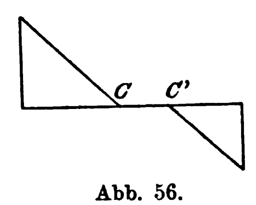
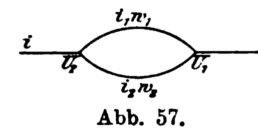


Abb. 56.

50. Die Kirchhoffschen Sätze über Stromverzweigung.

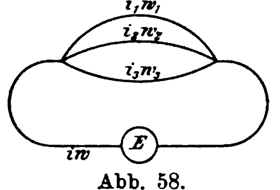
Teilt sich ein Strom i in zwei Zweige i_1 und i_2 mit den Widerständen w_1 und w_2 (Abb. 57), so gilt zunächst

$$i = i_1 + i_2$$


Abb. 57.

da die einem Verzweigungspunkte zuströmende Elektrizitätsmenge gleich sein muß der abströmenden. Schreibt man diese Gleichung in der Form $i - i_1 - i_2 = 0$, so gilt der Satz, daß die algebraische Summe aller Stromstärken an einem Verzweigungspunkte Null ist. Das ist der erste Kirchhoffsche Satz. Hat man also z. B. drei Verzweigungen (Abb. 58), so gilt

$$i - i_1 - i_2 - i_3 = 0.$$


Abb. 58.

Der zweite Kirchhoffsche Satz folgt aus dem Grundsatze, daß die gesamte Potentialdifferenz oder die gesamte EMK in einem geschlossenen Kreise gleich ist

der Summe der einzelnen Potentialdifferenzen. Enthält der Zweig i (Abb. 58) die EMK E und den Widerstand w, so gilt für den geschlossenen Kreis, der von i und i_1 gebildet wird,

$$E = i w + i_1 w_1;$$

ebenso gilt

$$E = i w + i_2 w_2,$$

$$E = i w + i_3 w_3.$$

Der geschlossene Kreis, der von i_1 und i_2 gebildet wird, enthält keine EMK; daher ist

$$0 = i_1 w_1 - i_2 w_2;$$

ebenso ist

$$0 = i_2 w_2 - i_3 w_3,$$

$$0 = i_1 w_1 - i_3 w_3.$$

Diese drei Gleichungen folgen auch aus den vorhergehenden.

Hätte der Zweig i_1 auch eine EMK, etwa E_1, so würde die erste Gleichung lauten

$$E + E_1 = i w + i_1 w_1,$$

und die erste der zweiten Gruppe

$$E_1 = i_1 w_1 + i_2 w_2.$$

Da man bei zwei oder mehreren EMKen nicht mehr übersehen kann, wie die Stromrichtung in den einzelnen Zweigen ist, so setzt man alle Glieder mit positiven Zeichen ein. Bei der Ausrechnung ergeben sich die Ströme mit ihrem richtigen Vorzeichen.

Wir gewinnen daraus den allgemeinen Satz: In jedem geschlossenen Kreise ist die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich der Summe der Produkte aus Stromstärke und zugehörigem Widerstand. Dabei müssen die in gleichem Sinne wirkenden EMKe mit demselben Vorzeichen, entgegengesetzte mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen werden.

Aus diesen beiden von Kirchhoff aufgestellten Sätzen gewinnen wir genug Gleichungen, um aus den gegebenen EMKen und Widerständen die Stromstärken aller Zweige berechnen zu können.

Für den Fall zweier Zweige (Abb. 57) z. B. haben wir

$$i - i_1 - i_2 = 0$$

und

$$E = i w + i_1 w_1,$$

$$0 = i_1 w_1 - i_2 w_2.$$

Sind E, w, w_1, w_2 bekannt so erhalten wir daraus i, i_1, i_2.

Um i_1 und i_2 durch i auszudrücken, genügt schon die erste und dritte Gleichung.

Die dritte Gleichung können wir auch in die Form bringen:

$$i_1 : i_2 = w_2 : w_1$$

oder

$$i_1 : i_2 = \frac{1}{w_1} : \frac{1}{w_2},$$

d. h. die beiden Zweigströme verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände. Die letzte Form können wir auf beliebig viele Zweige anwenden, z. B.:

$$i_1 : i_2 : i_3 = \frac{1}{w_1} : \frac{1}{w_2} : \frac{1}{w_3}.$$

51. Hintereinander- und Nebeneinanderschaltung.

Mehrere Widerstände oder Apparate, die in einem einfachen Stromkreise aufeinander folgen, nennt man hintereinander oder in Reihe geschaltet. Teilt sich hingegen der Strom in zwei oder mehrere Zweige (§ 50), so nennt man dies eine Nebeneinander- oder Parallelschaltung. Dabei entsteht nun die Frage, wie groß ist der gesamte Widerstand W aller Zweige zusammen, d. h. wie groß muß der Widerstand W eines einzigen Drahtes sein, wenn derselbe die ganze Verzweigung ersetzen soll? Sind U_2 und U_1 (Abb. 57) die Potentiale an den Verzweigungspunkten, so ist nach dem Ohmschen Gesetze

$$i = \frac{U_2 - U_1}{W},$$

ferner

$$i_1 = \frac{U_2 - U_1}{w_1} \qquad i_2 = \frac{U_2 - U_1}{w_2}$$

und nach dem vorigen

$$i = i_1 + i_2.$$

Daraus folgt

$$i_1 + i_2 = (U_2 - U_1)\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right) = i.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten, so findet man

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2},$$

Man sieht sofort, daß diese Gleichung für beliebig viele Zweige erweitert werden kann:

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \cdots\cdots$$

Nun sind nach § 43 die reziproken Werte der Widerstände nichts anderes, als die betreffenden Leitungsfähigkeiten, so daß man den Satz gewinnt: Das gesamte Leitungsvermögen einer Stromverzweigung ist gleich der Summe der Leitungsvermögen der einzelnen Zweige.

Für den Fall zweier Zweige erhält man aus der obigen Gleichung

$$W = \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}.$$

Ist $w_1 = w_2$, so ist $W = \frac{w_1}{2}$.

Ist der Verzweigung ein Widerstand w vorgeschaltet, so ist der gesamte Widerstand

$$W = w + \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2}.$$

52. Arbeit und Leistung eines Stromes.

Nach § 12 ist das Potential an irgend einer Stelle jene Arbeit, welche geleistet wird, wenn sich die Elektrizitätsmenge 1 von dieser Stelle bis in unendliche Entfernung bewegt. Bewegt sich diese Masse 1 von einem Punkte mit dem Potentiale U_2 zu einem anderen, U_1, so ist die geleistete Arbeit $U_2 - U_1$. Haben wir eine Elektrizitätsmenge Q, so ist die Arbeit $(U_2 - U_1)\,Q$. Sind U_2 und U_1 die Enden eines Leiterstückes und schreiben wir, wie schon früher, E für $U_2 - U_1$ so ist die Stromarbeit

$$A = EQ.$$

Nun ist $Q = Jt$, wenn t die Zeit ist, während welcher der Strom J die Elektrizitätsmenge geliefert hat.

Daher

$$A = EJt.$$

Setzen wir dafür das Ohmsche Gesetz ein, so ist

$$A = J^2 Wt.$$

Daraus folgt für die Leistung P, d. i. die Arbeit in einer Zeiteinheit (Sekunde)

$$P = EJ = J^2 W.$$

Die Gesetze gelten, ebenso wie das Ohmsche, sowohl für einen ganzen Stromkreis, als auch für ein beliebiges Stück desselben. Im ersten Falle bedeutet E die EMK und W den gesamten Widerstand,

im zweiten ist E der Potentialunterschied zwischen den Enden des betreffenden Leiterstückes und W sein Widerstand.

Sind E, J, W in den praktischen Einheiten: Volt, Ampere, Ohm ausgedrückt, so erhält man die Leistung in Watt (vgl. Kap. 17).

53. Stromwärme. Joulesches Gesetz.

Diese elektrische Arbeit äußert sich in verschiedenen Formen, und zwar als chemische Arbeit bei den elektrolytischen Prozessen, als mechanische Arbeit in den elektrischen Motoren, und endlich als Wärme in jedem Leiter.

Die Gleichungen des vorigen Paragraphen geben die Arbeit in mechanischen Einheiten an; um sie in Wärmeeinheiten (Kalorien) zu erhalten, müssen wir mit einem Proportionalitätsfaktor multiplizieren. Nennen wir die in einem Leiter entwickelte Wärmemenge $\mathfrak{Q}$, so ist

$$\mathfrak{Q} = \alpha E J t = \alpha J^2 W t.$$

Will man die Wärmemenge in Gramm-Kalorien erhalten und wird E in Volt, J in Ampere, W in Ohm und t in Sekunden ausgedrückt, so ist

$$\alpha = 0{,}24.$$

Dieses Gesetz hat Joule auf experimentellem Wege gefunden, und es wird daher nach ihm benannt.

Beispiel. Eine 16kerzige Glühlampe braucht bei 100 Volt Spannung etwa 0,5 Ampere Strom. Sie verbraucht daher eine elektrische Leistung von 50 Watt und entwickelt eine Wärmemenge in 1 Sekunde von $0{,}24 \times 50 = 12$ g Kal.

54. Das Gesetz der kleinsten Stromwärme.

Teilt sich ein Strom i in zwei Zweige i_1 und i_2 (Abb. 57), so ist die in Wärme umgesetzte Arbeit in den beiden Zweigen $i_1^2 w_1 t$ und $i_2^2 w_2 t$. Die gesamte Arbeit in beiden Zweigen ist also

$$A = (i_1^2 w_1 + i_2^2 w) t.$$

Es entsteht die Frage, bei welcher Stromverteilung die Arbeit am kleinsten ist. Man findet das Minimum, wenn man das Differential gleich null setzt; also

$$dA = (2 i_1 di_1 w_1 + 2 i_2 di_2 w_2) t = 0.$$

Aus dem ersten Kirchhoffschen Gesetz $i = i_1 + i_2$ ergibt sich durch Differentiation (weil i konstant ist)

$$di = di_1 + di_2 = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$i_1 : i_2 = w_2 : w_1,$$

d. h. die Bedingung für die kleinste Stromwärme führt zum zweiten Kirchhoffschen Gesetz. Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt dies auch für beliebig viele Zweige. D. h. also die Verzweigung eines gleichgerichteten konstanten Stromes erfolgt so, daß die gesamte Stromwärme ein Minimum ist.

Dieses Gesetz gilt natürlich auch für die Verteilung eines Gleichstromes in einem Leiterstück von beliebiger Gestalt. Jeden Strom kann man sich in unendlich viele nebeneinander geschaltete Stromfäden oder Stromlinien zerlegt denken. In einem linearen Leiterstück von gleichmäßigem Querschnitt sind sie alle parallel zu seiner Achse; nur unter dieser Voraussetzung gilt das Gesetz in § 43 über den Widerstand eines Leiters. In einem Leiterstück von ungleichmäßigem Querschnitt sind die Stromfäden nicht mehr parallel zueinander, sondern sie verteilen sich so, daß der gesamte Widerstand ein Minimum ist, denn nur dann ist bei gegebener Stromstärke die Stromwärme ein Minimum.

Viertes Kapitel.

Die elektrolytischen Vorgänge.

55. Einteilung der Stoffe in bezug auf die Leitung der Elektrizität.

Alle Stoffe lassen sich hinsichtlich ihres Verhaltens gegenüber der Elektrizität in drei Gruppen einreihen, und zwar

I. in solche, welche die Elektrizität nicht leiten, sondern die Wirkung in die Ferne vermitteln (§ 28); das sind alle isolierenden Stoffe. Sie sind charakterisiert durch die Dielektrizitätskonstante,

II. in solche, welche den elektrischen Strom leiten, ohne von ihm verändert zu werden. Das sind alle Metalle, weshalb man diese Art der Leitung metallische Leitung nennt. Sie sind charakterisiert durch den spezifischen Widerstand oder durch das spezifische Leitungsvermögen (§ 43),

III. in solche, welche den elektrischen Strom leiten und gleichzeitig chemische Veränderungen erleiden. Hierher gehören alle Säuren, Salze und Basen (gelöst oder geschmolzen). Sie heißen Elektrolyte, und die Art der Leitung elektrolytische Leitung. Ihr spezifischer Widerstand hängt ab von der Art des chemischen Prozesses, der eintritt, wenn ein elektrisches Feld auf sie einwirkt.

Im folgenden werden wir uns mit den elektrolytischen Leitern und den Vorgängen in ihnen näher beschäftigen.

56. Die Elektrolyse und ihre Benennungen.

Taucht man zwei Kohlenstäbe in eine Lösung von Chlorsilber AgCl und verbindet sie mit den Polen einer Stromquelle, so scheidet sich an dem einen Kohlenstabe Silber, an dem anderen Chlor aus. Macht man den Versuch mit anderen Salzen oder Säuren oder Basen (gelöst oder geschmolzen), so findet man folgendes Gesetz: Der Wasserstoff und die Metalle oder metallischen Radikale wandern immer in der Richtung des (positiven) Stromes, werden also an jener Elektrode ausgeschieden, die mit dem negativen Pole der Stromquelle verbunden ist, der übrige nichtmetallische Rest wandert immer entgegen dem Strome, wird also an jener Elektrode ausgeschieden, die mit dem positiven Pole verbunden ist.

Faraday, der diese Wirkungen des Stromes zuerst untersuchte, hat folgende Benennungen eingeführt: Jene Elektrode, bei welcher der Strom in die Flüssigkeit eintritt (also die mit dem positiven Pole verbundene), heißt Anode, jene, bei welcher er die Flüssigkeit verläßt (also die mit dem negativen Pole verbundene), heißt Kathode; der zu zersetzende Stoff heißt Elektrolyt, die Bestandteile, in die er zerlegt wird, heißen Jonen, und zwar der an der Anode auftretende Anion (Nichtmetalle), der an der Kathode auftretende Kation (Metalle und Wasserstoff). Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Elektroden nennt man Elektrodenspannung oder Klemmenspannung.

57. Sekundäre Prozesse.

Würde man bei der im vorigen beschriebenen Zersetzung von Chlorsilber Elektroden aus Metall statt aus Kohle verwenden, so würde wohl an der Kathode das Silber in gleicher Weise ausgeschieden, das Chlor aber würde mit dem Metalle der Anode eine Chlorverbindung eingehen. Dieser zweite Vorgang, der nicht unmittelbar durch den Strom bewirkt wird, sondern durch die starke chemische Verwandtschaft des Chlors zu den Metallen, heißt darum sekundärer Prozeß.

Ein anderes Beispiel eines sekundären Prozesses, wo auch das Lösungsmittel mitwirkt und die unmittelbaren Zersetzungsprodukte (Jonen) gar nicht auftreten, bietet eine Kochsalzlösung in Wasser ($NaCl + H_2O$) zwischen Metallelektroden. Der Strom zerlegt das Kochsalz, und das frei werdende Natrium geht mit dem Wasser sofort eine Verbindung zu Natriumhydroxid ein nach der Formel $Na + H_2O = NaHO + H$, so daß an der Kathode Natriumhydroxyd

und Wasserstoff frei werden. Das Chlor verbindet sich mit dem Metalle der Anode zu dem betreffenden Metallchlorid.

Ein weiteres Beispiel möge die Zersetzung einer Kupfervitriol-Lösung ($CuSO_4 + H_2O$) bilden, und zwar einmal zwischen Platinelektroden und ein zweites Mal zwischen Kupferelektroden.

Abb. 59 stellt den ersten Fall dar.

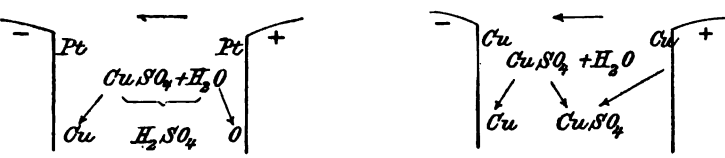


Abb. 59. Elektrolyse von Kupfervitriollösung zwischen Platinelektroden.

Abb. 60. Elektrolyse von Kupfervitriollösung zwischen Kupferelektroden.

Das Kupfer scheidet sich wie gewöhnlich an der Kathode aus; das Radikal SO_4 zerstört ein Wassermolekül und bildet Schwefelsäure, während der Sauerstoff des Wassers an der Anode frei wird. Bestehen hingegen die Elektroden aus Kupfer (Abb. 60), so verbindet sich das Radikal SO_4 mit dem Kupfer der Anode wieder zu Kupfervitriol, das sofort in Lösung geht, und das Wasser bleibt unbehelligt. Der Grund dafür liegt darin, daß die chemische Verwandtschaft des Radikales SO_4 zu Kupfer größer ist, als zu Wasserstoff. Das Resultat dieses ganzen Vorganges ist ein Verschwinden des Kupfers von der Anode in demselben Maße, als es an der Kathode abgeschieden wird. Es hat den Anschein, als würde das Kupfer durch den Strom von der Anode zur Kathode übergeführt. Der Vorgang bleibt derselbe, wenn als Kathode statt des Kupfers irgend ein anderes Metall, das mit dem Elektrolyten selbst keine chemische Reaktion gibt, also z. B. Eisen, Messing, Nickel oder auch Kohle verwendet wird. Diese erhalten so einen Überzug aus Kupfer, den man als galvanischen Niederschlag bezeichnet. Durch ähnliche Vorgänge lassen sich galvanische Niederschläge von Nickel, Silber, Kupfer, Eisen usw. erzeugen. Der in Abb. 60 dargestellte Vorgang findet ferner zur Reinigung des Kupfers Anwendung. Das unreine Kupfer wird als Anode eingehängt, an der Kathode wird reines Kupfer ausgeschieden. Das in der Elektrotechnik zu Leitungsdrähten verarbeitete Kupfer wird auf diese Weise gereinigt (raffiniert). Gold z. B. wird dadurch gewonnen, daß es zunächst in Cyankali gelöst wird, indem das goldhaltige Erz mit diesem vermischt wird. Aus der Lösung wird das Gold dann elektrolytisch ausgeschieden.

Bei Ammoniaksalzen, z. B. Salmiak (NH_4Cl), scheidet sich das metallische Radikal NH_4 an der Kathode aus und zerfällt sogleich

in H und NH_3 (Ammoniak). Das an der Anode frei werdende Chlor zersetzt hier die Salmiaklösung und bildet den explosiven Chlorstickstoff.

Da das Kation immer den metallischen (und Wasserstoff-)Bestandteil enthält, das Anion immer den Sauerstoff- oder Chlor-Bestandteil enthält, kann man sagen, daß bei der Elektrolyse an der Kathode Reduktion, an der Anode Oxydation eintritt.

58. Wasserzersetzung.

Die Zersetzung des Wassers beruht ebenfalls auf einem sekundären Prozesse. Absolut reines Wasser scheint ein Isolator zu sein. Gewißheit besteht darüber nicht, weil das im chemischen Sinne reine Wasser noch lange nicht absolut rein ist. Das ergibt sich daraus, daß destillierte Wässer verschiedener Herkunft, bei denen auf chemischem Wege keine Spur eines fremden Bestandteiles mehr nachgewiesen werden kann, sehr verschiedenen elektrischen Widerstand zeigen. Man weiß nur, daß der Widerstand um so höher ist, je reiner das Wasser ist. Das, was man gewöhnlich als Elektrolyse des Wassers bezeichnet, ist in Wirklichkeit eine Zersetzung der darin gelösten Salze oder Säuren.

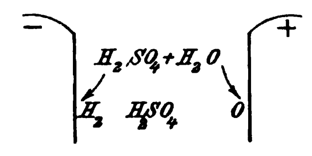


Abb. 61.
Elektrolyse verdünnter Schwefelsäure.

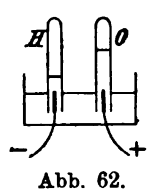


Abb. 62.
Zersetzungsapparat.

Abb. 61 erläutert den Vorgang, wenn eine Mischung von Wasser und Schwefelsäure zwischen Platinelektroden elektrisiert wird. In Wirklichkeit wird die Schwefelsäure zersetzt. Das Resultat aber ist so, als wäre das Wasser zerlegt worden in seine Bestandteile: Wasserstoff und Sauerstoff. Fängt man die beiden Gase gemischt auf, so erhält man das Knallgas. Man kann aber auch jedes für sich auffangen, wenn man über jede Elektrode eine mit Wasser gefüllte Glasröhre stülpt (Abb. 62). H und O sind dann schon äußerlich zu unterscheiden, da dem Volumen nach doppelt soviel Wasserstoff entwickelt wird als Sauerstoff (2 Atome Wasserstoff gegen 1 Atom Sauerstoff). Nach diesem Beispiele geht auch die Zersetzung des gewöhnlichen Wassers vor sich. Dasselbe enthält immer Salze und Säuren gelöst, und diese werden vom Strome

zersetzt, während die Ausscheidung von Wasserstoff und Sauerstoff durch sekundäre Vorgänge erfolgt.

Manchmal treten aber auch noch kompliziertere sekundäre Vorgänge auf, indem sich Ozon (O_3), Wasserstoffsuperoxyd (H_2O_2) und andere Schwefelverbindungen wie z. B. S_2O_7 bilden.

59. Faradays Gesetze der Elektrolyse.

1. Die Gewichtsmassen G der von einem Strome ausgeschiedenen Ionen sind der Stromstärke und der Zeit proportional; also

$$G = bJt,$$

oder wenn Q die während der Zeit t vom Strome J gelieferte Elektrizitätsmenge bedeutet,

$$G = bQ.$$

Sind J und t gleich eins, so sieht man, daß b die vom Strome 1 während der Zeit 1 ausgeschiedene Masse ist; man nennt es das elektrochemische Äquivalent. Es beträgt z. B. für Wasserstoff, bezogen auf Ampere und Sekunde (Coulomb), 0,0000104 g.

Das zweite Faradaysche Gesetz bezieht sich auf das Verhältnis der ausgeschiedenen Ionen untereinander und lautet:

2. Gleiche Stromstärken lösen in gleichen Zeiten gleiche chemische Valenzen aus. Dies wird durch folgenden Versuch erläutert: Man schickt einen Strom durch drei hintereinander geschaltete Zersetzungszellen (Abb. 63), welche verdünnte Schwefelsäure, Kupfervitriollösung und verdünnte Salzsäure enthalten, dann werden gleichzeitig in der ersten Zelle 2 Atome H und 1 Atom O (zweiwertig), in der zweiten Zelle 1 Atom Cu (zweiwertig), in der dritten Zelle 2 Atome H und 2 Atome Cl ausgeschieden; überall also werden zwei Valenzen gleichzeitig gelöst. Fängt man die Gase in darüber gestülpten Glasröhren auf, so erkennt man diese Verhältnisse an dem Volumen, da doppelt soviel H und Cl ausgeschieden wird als O. Vergleicht man die Gewichte, so erhält man gleichzeitig 1 g H und 8 g O, weil das Atomgewicht des Wasserstoffes 1 und des Sauerstoffes 16 ist, von ersterem aber doppelt soviel Atome ausgeschieden werden. In der zweiten Zelle werden gleichzeitig 31,6 g Cu ausgeschieden, da Cu das Atom-

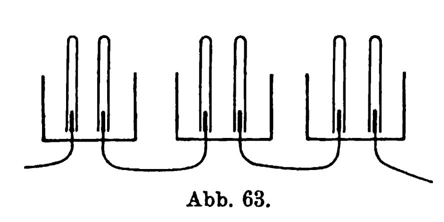


Abb. 63.

gewicht 63,2 hat und zweiwertig ist. Oder mit anderen Worten: während von einem Strome 0,0000104 g H ausgeschieden werden, werden von demselben Strome 0,0000104 · 8 g O und 0,0000104 · 31,6 g Cu ausgeschieden. Daraus folgt allgemein für das elektrochemische Äquivalent eines Elementes

$$b = 0{,}0000104 \frac{a}{y},$$

wobei a das Atomgewicht und y die Wertigkeit (Valenz) des betreffenden Elementes bedeuten.

Setzt man dies in das erste Gesetz ein, so erhält man als Vereinigung beider für das Gewicht eines von J Ampere während t Sekunden ausgeschiedenen Elementes

$$G = 0{,}0000104 \frac{a}{y} Jt.$$

Die folgende Tabelle enthält das elektrochemische Äquivalent einiger Stoffe, bezogen auf Gramm und Ampere-Sekunde (Coulomb).

	Atomgewicht a	Wertigkeit y	Elekt. Äquiv. b	Chem. (Verbindungs-) Äquivalent
Wasserstoff	1	1	0,0000104	1
Sauerstoff	16	2	0,0000832	8
Chlor	35,4	1	0,000367	35,4
Schwefel	32	2	0,000166	16
Zink	65	2	0,000338	32,5
Silber	107,7	1	0,00112	107,7
Kupfer (Oxydul) . . .	63,2	1	0,000656	63,2
„ (Oxyd) . . .	63,2	2	0,000328	31,6

Häufig scheinen die Faradayschen Gesetze nicht erfüllt zu sein. Das ist aber immer nur auf Störungen zurückzuführen, indem z. B. bereits abgeschiedene Teile von der Elektrode wieder abfallen, oder indem Gase von der Flüssigkeit absorbiert werden. Das letztere tritt fast immer, auch bei der Wasserzersetzung, ein.

60. Theorie der elektrolytischen Leitung.

Da jede Molekel eines elektrolytischen Stoffes bei der Elektrolyse in zwei Teile, und zwar nur in zwei Teile — Kation und Anion — gespalten wird, von denen sich das Kation in der Richtung des Stromes, also in der Richtung der positiven Elektrizität, das Anion aber in entgegengesetzter Richtung bewegt, so denkt man sich das Kation mit einer gewissen positiven, und das

Anion mit einer gleich großen negativen Elektrizitätsmenge (Elementarquantum) geladen.[1]) Die Summe aller Ladungen eines Elektrolyten ist also null.

Nach der älteren Hypothese dachte man sich jede Molekel als eine feste Verbindung des betreffenden Kations und Anions, die erst durch den elektrischen Strom gelöst wird. Da aber zur Auflösung einer Verbindung eine gewisse Arbeit erforderlich ist, so würde daraus folgen, daß eine Zersetzung erst bei einer gewissen Stromstärke auftreten kann, und das würde dem Faradayschen Gesetze widersprechen, nach welchen die zersetzten Mengen der Stromstärke proportional sind. Dagegen läßt sich dieses Gesetz aus der neueren Dissoziations-Hypothese über die Beschaffenheit der Lösungen (Clausius, Hittorf, Arrhenius) erklären, nach welcher in jeder Lösung ein Teil der Molekeln in Kation und Anion getrennt (dissoziiert) ist, und der übrige Teil aus geschlossenen Molekeln besteht. Und zwar sind es nicht bestimmte Molekeln, die geschlossen oder getrennt sind, sondern es findet fortwährend ein Zerfall geschlossener Molekeln und eine Wiedervereinigung der Teile mit solchen anderer Molekeln zu neuen Molekeln statt.

Der Zerfall der Molekeln erfolgt durch eine nicht näher bekannte Einwirkung des Lösungsmittels (Wasser, Alkohol usw.) auf den gelösten Stoff und durch die der Temperatur entsprechende Eigenbewegung[2]) der Molekeln. Man bezeichnet sie in ihrer Gesamtheit als dissoziierende Kraft. Der Zerfall einer Molekel kann natürlich erst eintreten, wenn die dissoziierende Kraft stärker ist als die Kraft, welche die Ionen im Molekül zusammenhält. Diese zusammenhaltende Kraft besteht aus der Anziehung zwischen der positiven und negativen Ladung der Ionen. Nach erfolgter Trennung hat jedes Ion eine gewisse selbständige Bewegung. Kommen sich dabei entgegengesetzte Ionen so nahe, daß die Anziehungskraft ihrer Ladungen stark genug ist, so vereinigen sie sich zu einer neuen Molekel, die elektrisch neutral ist.

---

[1]) Während aber Faraday unter Ionen nur die betreffenden chemischen Massen verstand, versteht man heute darunter die chemischen Massen samt ihren zugehörigen Ladungen. Bei Chlorsilber besteht also das Kation aus einer gewissen Masse Silber und einer gewissen positiven Ladung, das Anion aus einer äquivalenten Masse Chlor und einer negativen Ladung von gleicher Größe wie die positive des Kations. Will man besonders hervorheben, wenn man es mit Ionen zu tun hat, so versieht man die chemischen Zeichen mit dem + oder — Zeichen; also z. B. Silber-Kation: $\overset{+}{\mathrm{Ag}}$, Chlor-Anion: $\overset{-}{\mathrm{Cl}}$.

[2]) Man kann sich vorstellen, daß diese Eigenbewegung eine rotierende ist. Bei einer gewissen Geschwindigkeit fliegen die beiden Ionen einer Molekel infolge der Zentrifugalkraft auseinander, nachdem schon die zusammenhaltende Kraft durch eine Wirkung des Lösungsmittels gelockert wurde.

Das Verhältnis der Anzahl der dissoziierten Molekeln zur Gesamtzahl der Molekeln wird als Dissoziationsgrad bezeichnet. Er hängt von der Temperatur und von der Konzentration der Lösung ab, und zwar ist er umso größer je höher die Temperatur und je geringer die Konzentration ist. Das erstere erklärt sich nach obiger Annahme aus der mit der Temperatur zunehmenden Eigenbewegung der Molekeln, das letztere aus der Einwirkung des Lösungsmittels, die umso stärker ist, je mehr von dem Lösungsmittel gegenüber dem gelösten Stoff vorhanden ist. Bei sehr geringer Konzentration sind fast alle vorhandenen Molekeln dissoziiert.

Wird nun in der Lösung ein elektrisches Feld erzeugt, durch Einsetzung zweier Elektroden, zwischen denen durch irgend eine äußere Stromquelle eine Potentialdifferenz (Elektrodenspannung) hervorgerufen wird, so werden die positiv geladenen Kationen von der Kathode (Abb. 64) und die negativ geladenen Anionen von der Anode angezogen, während die jeweils geschlossenen Molekeln unberührt bleiben, weil sie neutral sind. Die elektrische Kraft hat also nicht erst die Molekeln zu spalten, sondern die schon vorhandenen Ionen nur an die Elektroden zu führen. Da freie Ionen in der ganzen Lösung also auch in nächster Nähe der Elektroden vorhanden sind, tritt ein Strom sofort nach Entstehung des elektrischen Feldes auf. Tritt kein sekundärer Prozeß ein, so treten Kationen und Anionen an den Elektroden als freie Gase oder feste Niederschläge auf. Ihre Anzahl hängt bei gleicher Konzentration und Temperatur von der Stärke des elektrischen Feldes zwischen den Elektroden, also von der Elektrodenspannung ab. Der elektrische Strom, der durch den Elektrolyten geht, ist demnach nichts anderes als die Summe der in einer Zeiteinheit von den Kationen zur Kathode und der in derselben Zeit von den Anionen zur Anode mitgeführten Ladungen. Hier, an den Elektroden werden diese fortgesetzt zuströmenden Ladungen neutralisiert durch jene Elektrizitätsmenge, die aus der äußeren Stromquelle, an welche die Elektroden angeschlossen sind, zufließt, so daß das Ergebnis derart ist, als wenn die äußere Stromquelle einen Strom durch den Elektrolyten wie durch einen metallischen Leiter hindurchschicken würde.

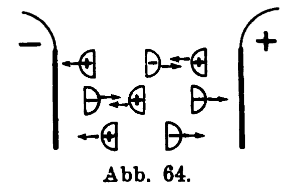


Abb. 64.

Dadurch erklärt sich ohne weiteres das erste Faradaysche Gesetz, wonach die ausgeschiedenen Ionen der Stromstärke und der Zeit proportional sind, weil eben der im Elektrolyten vorhandene Strom in Wirklichkeit nichts anderes ist als die von den Ionen mitgeführten Ladungen.

Die elektrische Ladung einer aus gleichen Ionen bestehenden Masseneinheit läßt sich leicht berechnen. Ist N die Anzahl der in einer Sekunde an einer Elektrode ausgeschiedenen Ionen (Kationen oder Anionen) und M die Gewichtsmasse eines Ions, so ist die in einer Sekunde an einer Elektrode ausgeschiedene $G = MN$. Ist ferner ε die elektrische Ladung eines Ions, so ist die in einer Sekunde an einer Elektrode auftretende Elektrizitätsmenge $Q = \varepsilon N$.

Daraus folgt durch Division

$$\frac{Q}{G} = \frac{\varepsilon}{M}.$$

$\frac{\varepsilon}{M}$ ist nichts anderes als die elektrische Ladung pro Masseneinheit eines Ions, und $\frac{Q}{G}$ ist nach § 59 nichts anderes als der reziproke Wert des elektrochemischen Äquivalentes. Für Wasserstoff ist also die Ladung einer Masseneinheit gleich $\frac{1}{0{,}0000104} = 96\,500$ Coulomb, für Sauerstoff gleich $\frac{1}{0{,}0000832} = 12\,060$ Coulomb, für Cu aus Kupfervitriol gleich $\frac{1}{0{,}000328} = 3050$ Coulomb. Daraus erkennt man, daß 8 g des Sauerstoffes oder 31,6 g des Kupfers dieselbe Ladung wie 1 g Wasserstoff, nämlich 96500 Coulomb mit sich führen, d. h. daß jede Masse eines beliebigen Ions, welche der Masseneinheit des Wasserstoffes äquivalent ist, das ist das sogenannte Grammäquivalent eine Elektrizitätsmenge von 96500 Coulomb als Ladung mit sich führt. Da nach der kinetischen Gastheorie in einem Gramm Wasserstoff $77 \cdot 10^{22}$ Atome enthalten sind, so ist die auf ein Atom entfallende Elektrizitätsmenge, d. h. die Ladung eines Ions gleich $1{,}3 \cdot 10^{-19}$ Coulomb. Über die Dissoziierung der Gase und die dadurch bewirkte Stromleitung vgl. § 224.

61. Dissoziierte Stoffe und Ionisatoren.

Nach dem vorstehenden besitzen nur jene Flüssigkeiten elektrisches Leitungsvermögen, welche irgend einen Stoff dissoziiert enthalten. Von einer Zuckerlösung muß man aus anderen physikalischen und chemischen Gründen annehmen, daß die Zuckermolekeln nicht zerfallen, sondern alle geschlossen sind. Tatsächlich vermag eine Zuckerlösung, wenn sie nicht andere elektrolytische Stoffe enthält, den Strom nicht zu leiten. Chlorwasserstoffgas läßt sich durch Kälte und Druck verflüssigen. Diese Flüssigkeit leitet

aber nicht, weil sie nur aus geschlossenen HCl Molekeln besteht. Leitet man aber diese Flüssigkeit oder das Gas in Wasser, so tritt sofort Dissoziation ein, d. h. ein Teil der Molekeln zerfällt in Kation und Anion nach der Gleichung $HCl = \overset{+}{H} + \overset{-}{Cl}$. Aus diesen Beispielen ersieht man, daß die Dissoziation sowohl von dem gelösten Stoff als auch dem Lösungsmittel abhängt. Dissoziieren lassen sich alle Säuren, Basen und Salze. Das Lösungsmittel, welches die Dissoziation bewirkt, nennt man Ionisator. Der wichtigste und stärkste Ionisator ist Wasser. Ionisatoren von ähnlicher Stärke sind: alle Alkohole, insbesondere Methylalkohol, Ameisensäure, verflüssigtes Ammoniak (NH_3), Azeton u. a. Schwächere Ionisatoren sind: Salpetersäure, Schwefelsäure, Aldehyde, Ketone u. a.

Gar nicht dissoziierend wirken alle Kohlenwasserstoffe sowohl fette als aromatische. Daher eignen sich die Öle besonders für Isolierzwecke. Denn wenn auch kleine Verunreinigungen in sie hineinkommen, verursachen sie noch kein Leitungsvermögen, während kleine Verunreinigungen der Alkohole ein Leitungsvermögen zur Folge haben.

Die genannten Ionisatoren, auch Wasser für sich allein und im reinsten Zustande, haben kein elektrolytisches Leitungsvermögen, da sie nicht dissoziiert sind. Einige (z. B. Wasser, Schwefelsäure, Salpetersäure) zeigen zwar ein gewisses Leitungsvermögen, das ist aber nicht elektrolytischer, sondern metallischer Art, wie bei Quecksilber. Dagegen können Ionisatoren, die in einem anderen, stärkeren Ionisator gelöst sind, z. B. Schwefelsäure oder Salpetersäure in Wasser ein starkes elektrolytisches Leitungsvermögen haben. Andererseits haben die Ionisatoren im reinsten Zustande als Nichtleiter eine Dielektrizitätskonstante, und es scheint, daß diese zur Stärke des Ionisators in Beziehung steht, denn die stärksten Ionisatoren (Wasser, Alkohol) haben die größte Dielektrizitätskonstante (80 bzw. 25).

62. Spezifischer Widerstand der Elektrolyte.

Das Ohmsche Gesetz $J = \frac{E}{W}$ hat zur Voraussetzung, daß der Widerstand W oder sein reziproker Wert, das Leitungsvermögen, von der Stromstärke und der Spannung unabhängig sind. Das ist, wie die Messungen gezeigt haben, nicht nur bei den metallischen, sondern auch bei den elektrolytischen Leitern der Fall und man kann daher auch für sie einen spezifischen Widerstand angeben. Da der Strom in einem Elektrolyten aus den Ladungen der zu den

Elektroden wandernden Ionen besteht, so muß bei gleicher Elektrodenspannung der durch eine Querschnittseinheit des Elektrolyten fließende Strom umso stärker sein, der Widerstand also umso kleiner sein, je mehr freie Ionen in der Raumeinheit des Elektrolyten vorhanden sind und je schneller sie wandern, d. h. je geringer der Bewegungswiderstand ist. Der spezifische Widerstand ändert sich also mit der Konzentration und der Temperatur des Elektrolyten. Die meisten Ionen in der Raumeinheit sind aber nicht bei der größten Konzentration vorhanden, weil der Dissoziationsgrad umso kleiner ist, je konzentrierter die Lösung ist. Der spezifische Widerstand geht also weder mit der Konzentration noch mit dem Dissoziationsgrad proportional; häufig hat er ein Minimum. Die Abb. 65 zeigt die Abhängigkeit des Widerstandes von der Konzentration bei Schwefelsäure und Wasser durch eine Schaulinie und die Zahlentafel auf S. 87 gibt für einige andere Lösungen die spezifischen Widerstände α für verschiedene Konzentrationen, und in der letzten Zeile jene Konzentration bei der der spezifische Widerstand am kleinsten ist.

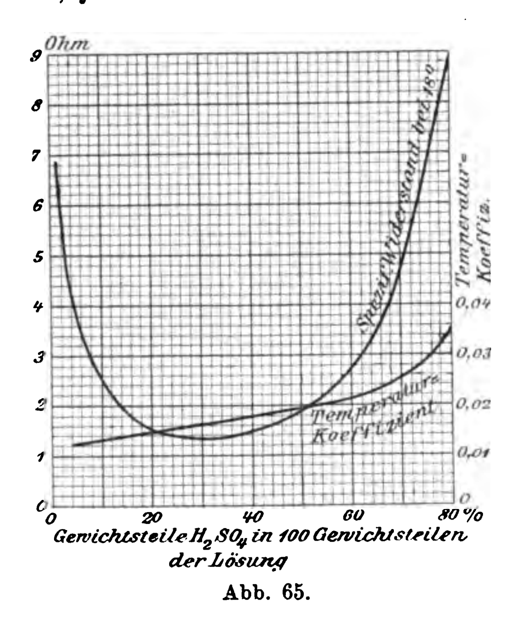


Abb. 65.

Da die Dissoziation mit der Temperatur zunimmt, der Bewegungswiderstand abnimmt, so folgt aus beiden Gründen eine Abnahme des spezifischen Widerstands. Der Temperaturkoeffizient ist also im Gegensatz zu den Metallen negativ und seinem Werte nach erheblich größer als bei diesen.

Mit einer für praktische Zwecke hinreichenden Genauigkeit läßt sich der Widerstand bei der Temperatur t darstellen durch

$$W_t = W_{18}(1 + \gamma t),$$

wenn W_{18} die in der Zahlentafel enthaltenen Werte bei 18^0 und γ den Temperaturkoeffizienten bedeutet.

Spezifischer Widerstand (Zentimeterprisma) in Ohm und Temperaturkoeffizient einiger wässeriger Lösungen bei 18⁰.

Prozentgehalt	Salpetersäure HNO_3	Salzsäure HCl	Soda Na_2CO_3	Zinksulphat $ZnSO_4$	Kupfersulphat $CuSO_4$	Kochsalz NaCl	Silbernitrat $AgNO_3$	Kalilauge KOH
1	—	9,2	75	—	—	57		
5	3,9	2,5	22	53	53	16	42	5,8
10	2,2	1,6	14	31	31	8,9	23	3,2
15	1,63	1,34	12	24	24	6,5	16	2,4
20	1,4	1,3		21		5,5	12,3	2,0
25	1,3	1,4		21		5	10,1	1,85
30	1,28	1,5		23			8,6	1,85
35	1,3	1,7					7,6	2,0
40	1,37	1,95					6,8	2,2
50	1,6						5,8	
60	1,95						5,1	
70	2,5							
80	3,7							
Minimum bei	1,27 29,7 %	1,3 18,3 %		20,8 23,5 %				1,84 28 %
Temperaturkoeffiz. γ	−0,014	−0,016	−0,026	−0,024	−0,022	−0,022	−0,022	−0,02

63. Konzentrationsänderung durch elektrolytische Leitung. Beweglichkeit der Ionen.

Geht ein Strom durch einen Elektrolyten, so muß infolge der Ausscheidung der Ionen an den Elektroden eine Verminderung der Konzentration der elektrolytischen Lösung eintreten. Auffallend dabei ist, daß diese Konzentration an verschiedenen Stellen verschieden ist. Teilt man eine elektrolytische Zelle (Abb. 66) durch zwei durchlässige Wände (Diaphragmen) in drei Abteilungen, und untersucht nach dem Stromdurchgang die Konzentration, so findet man, daß sie in der mittleren Abteilung unverändert geblieben ist, in den beiden äußeren Abteilungen aber vermindert ist, und zwar in der einen mehr als in der anderen.[1]) Diese Erscheinung läßt sich

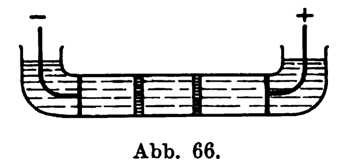


Abb. 66.

[1]) Diese der verschiedenen Wanderungsgeschwindigkeit entsprechenden Konzentrationsänderungen bestehen natürlich nur, wenn nicht durch sekundäre Prozesse Störungen eintreten. Es können dadurch sogar Vergrößerungen der Konzentration eintreten.

nur dadurch erklären, daß die Wanderungsgeschwindigkeit der Kationen verschieden ist von der der Anionen auf ihren Wegen nach den Elektroden. Der obere Teil der Abb. 67 soll schematisch den Zustand des Elektrolyten vor dem Durchgang eines Stromes darstellen, indem durch + und — die durch Zerfall der Moleküle entstandenen freien Ionen bezeichnet sind. In Wirklichkeit liegen sie natürlich nicht so regelmäßig nebeneinander, sondern vermischt; hier kommt es uns aber nur auf ihre Anzahl an. Ist nun die Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen unter der Wirkung eines elektrischen Feldes verschieden, so daß z. B. die Kationen in einer Sekunde um 2 Einheiten nach links fortschreiten, während die Anionen um 3 Einheiten nach rechts fortschreiten, so zeigt der

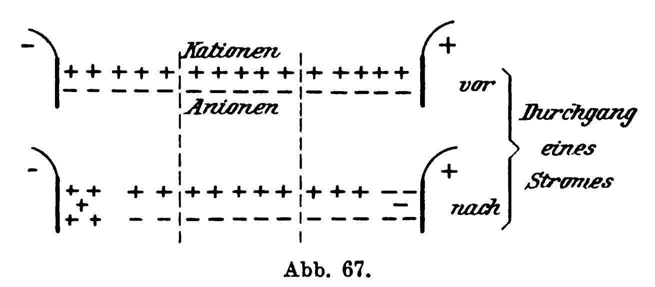


Abb. 67.

untere Teil der Abb. 67 den Zustand, nachdem der Strom eine Sekunde hindurchgegangen ist. Man sieht, daß in der mittleren Abteilung die Konzentration dieselbe geblieben ist, während in der rechten Abteilung nur mehr drei Ionenpaare, in der linken gar nur zwei vorhanden sind. Trotzdem ist die Anzahl der ausgeschiedenen Ionen an beiden Elektroden die gleiche, nämlich fünf. Da alle Ionen Ladungen von gleicher Größe ε haben, so ist die von der Stromquelle den Elektroden zum Zwecke der Neutralisierung zugeflossene Elektrizitätsmenge 5ε. Die Stromstärke ist also gleich der Elektrizitätsmenge, welche einer der beiden Elektroden (Kathode oder Anode) in einer Sekunde zugeflossenen ist, und diese ist gleich der Summe der nach beiden Seiten während einer Sekunde gewanderten Ionen (in unserem Beispiel $2 + 3 = 5$). Daraus kann man folgern, daß die Wanderung der einen Ionengattung unabhängig ist von der anderen Ionengattung und daß die elektrischen Eigenschaften eines Elektrolyten sich aus der Summe der entsprechenden Eigenschaften beider Ionengattungen ergeben (Kohlrausch). Insbesondere gilt dies von den spezifischen Widerständen, wie sich aus folgender Betrachtung ergibt.

Die Weglänge, welche ein Kation in einer Sekunde zurücklegt, wenn zwischen den um 1 cm voneinander abstehenden Elektroden

(homogenes Feld vorausgesetzt) 1 Volt Spannung herrscht, nennt man „Beweglichkeit" c_k der Kationen; in gleicher Weise bedeutet c_a die Beweglichkeit der Anionen. Setzt man Proportionalität voraus, so ist bei einer Spannung von E-Volt der zurückgelegte Weg in einer Sekunde oder die Wanderungsgeschwindigkeit für die Kationen

$$v_k = c_k E,$$

für die Anionen

$$v_a = c_a E.$$

Ist n die Anzahl der Kationen bzw. die der Anionen in einem Zentimeterprisma, so ist nach obigem die in einer Sekunde durch eine Querschnittseinheit fließende Elektrizitätsmenge, also die Stromstärke

$$i = n\varepsilon v_k + n\varepsilon v_a = (n\varepsilon c_k + n\varepsilon c_a) E.$$

Alle Größen innerhalb der Klammer sind von E unabhängig. Vergleichen wir diese Gleichung mit dem Ohmschen Gesetz, so sehen wir, daß der Klammerausdruck gleich dem spezifischen Leitungsvermögen ist, und daß dieses gleich der Summe aus dem spezifischen Leitungsvermögen $n\varepsilon c_k$ des Kations und dem spezifischen Leitungsvermögen $n\varepsilon c_a$ des Anions ist.

Wären die Wanderungsgeschwindigkeiten v_k und v_a nicht proportional mit E, also c_k und c_a von E nicht unabhängig, so wäre auch der Klammerausdruck nicht unabhängig von E, d. h. für die elektrolytische Leitung könnte das Ohmsche Gesetz nicht gelten. Tatsächlich könnte man nach den Gesetzen der Mechanik nicht ohne weiteres annehmen, daß die Geschwindigkeiten der Ionen gleichförmige seien, denn die elektrische Kraft wirkt während ihrer ganzen Bewegung auf sie ein, so daß ihre Bewegung eine beschleunigte sein müßte. Nur wenn der Reibungswiderstand während der Bewegung sehr groß ist, wird die beschleunigte Bewegung zu einer gleichförmigen (fallende Schneeflocken). Da nun die Messungen zeigen, daß für die elektrolytische Leitung wirklich das Ohmsche Gesetz gilt, so müssen v_k und v_a gleichförmige Geschwindigkeiten sein, was sich aus dem großen Reibungswiderstand, den die Ionen in der Flüssigkeit finden, erklärt.

64. Elektrolyse geschmolzener Salze.

Nach dem vorstehenden ist zu einer elektrolytischen Leitung erforderlich, erstens, das Molekeln in dissoziiertem Zustande vorhanden sind, zweitens, daß sich die Ionen nach den Elektroden hin bewegen können. Beide Bedingungen sind nicht nur bei gelösten, sondern auch geschmolzenen Salzen erfüllt. Die Elektrolyse ge-

schmolzener Salze zeichnet sich dadurch aus, daß in der Regel das reine Metall auftritt, während es bei gelösten Salzen häufig durch sekundäre Prozesse wieder in andere Verbindungen übergeführt wird. Das wichtigste Beispiel ist die Gewinnung des Aluminiums aus dem geschmolzenen Oxyd $Al_2 O_3$ (Tonerde). Ein mit diesem Oxyd und mit $Al_2 Fl_6$ 6 Na Fl (Kryolith) gefülltes Gefäß bildet die Kathode, ein Bündel von Kohlenstäben die Anode. Durch Herstellung eines Lichtbogens zwischen den Kohlenstäben und der Füllung wird zunächst der Kryolith geschmolzen und zersetzt. Das Fluor entnimmt der Tonerde das Aluminium und verbindet sich mit ihr, wird aber durch Elektrolyse wieder zersetzt. Das Aluminium wird also aus der Tonerde gewonnen, die nachgefüllt werden muß, während von dem Kryolith nur die unvermeidlichen Verluste ersetzt werden müssen. Das Aluminium sammelt sich in geschmolzenem Zustand am Boden des Gefäßes und kann von hier abgelassen werden.

Auch die Alkalimetalle (K, Na, Li) werden aus geschmolzenen Salzen (an Kohle oder Eisenelektroden) gewonnen, und nicht aus Lösungen, weil sich bei diesen nach Abscheidung des Metalles sofort das betreffende Hydroxyd bildet.

65. Elektrolytische Leitung in festen Stoffen.

Auch im festen Zustande zeigen die meisten Salze ein Leitungsvermögen, wenn auch sehr viel kleiner als im gelösten oder geschmolzenen Zustande, weil im festen Zustande sowohl die Anzahl der dissoziierten Molekeln, als auch ihre Beweglichkeit sehr viel geringer ist. Bei manchen ist es zweifelhaft, ob ihre Leitung elektrolytischer oder metallischer Art ist. Ein deutliches elektrolytisches Leitungsvermögen zeigen die durch Zusammenschmelzen, Zusammenbacken (Sintern) hergestellten festen Körper aus Oxyden des Magnesiums, Calciums und Bariums, wie sie von Jablochkoff und Nernst zur Herstellung elektrischer Leuchtkörper verwendet wurden. An der Kathode kommt unzweifelhaft das betreffende Metall zur Ausscheidung, wird aber durch Sauerstoffaufnahme aus der Luft sofort wieder in Oxyd verwandelt. Daher muß die Nernstlampe unter Luftzutritt brennen und wird nicht in eine Glasbirne eingeschlossen wie die anderen Glühlampen. Bei den Sulfiden der Metalle (z. B. PbS, Ag_2S, HgS), und bei den verschiedenen Silikaten, welche die wesentlichen Bestandteile von Glas, Porzellan und Ton bilden, ist die elektrolytische Leitung nur bei sehr hohen Temperaturen erkennbar. Sie haben alle die auffallende Eigenschaft, daß sie unterhalb einer gewissen, für jeden Stoff charakteristischen Temperatur einen sehr hohen spezifischen Widerstand

haben, so daß sie zum Teil, wie z. B. Porzellan und Glas, zu den besten Isolatoren gehören. Oberhalb einer gewissen Temperatur aber ist ihr spezifischer Widerstand so klein, daß sie den guten Leitern nahe kommen. So ist beispielsweise der Leuchtkörper der Nernstlampe unter 200° ein Isolator und muß daher erst durch andere Hilfsmittel angewärmt werden. Hat er die Grenze überschritten, so geht ein schwacher Strom hindurch und erwärmt ihn noch mehr, so daß der Widerstand sehr rasch sinkt. Da gleichzeitig sein negativer Temperaturkoeffizient wächst, muß ein Widerstand aus reinem Eisen (§ 44), der zwischen 500° und 800° einen wachsenden positiven Temperaturkoeffizienten hat, vorgeschaltet werden, um dem weiteren Sinken des Widerstandes und dem daraus folgenden Steigen des Stromes eine Grenze zu setzen. Ähnlich verhält sich das Porzellan. Glas zeigt bei einer Zunahme der Temperatur von 18° auf 200°, dann auf 350° eine Abnahme des spezifischen Widerstandes von 10^{20} auf 10^{16}, auf 10^{13}. Nach Ansicht des Verfassers ist das sehr geringe Leitungsvermögen, das unterhalb der charakteristischen Temperatur nachgewiesen werden kann, metallischer Art, während bei steigender Temperatur elektrolytische Leitung eintritt, weil da erst die Dissoziation der Moleküle beginnt. Die rasche Abnahme des Widerstandes, die erst bei höherer Temperatur beginnt, und die bei Metallen nicht vorhanden ist, erklärt sich daraus, daß mit der Temperatur sowohl die Zahl des dissoziierten Molekeln, als auch ihre Beweglichkeit wächst.

Im Gegensatz zu diesen Körpern haben die Verbindungen einiger sehr gut leitender Metalle, z. B. PbO_2, Cu_2S, CdO metallisches Leitungsvermögen, denn sie zeigen schon bei gewöhnlicher Temperatur einen geringen Widerstand (das für Akkumulatoren wichtige PbO_2 hat nur den zwei- bis dreifachen Widerstand des Quecksilbers) und einen positiven Temperaturkoeffizienten. Streintz[1]) hat gefunden, daß nur jene Metallverbindungen ein gutes Leitungsvermögen zeigen, die dunkelfarbig sind und sich im pulverisierten Zustande ohne Bindemittel in Stäbchen oder Platten von metallischem Glanz pressen lassen, wie die letztgenannten. Das läßt ebenfalls auf metallische Leitung schließen.

Über die spezifischen Widerstände der sehr schlechten Leiter vgl. die Zusammenstellung in § 43.

---

[1]) Annal. d. Phys. 1902, Bd. 9, S. 854.

66. Polarisation.

Nach dem Faradayschen Gesetze sind die bei der Elektrolyse ausgeschiedenen Ionen der Stromstärke proportional , d. h. es tritt auch schon bei der kleinsten Stromstärke eine Zersetzung ein. Legt man an einen Wasserzersetzungsapparat, wie er in Abb. 61 dargestellt ist, eine Spannung von 1 Volt an, so geht ein Strom durch, welcher sich aus dieser Spannung und dem Widerstand des Elektrolyten zwischen den beiden Elektroden ergibt. Dementsprechend müßte eine Ausscheidung von H und O stattfinden. Es ist aber keine zu beobachten; erst wenn die Spannung über 1,48 Volt gesteigert wird, tritt sie ein. Das scheint also dem Faradayschen Gesetze zu widersprechen. Der Widerspruch ist aber nur ein scheinbarer, denn bei genauer Untersuchung zeigt sich, daß sofort nach Anlegung der Spannung eine Zersetzung stattfindet, daß aber nach ganz kurzer Zeit der Strom und damit auch die Zersetzung aufhört.

Daß man die Zersetzungsprodukte H und O nicht bemerkt, hat seinen Grund darin, daß sie von dem Wasser und den Elektroden (Platin absorbiert Gase) absorbiert werden. Daß der Strom nach ganz kurzer Zeit wieder verschwindet, hat seinen Grund darin, daß die eben erst entwickelten und absorbierten Gase sich wieder chemisch zu verbinden streben, und indem sie dies tun, eine EMK erzeugen, welche der an die Elektroden angelegten Spannung (aufgedrückte Spannung) entgegen gerichtet und mindestens ebenso groß ist. Man kann sich davon überzeugen, wenn man die Spannung wieder wegnimmt, und an die Elektroden ein Elektrometer anschließt. Es zeigt sich dann, daß diese gegenelektromotorische Kraft nahezu gleich der vorher angelegten Spannung ist. Man nennt diese Gegen-EMK auch EMK der Polarisation, weil der Elektrolyt bestimmte Pole wie eine Stromquelle erhalten hat. Dies gilt, so lange die aufgedrückte Spannung unter 1,48 Volt liegt. Ist sie höher, so zeigt das Elektrometer nach Abschaltung der aufgedrückten Spannung stets nur 1,48 Volt, wie hoch auch die aufgedrückte Spannung gewesen sein mag. Läßt man auf den in Abb. 62 dargestellten Wasserzersetzungsapparat, wo H und O getrennt aufgefangen werden, längere Zeit eine Spannung von mehr als 1,48 Volt wirken, so daß in den beiden Glasröhren eine gewisse Menge der Gase sich ansammelt, und schließt dann die Elektroden nach Abschaltung der aufgedrückten Spannung über einen Strommesser, so zeigt er einen Strom an. Gleichzeitig verschwinden die in den Glasröhren angesammelten Gase allmählich. Sind sie ganz verschwunden, so hört auch der Strom auf. Dieser Versuch zeigt, daß die beiden Gase, trotzdem sie bereits räumlich getrennt sind,

durch Diffusion in die Flüssigkeit zurückkehren, sich hier wieder zu Wasser vereinigen und während dieser Zeit eine chemische Stromquelle (galvanische Zelle) darstellen.

Die EMK der Polarisation verhält sich also zur aufgedrückten Spannung so wie die Elastizität einer Feder zu der Kraft, welche sie zu biegen strebt. Die kleinste Kraft, welche sie zu biegen sucht, ruft die elastische Gegenkraft hervor. Ebenso ruft die kleinste aufgedrückte Spannung eine Gegen-EMK hervor. Eine dauernde Biegung der Feder kann nur eintreten, wenn die äußere Kraft größer ist als die elastische Kraft der Feder; läßt jene nach, so kommt diese zur Wirkung. Ebenso kann eine dauernde Zersetzung nur eintreten, wenn die aufgedrückte Spannung die dem chemischen Prozeß eigentümliche Gegen-EMK überwiegt. Hört jene auf, so tritt diese in Wirkung.

Dieses Gleichnis aus der Mechanik gilt aber nur dann, wenn der bei der Elektrolyse stattgefundene chemische Vorgang umkehrbar ist. Wenn aber bei der Wasserzersetzung dafür gesorgt wird, daß der an der Kathode auftretende Wasserstoff durch Zuführung von Sauerstoff oxydiert, oder der an der Anode auftretende Sauerstoff durch Zuführung von Wasserstoff reduziert wird, so kann eben keine Zurückbildung zu Wasser stattfinden, und daher auch keine Polarisation auftreten. Dies kann man in vielen Fällen schon durch geeignete Wahl der Elektroden erreichen. Betrachten wir z. B. die durch Abb. 59 dargestellte Zersetzung von $CuSO_4$ zwischen Platinelektroden, so tritt hier eine Polarisation auf, welche der Zurückbildung der ausgeschiedenen Ionen Cu und O zu $CuSO_4$ unter Zuhilfenahme des vorher gebildeten H_2SO_4 entspricht. Ersetzt man aber die Platinelektroden durch Kupferelektroden, so sieht man aus dem durch Abb. 60 dargestellten Vorgang, daß eine Zurückbildung deshalb nicht eintreten kann, weil das ausgeschiedene SO_4-Ion mit dem Kupfer der Anode sogleich eine neue Molekel $CuSO_4$ bildet. An der Kathode tritt keinerlei chemischer Vorgang auf, weil sich hier Cu auf Cu niederschlägt. Infolgedessen tritt in der ganzen Zelle keine Polarisation auf, und es ist eine dauernde Zersetzung schon durch die kleinste aufgedrückte Spannung möglich. Das ist bei allen elektrolytischen Vorgängen der Fall, bei denen die Elektroden aus demselben Metall wie das gelöste Salz bestehen, also z. B. bei der Elektrolyse von Zinksulphat zwischen Zinkelektroden, oder bei der Elektrolyse von Silbernitrat zwischen Silberelektroden. Man nennt solche Mittel, welche die Polarisation verhindern, depolarisierende Mittel.

Bei jedem elektrolytischen Vorgang tritt also eine Polarisation auf, wenn sie nicht durch depolarisierende Mittel verhindert wird.

Aber selbst da kann nach längerem Stromdurchgang noch eine Polarisation aus anderer Ursache eintreten. Wie wir aus § 63 wissen, tritt im Elektrolyten eine Konzentrationsänderung infolge der verschiedenen Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen ein. Dadurch allein entsteht aber schon eine EMK, selbst wenn die Elektroden aus demselben Metall bestehen wie das gelöste Salz, und zwar ist diese EMK von entgegengesetzter Richtung wie der Strom, der die Konzentrationsänderung verursacht hat. Doch ist diese Konzentrations-Polarisation erheblich kleiner, als die Polarisation bei chemischer Verschiedenheit. (Vgl. § 70.)

Ist E die Spannung, die an eine elektrolytische Zelle angelegt wird, W der Widerstand des Elektrolyten zwischen den beiden Elektroden, so ist die Stromstärke in dem Augenblick, wo die Spannung angelegt wird

$$i = \frac{E}{W}.$$

Sowie aber dieser Strom auftritt, tritt sogleich auch eine Gegen-EMK der Polarisation e ein, so daß nur noch die Differenz der beiden Spannungen $E - e$ wirkt. Die Stromstärke ist dann

$$i = \frac{E - e}{W}.$$

Ist die angelegte Spannung E gleich oder kleiner als die dem chemischen Vorgang entsprechende EMK der Polarisation e, so wird der Zähler und daher auch i in ganz kurzer Zeit nach dem Anlegen der Spannung Null. Die Abnahme des Stromes erfolgt also nicht durch Vergrößerung der Widerstandes der Zelle, sondern durch das Auftreten der Gegen-EMK. Es kann aber auch eine Vergrößerung des Widerstandes eintreten, wenn Gase ausgeschieden werden, die Bläschen an die Elektroden ansetzen. Dadurch wird die wirksame Oberfläche der Elektroden verkleinert. Dasselbe tritt ein, wenn der Elektrolyt Verunreinigungen enthält, die sich als Schlamm an den Elektroden ansetzen. Durch Umrühren oder Bewegen des Elektroden kann das verhindert werden.

Der im vorstehenden geschilderte Stromverlauf beim Anlegen einer Spannung, die kleiner ist als die Polarisationsspannung, wonach der Strom in kurzer Zeit auf Null sinkt, gleicht dem Laden eines Kondensators, wenn eine Spannung an ihn angelegt wird. Auch da geht zuerst ein Strom von voller Stärke durch die Anschlußleitung, der rasch abnimmt und Null wird, sobald die Platten des Kondensators die der Kapazität entsprechende Ladung auf-

genommen haben. Man spricht daher von einer Polarisationskapazität einer elektrolytischen Zelle, die eine Rolle spielt, wenn Wechselstrom durch die Zelle gesandt wird.

67. Stromerzeugung durch chemische Vorgänge.

Wir wissen schon aus dem vorhergehenden, daß die chemische Zersetzung durch den elektrischen Strom ein umkehrbarer Prozeß ist, d. h. daß durch einen chemischen Prozeß ein Strom erzeugt werden kann. Dazu eignet sich am besten die Verbindung eines Metalles mit einer Säure zu einem Salze. Es tritt dabei eine Potentialdifferenz zwischen Metall und Flüssigkeit auf, die von der Art des chemischen Vorganges abhängt. Wird der Stromkreis geschlossen, so entsteht ein Strom nach dem Ohmschen Gesetze, der im äußeren Schließungsdrahte von der Flüssigkeit zum Metall, in der Zelle selbst aber vom Metall zur Flüssigkeit geht. In dieser wirkt er wie in einer Zersetzungszelle, d. h. die Mengen der zur chemischen Wirkung gelangenden Stoffe sind proportional der Stromstärke und der Zeit (§ 59). An der Austrittsstelle des Stromes (das ist der positive Pol) scheiden sich der Wasserstoff und die Metalle aus, und an der Eintrittsstelle (das ist der negative Pol) die nicht metallischen Bestandteile.

Ebenso kann wie in einer elektrolytischen Zelle eine Gegen-EMK durch Polarisation auftreten, welche die dem ursprünglichen chemischen Vorgange entsprechende EMK vermindert. Sie wird hier in den meisten Fällen durch den an der positiven Elektrode auftretenden Wasserstoff verursacht. Außerdem erhöht der Wasserstoff durch Bläschenbildung noch den Widerstand, wie schon am Schluß des vorigen Paragraphen erwähnt. Man nennt daher Zellen, bei denen diese Wirkung eintritt, inkonstante, wie z. B. die schon in § 40 erwähnte Smeesche, dann die Voltasche Zelle, bestehend aus Zink und Kupfer in verdünnter Schwefelsäure. Zink in einer Säure ist die häufigste Art der Stromerzeugung in galvanischen Zellen.

Zur Unschädlichmachung des Wasserstoffes, also als depolarisierende Mittel, dienen am besten sauerstoffreiche Verbindungen, wie Mangansuperoxyd (Braunstein), Bleisuperoxyd, Salpetersäure. Chromsäure usw. Diese Stoffe müssen den positiven Pol umgeben, da hier der Wasserstoff frei wird. Von der wirksamen Säure, welche die negative Elektrode umgibt, werden sie durch poröse Scheidewände (Tonzellen, Häute) getrennt. Die Chromsäure wird aber auch manchmal damit vermischt. Sowie nun Wasserstoff

frei wird, entzieht er diesen Verbindungen Sauerstoff und bildet Wasser. Solche Zellen weisen eine nahezu konstante EMK auf; man nennt sie daher konstante Zellen.

68. Die wichtigsten konstanten Zellen.

Die Daniellsche Zelle besteht aus Zink in verdünnter Schwefelsäure (1 : 12) und, davon durch eine poröse Tonzelle getrennt, Kupfer in einer gesättigten Lösung von Kupfervitriol. Der chemische Vorgang ist aus Abb. 68 ersichtlich. Hier wird also der Wasserstoff dadurch unschädlich gemacht, daß er mit dem Kupfervitriol Schwefelsäure bildet und dafür metallisches Kupfer frei macht. Die EMK dieser Zelle ist etwa 1 Volt. Statt Schwefelsäure kann auch Zinkvitriollösung verwendet werden. Es ist dann die in § 66 erwähnte Bedingung zur Vermeidung der Polarisation erfüllt, wonach die Elektrode aus demselben Metall besteht, wie die Lösung, in welche sie eintaucht.

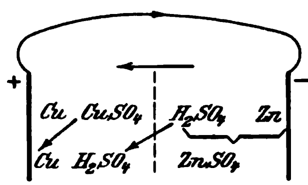


Abb. 68. Daniellsche Zelle.

Die Bunsensche Zelle besteht aus Zink in verdünnter Schwefelsäure und, davon durch eine Tonzelle getrennt, Kohle in konzentrierter Salpetersäure. Der Wasserstoff wird dadurch unschädlich gemacht, daß er mit dem Sauerstoff der Salpetersäure Wasser bildet. Der Rest sind Stickoxyde (NO_2 und N_2O_2), die als braunrote, den Atmungsorganen schädliche Dämpfe entweichen. Eine Abänderung ist die Grovesche Zelle, die statt der Kohle ein Platinblech enthält. Statt der Salpetersäure kann auch Chromsäure verwendet werden. Die EMK ist 1,9 bis 2 Volt.

Die Chromsäure-Tauchzelle hat nur eine Flüssigkeit, Zink und Kohle tauchen in eine Chromsäurelösung; da diese aber teuer ist, ersetzt man sie häufig durch eine Lösung von 1 Teil doppeltchromsaurem Natrium in 2 Teilen Schwefelsäure und 12 Teilen Wasser. Der frei werdende Wasserstoff entzieht der Chromsäure Sauerstoff und bildet Wasser. Die EMK ist etwa 2 Volt. Um den Verbrauch von Zink und Säure einzuschränken, sind diese Zellen so eingerichtet, daß die Elektroden erst im Moment des Gebrauches in die Flüssigkeit eingetaucht werden.

Die Zelle von Leclanché. Zink taucht in Salmiaklösung, und in einer Tonzelle befindet sich ein Kohlenstab, umgeben von einem Gemenge aus Kohle und Braunstein. Der Wasserstoff reduziert den Braunstein (Mangansuperoxyd) zu Manganoxyd. Die EMK ist

etwa 1,4 Volt; der innere Widerstand aber wegen des trockenen Gemenges in der Tonzelle bedeutend. Sie eignet sich besonders zu Haustelegraphen und Telephonen.

69. Lokalströme.

Taucht man chemisch reines Zink in verdünnte Schwefelsäure, so wird es von dieser nicht angegriffen. Taucht man aber noch ein Kupferstück hinein und verbindet Zink und Kupfer durch einen leitenden Draht, so findet eine Auflösung des Zinkes zu Zinkvitriol statt; man hat jetzt eine Voltasche Zelle. Dasselbe tritt — wenn auch in schwächerem Maße — ein, wenn der Verbindungsdraht nicht vorhanden ist. Der Stromkreis schließt sich dann durch die Säure selbst. Dasselbe tritt ein, wenn sich Kupfer oder ein anderes Metall auf dem Zink selbst befindet. Man nennt solche im Metall und in der Säure selbst verlaufende Ströme Lokalströme.

Auf diese Weise erklärt es sich, warum gewöhnliches Zink, das immer mehr oder weniger verunreinigt ist, von verdünnter Schwefelsäure angegriffen wird; das ist natürlich auch dann der Fall, wenn gewöhnliches Zink als Elektrode in einer der in § 68 beschriebenen Zellen angewendet wird. Es findet dann eine Auflösung des Zinkes auch dann statt, wenn der Zelle kein Strom entnommen wird. Da chemisch reines Zink für solche Zwecke zu teuer ist, so hilft man sich dadurch, daß man das Zink mit Quecksilber amalgamiert. Es kommt dann nur das im Amalgam enthaltene Zink mit der Säure in Berührung, während die Verunreinigungen, die sich mit Quecksilber nicht amalgamieren, unter diesem liegen bleiben.[1])

Auf elektrolytischer Ausscheidung von Kupfer durch Lokalströme beruht auch die bekannte Erscheinung, daß sich Eisen mit Kupfer überzieht, wenn es in einer Lösung von Kupfervitriol liegt.

70. Konzentrationsketten.

Eine galvanische Zelle erhält man auch dann, wenn Elektroden von demselben Metall in dieselbe Lösung aber von verschiedener Konzentration eintauchen, z. B. Kupferelektroden in Kupfervitriollösung, oder Silberelektroden in Silbernitratlösung. Die verschiedene Konzentration an den beiden Elektroden kann durch eine poröse

[1]) Das Amalgamieren geschieht am einfachsten in der Weise, daß man das Zink in verdünnte Schwefelsäure taucht und Quecksilber mit einer Bürste oder einem Lappen aufreibt, oder dem geschmolzenen Zink 4 % Quecksilber zufügt.

Zwischenwand (Tonzelle) aufrecht erhalten werden (Abb. 74). Die Richtung des Konzentrationsstromes in der Zelle geht in der Regel von der kleineren zur größeren Konzentration. In einer elektrolytischen Zelle, durch die zum Zwecke der Zersetzung Strom hindurch geschickt wird, wie z. B. die Kupferzersetzungszelle in Abb. 60, entsteht die Verschiedenheit der Konzentration durch die Zersetzung. Denn wie man sieht, verschwindet an der Kathode eine Molekel $CuSO_4$, während an der Anode eine neu entsteht. Die Folge davon ist eine Gegen-EMK der Konzentrationspolarisation. Sie ist erheblich kleiner und entsteht nicht sofort wie die auf chemischer Verschiedenheit beruhende Polarisation, weil eben die Konzentrationsverschiedenheit erst merklich ist, wenn der Strom schon eine Weile gedauert hat.

71. Normalelemente.

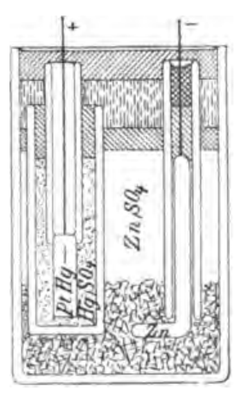


Abb. 69. Clark-Normalelement.

Einzelne galvanische Elemente zeichnen sich durch solche Konstanz ihrer EMK aus, daß sie als Normalien für Spannungsmessungen benützt werden können.

Die größte Konstanz haben die nach den Vorschriften der physikalisch-technischen Reichsanstalt ausgeführten Clark-Elemente (Abb. 69). Als positive Elektrode dient ein mit Quecksilber amalgamiertes Platinblech, das von einer Pasta aus Quecksilberoxydulsulphat umgeben und in eine Tonzelle eingeschlossen ist. Diese, sowie der unten umgebogene Zinkstab tauchen in Zinksulphatkrystalle. Der übrige Raum des gut verschlossenen Gefäßes ist mit Zinkvitriollösung ausgefüllt. Die EMK eines solchen Elementes bei der Temperatur t ist

$$E = 1{,}433 - 0{,}0012\,(t - 15).$$

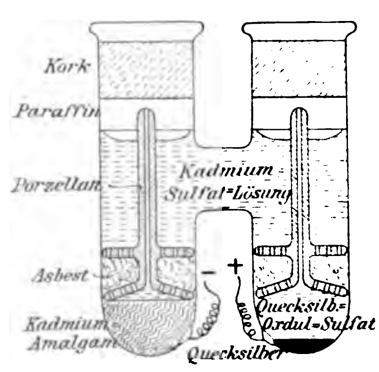


Abb. 70. Weston-Normalelement.

Das Weston-Element (Abb. 70) ist in Bezug auf seine Konstanz nicht so zuverlässig wie das Clark-Element, hat aber den Vorteil von der Temperatur nahezu unabhängig zu sein. An der positiven Elektrode befindet sich

ebenfalls Quecksilberoxydulsulphat, an der negativen aber 12,5 % Cadmiumamalgam. Die Flüssigkeit besteht aus Cadmiumsulphatlösung. Die EMK ist 1,019 Volt. Der Temperaturkoeffizient ist innerhalb der in Laboratoriumsräumen vorkommenden Temperaturgrenzen kleiner als 0,00005, also verschwindend klein gegenüber dem des Clark-Elementes.

Natürlich darf solchen Normalelementen nur ein sehr schwacher Strom entnommen werden, da sie sonst nicht unverändert bleiben.

72. Trockenelemente.

Sehr bequem sind in vielen Fällen wegen ihrer leichten Transportfähigkeit die sogenannten Trockenelemente. Die Elektroden sind von porösen Massen (Sägespäne, Gips, Infusorienerde, Fließpapier, Gelatine u. dgl.) umgeben, die mit den betreffenden Flüssigkeiten getränkt oder verkocht sind. Um das Austrocknen zu verhüten, sind sie durch eine Schicht von Wachs oder Asphalt abgeschlossen, und es bleibt nur eine kleine Öffnung zum Abzug der frei werdenden Gase.

Solche Zellen enthalten nur eine gewisse Elektrizitätsmenge, entsprechend den vorhandenen wirksamen Stoffen. Sie sind daher um so früher verbraucht, je stärkere Ströme man ihm entnimmt.

Zu Meßzwecken bedarf man häufig großer, konstant bleibender Potentialdifferenzen. Solche erhält man durch Zambonische Säulen, die aus runden Scheiben von sogenanntem Gold- und Silberpapier bestehen, die abwechselnd übereinander gelegt sind. Die metallischen Schichten bilden die Elektroden, die durch das Papier, das immer eine gewisse Feuchtigkeit enthält, voneinander getrennt sind. Solcher kann man viele hundert aufeinanderschichten, und erhält so, trotz der geringen EMK eines einzelnen Elementes, beliebig hohe Potentialdifferenzen an den Enden der Säule. Zur Stromabgabe sind sie natürlich nicht verwendbar; sie würden in kurzer Zeit unbrauchbar sein. Man muß sie daher vor einem Kurzschluß hüten.

Zur Herstellung kleinerer Potentialdifferenzen verwendet man häufig sogenannte Wasserelemente. Es sind kleine, mit Wasser gefüllte Gläschen, in welche je ein Zink- und ein Platindraht tauchen. Das gewöhnliche Wasser enthält genug gelöste Salze, um eine chemische Reaktion am Zink hervorzurufen. Zur Stromabgabe sind sie natürlich auch nicht geeignet.

73. Berechnung der elektromotorischen Kraft aus der Verbindungswärme.

Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Arbeit kann keinerlei Arbeit aus Nichts gewonnen werden, sondern jede in irgendwelcher Form auftretende Arbeit kann nur aus einer anderen Arbeitsform gewonnen werden. Es handelt sich also immer nur um Umwandlungsvorgänge, bei denen zwar nicht alles für den gewünschten Zweck nutzbar gemacht, aber nichts verloren gehen kann. Ist E die EMK einer galvanischen Zelle, J der von ihr gelieferte Strom, so ist die während einer Zeiteinheit geleistete Arbeit gleich EJ. Diese kann nur aus der chemischen Arbeit der Zelle gewonnen worden sein, da keine andere Arbeitsquelle vorhanden ist. Betrachten wir z. B. die in § 66 besprochene Rückbildung der in dem Wasserzersetzungsapparat (Abb. 62) angesammelten Gase H und O, wobei der Apparat als galvanische Zelle arbeitet, so muß die elektrische Arbeit gleich jener Wärmearbeit sein, welche aufgetreten wäre, wenn dieselbe Menge H und O außerhalb der Zelle durch Verbrennung in Wasser umgewandelt worden wären, also gleich der chemischen Verbindungswärme. Man kann demnach aus dieser die EMK des elektrolytischen Vorganges berechnen.

Nach § 59 ist die von einem Strome J in der Zeiteinheit ausgeschiedene Menge Wasserstoff 0,0000104 J Gramm. Verbindet sich dieser mit der äquivalenten Menge Sauerstoff wieder zu Wasser, so entsteht eine Wärmemenge von 0,0000104 Js Gramm-Kalor., wenn s die bei der Vereinigung von 1 g Wasserstoff frei werdende Wärmemenge ist. Multipliziert man mit $42 \cdot 10^6$, so erhält man diese Wärmemenge in absoluten Arbeitseinheiten (Erg) ausgedrückt. Drückt man auch die Stromstärke J in absoluten Einheiten (Kap. 17) statt in Ampere aus, so hat man noch mit 10 zu multiplizieren. Das sind also $0{,}0000104\ J \cdot s \cdot 42 \cdot 10^7$ absolute Einheiten. Diese Arbeit muß gleich sein der Arbeit jenes Stromes J, welcher diese Gewichtsmassen ausgeschieden hat, oder zu dessen Erzeugung diese Gewichtsmassen notwendig waren. Ist E die Spannung dieses Stromes in absoluten Einheiten, so ist seine Arbeit in der Zeiteinheit EJ.

Wir haben also die Gleichung

$$EJ = 0{,}0000104 \cdot J \cdot s \cdot 42 \cdot 10^7.$$

Und weil 10^8 absolute Einheiten gleich 1 Volt sind (Kap. 17), so ist

$$E = 0{,}0000104 \cdot s \cdot 4{,}2 \text{ Volt}.$$

Für die Verbindung von H und O zu Wasser ist

$$s = 34200 \text{ Kal.}$$

Also ist die dabei entstehende EMK, bzw. die zur Wasserzersetzung nötige Klemmenspannung

$$E = 1,48 \text{ Volt.}$$

Für einen anderen Stoff gilt, wenn b sein elektrotechnisches Äquivalent ist,

$$E = 4,2 \cdot b \cdot s \text{ Volt.}$$

Oder mit Benützug von § 59

$$E = 4,2 \cdot 0,0000104 \frac{as}{y}$$

$$E = 0,0000436 \frac{R}{y},$$

wobei $R = as$ die Wärmetönung der betreffenden Verbindung genannt wird, die für die meisten Verbindungen bereits bekannt ist.[1])

Man kann also auf diese Weise leicht die EMK einer Zelle oder die Gegenkraft der Polarisation berechnen, wenn man die chemischen Vorgänge genau kennt. Für R ist immer die algebraische Summe aller Wärmetönungen, auch jener, die bei der Lösung der Ionen auftreten, einzusetzen. Die chemischen Vorgänge sind allerdings in den seltensten Fällen so genau bekannt, daß eine genügende Übereinstimmung mit der gemessenen EMK besteht.

Beispiel: Berechnung der EMK einer Daniellschen Zelle. Bei der Auflösung von 1 g Zink entsteht eine Wärmemenge von $s = 1635$ Kal. Das elektrochemische Äquivalent ist $b = 0,000338$ (§ 59). Daher ist die dabei auftretende EMK $4,2 \cdot 0,000338 \cdot 1635 = 2,3$ Volt.

Außerdem wird aber Kupfer aus dem Kupfervitriol ausgeschieden. Dabei wird Wärme verbraucht; d. h. diese EMK wirkt der des Zinkes entgegen. Dabei ist $b = 0,00033$, $s = 881$. Also die EMK $= 4,2 \cdot 0,00033 \cdot 881 = 1,2$. Die EMK der Zelle ist also $2,3 - 1,2 = 1,1$.

Die letzte Gleichung genügt jedoch nur dann zur Berechnung der EMK einer elektrolytischen Zelle, wenn ihre EMK von der Temperatur unabhängig ist. In einem aus verschiedenen Leitern zusammengesetzten Stromkreis tritt eine EMK auf, wenn die Berührungsstellen verschiedene Temperatur haben. Hier wird also Wärme unmittelbar in Elektrizität umgesetzt. Tritt dies in einer elektrolytischen Zelle ein, so addiert oder subtrahiert sich diese EMK von der durch den chemischen Vorgang erzeugten EMK.

---

[1]) Naumanns Lehr- und Handbuch der Thermochemie.

Die Größe dieser EMK ist ausgedrückt durch $T\frac{dE}{dT}$, wenn T die absolute Temperatur (von — 270° an gerechnet) bedeutet. Der Differentialquotient $\frac{dE}{dT}$ gibt die Änderung dE derEMK an, wenn sich die Temperatur um dT ändert, das ist also der Temperaturkoeffizient der Zelle hinsichtlich der EMK (nicht hinsichtlich des Widerstandes der Lösung). Für das Clark-Element (§ 71) ist er z. B. 0,001. Diese EMK kommt zu der chemischen hinzu und daher lautet dann die obige Gleichung

$$E = 0{,}0000436\,\frac{R}{y} + T\frac{dE}{dT}.$$

Das ist die Gleichung von Helmholtz. van't Hoff und Nernst sind auf anderen Wegen zu anderen Gleichungen für die EMK einer elektrolytischen Zelle gekommen. Darauf einzugehen, würde den Rahmen dieses Buches überschreiten. Es muß daher auf die Lehrbücher der Elektrochemie verwiesen werden.

74. Akkumulatoren.

Die Akkumulatoren beruhen auf der Umkehrbarkeit der chemischen und elektrischen Erscheinungen, oder, was auf dasselbe herauskommt, auf der Nutzbarmachung der Polarisation, wobei mit Einrechnung der unvermeidlichen Verluste das Gesetz von der Erhaltung der Arbeit gilt. Der Wasserzersetzungsapparat (Abb. 62), bei dem die Gase getrennt aufgefangen werden, ist das älteste Beispiel dieser Art. Denn wie in § 66 ausgeführt wurde, vereinigen sich die ausgeschiedenen Gase wieder zu Wasser, wenn die Elektroden durch einen Leiter geschlossen werden. Man nennt diesen Strom Entladestrom, während derjenige, welcher vorher die Zersetzung bewirkt hat, Ladestrom genannt wird. Da die EMK der Polarisation der aufgedrückten Spannung entgegengerichtet ist, hat auch der Entladestrom entgegengesetzte Richtung wie der Ladestrom.

Viel besser eignen sich zu diesem umkehrbaren Prozesse Bleiplatten in verdünnter Schwefelsäure. Wird ein Strom durchgeschickt, so oxydiert der frei werdende Sauerstoff die Anode zu Bleisuperoxyd PbO_2, während der Wasserstoff die oberflächliche, natürliche Oxydschicht der Kathode zu metallischem Blei reduziert. Verbindet man dann die beiden Platten nach Ausschaltung der Stromquelle, so entsteht ein Strom in entgegengesetzter Richtung (Entladung), wobei jetzt der Wasserstoff an der früheren Anode auftritt, und das Bleisuperoxyd mit Hilfe der Schwefelsäure zu Bleisulphat reduziert

wird (Abb. 71), während das Blei der anderen Platte zu Bleisulphat oxydiert wird. Der Strom hört auf, wenn beide Platten gleich sind. Dies ist der ideale, chemische Vorgang; in Wirklichkeit werden neben Blei-Sulphat und -Superoxyd noch andere Oxyde (PbO und Pb_2O_3 gebildet, während H und O frei werden und in Form von Bläschen aufsteigen.

Da der Akkumulator abwechselnd als Zersetzungszelle und als galvanische Zelle arbeitet, bezeichnet man, um Verwechslungen zu vermeiden, die Platten nach ihrer Polarität als positive und negative. Denn wie aus Abb. 71 hervorgeht, bleibt die Polarität bei der Ladung und Entladung ungeändert, nur die Stromrichtung ist jedesmal eine andere. Der Wasserstoff des Elektrolyten wandert nach § 56 immer in der Richtung des Stromes, das SO_4-Radikal gegen diese Richtung. Die in dem unteren Teil der Abb. 71 eingezeichnete Maschine *M* arbeitet als Stromerzeuger (Lademaschine), wenn ihre EMK höher ist als die EMK des Akkumulators, dagegen als Stromverbraucher (Motor), wenn sie kleiner ist, als die des Akkumulators.

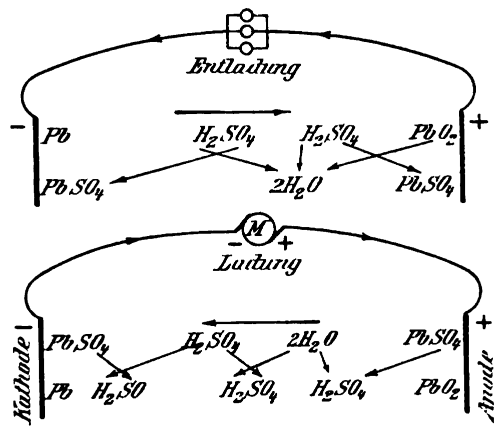


Abb. 71. Entladungs- und Ladungsvorgang beim Bleiakkumulator.

Bei neuen Bleiplatten haben die anfänglichen Bleioxyd- und Bleisulfatschichten nur geringe Dicke. Bei wiederholten Ladungen und Entladungen werden sie immer dicker, und man erhält schließlich Platten mit dicken, porösen Schichten (aktive Masse). Solche brauchen bei gleicher Stromstärke längere Zeit zur Ladung und liefern dafür bei der Entladung längere Zeit Strom. Es steigert sich also ihre Aufnahmefähigkeit, oder, wie man auch sagt, ihre Kapazität. Das Wort Kapazität hat hier nicht dieselbe Bedeutung wie bei einem Kondensator, denn nicht die Elektrizität wird hier angesammelt, wie auf den Platten eines Kondensators, sondern die Arbeit, indem die zugeführte elektrische Arbeit in chemische Arbeit umgewandelt wird, und hier verbleibt, solange nicht ein Entladestromkreis geschlossen und dadurch Gelegenheit zur Rückverwandlung in elektrische Arbeit gegeben wird.

Das abwechselnde Laden und Entladen in der Absicht, die wirksamen Schichten der Platten dicker zn machen, nennt man das Formieren des Akkumulators (Plantè). Um diesen Vorgang abzukürzen, bedeckte Faure die Bleiplatten mit einer Schicht von Mennige ($Pb_3 O_4$). Diese wird beim ersten Laden einerseits in metallisches Blei, andererseits in Superoxyd verwandelt. Da diese Schichten leicht abfallen, verwendet man heute Bleigitter, in welche ein dicker Teig aus Mennige und Bleiglätte hineingepreßt wird. Wie aus Abb. 71 ersichtlich ist, erfolgt die Umwandlung der negativen Platte von metallischem Blei in Sulfat und umgekehrt, während die Umwandlung der positiven Platte von Superoxyd in Sulfat und umgekehrt stattfindet. Infolgedessen wird diese lockerer als jene und zerfällt schließlich, während jene noch brauchbar ist. Um ihr daher größere Festigkeit zu geben, wird jetzt die positive Platte meist aus metallischem Blei hergestellt. Da aber das vollständige Formieren derselben zu lange dauern würde, versieht man die Oberfläche mit feinen Rippen und streicht in diese eine dünne Schicht von Oxyd. Diese fällt während des Betriebes allmählich heraus, während sich das metallische Blei in immer tieferen Schichten zu aktiver Masse formiert.

Die EMK des Bleiakkumulators hängt von der Konzentration der Säure ab. Sie beträgt nach Streintz bei einer Konzentration von 86 g Schwefelsäure in einem Liter Flüssigkeit 1,9 Volt, bei 300 g in einem Liter 2,02 Volt, und bei 685 g 2,24 Volt. Daraus erklärt es sich, warum bei der Ladung die EMK steigt, bei der Entladung aber sinkt, selbst wenn die chemische Umwandlung noch nicht vollständig stattgefunden hat. Denn aus der Abb. 71 ersieht man, daß bei der Ladung eine Zunahme der Konzentration stattfindet, weil neue $H_2 SO_4$ Molekeln entstehen, während Wassermolekeln verschwinden, daß hingegen bei der Entladung eine Verminderung der Konzentration stattfindet, weil $H_2 SO_4$ Molekeln verschwinden, während Wassermolekeln neu entstehen. Würde die Entladung bis zur vollständigen chemischen Umwandlung fortgesetzt werden, so würde die EMK natürlich plötzlich auf Null sinken, was aber im Interesse der Haltbarkeit der Platten nicht stattfinden darf.

Bei der Ladung muß die angelegte Spannung (Klemmenspannung) um den Betrag des Spannungsabfalles JW im Elektrolyten größer sein als die EMK. Umgekehrt ist bei der Entladung die Klemmenspannung um den Spannungsabfall kleiner als die EMK. Abb. 72[1]) zeigt die Abnahme der EMK und der Klemmenspannung

[1]) Abb. 72 und 73 nach einem Prospekt der Kölner Akkumulatorenwerke Gottfried Hagen.

mit der Zeit für zwei verschiedene Stromstärken. Abb. 73 zeigt die Zunahme der EMK und Klemmenspannung desselben Akkumulators bei der Ladung. Der senkrechte Abstand zwischen den zusammengehörigen Schaulinien ist der Spannungsabfall im Akkumulator. Im Interesse der Haltbarkeit der Platten soll die Entladung nicht unter 1,95 Volt sinken. Die Abnahme der EMK bei der Entladung erfolgt anfangs sehr rasch, dann langsamer und

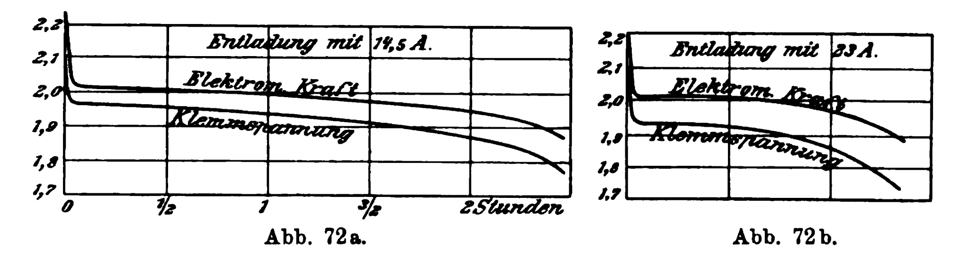


Abb. 72a. Abb. 72b.

schließlich wieder rascher. Die Zunahme der EMK bei Ladung erfolgt anfangs rasch, dann langsamer; schließlich steigt sie plötzlich auf 2,4 bis 2,45 und bleibt auf diesem Wert, selbst wenn die Ladung noch so lange fortgesetzt wird. Das ganze Bleisulfat ist umgewandelt und daher findet jetzt nur eine Zersetzung der Schwefelsäure unter Abscheidung von 2 H und O (Knallgas) nach dem in Abb. 61 dargestellten Vorgang statt. Wichtig ist, daß die Ladung

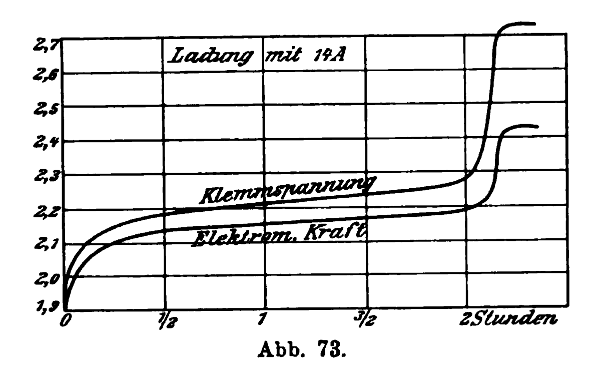


Abb. 73.

bis zur Umwandlung des ganzen Sulfates fortgesetzt wird, da sich sonst feste Krusten in kristallinischer statt schwammiger Form daraus bilden, die sich nur schwer umwandeln.

Mißt man die EMK gleich nach einer Unterbrechung der Entladung und eine Weile später, so bemerkt man eine kleine Zunahme; man sagt, der Akkumulator erholt sich. Der Grund liegt in einer während der Entladung aufgetretenen Konzentrationspolari-

sation (§ 70). Denn wie aus Abb. 71 zu ersehen ist, findet die Umwandlung der Schwefelsäure in Wasser, also die Abnahme der Konzentration hauptsächlich an der positiven Platte statt. Infolgedessen tritt während der Entladung eine Gegen-EMK auf. Nach Unterbrechung der Entladung findet aber durch Diffusion ein Ausgleich der verschiedenen Konzentrationen statt und dadurch verschwindet diese Gegen-EMK. Die wirkliche EMK eines Akkumulators kann man also erst messen, nachdem er eine Weile stromlos war.

Die Aufnahmefähigkeit eines Akkumulators ist bestimmt durch jene elektrische Arbeit, welche er bei der Entladung abgeben kann. Der Wirkungsgrad ist gleich dem Verhältnis der abgegebenen zur aufgenommenen Arbeit. Er liegt zwischen 75 % und 85 %. Für praktische Anwendung kann man aber nur mit 70—75 % rechnen. Die Fabrikanten der Akkumulatoren geben aber Aufnahmsfähigkeit und Wirkungsgrad in Amperestunden an. Dieser Wirkungsgrad ist viel höher als der auf die Arbeit bezogene, weil die Klemmenspannung bei der Entladung kleiner ist als bei der Ladung, was bei den Angaben in Amperestunden außer Betracht bleibt. Der größte Teil des Verlustes besteht in der dem inneren Widerstande entsprechenden Stromwärme, der kleinere aus chemischen Verlusten (Verlust an aktiver Masse, Knallgasbildung durch Wasserzersetzung).

75. Elektrische Kataphorese (Mitführung).

Wird in eine U-förmig gebogene Kapillarröhre Wasser gebracht, und werden von beiden Enden Platindrähte als Elektroden eingetaucht, so findet bei Anlegung einer hohen Spannung eine Verschiebung des Wassers in der Richtung des Stromes statt, so daß das Niveau an der negativen Elektrode höher steht, als an der positiven. Teilt man ein Gefäß (Abb. 74) durch eine poröse Wand in 2 Abteilungen und schickt Strom hindurch, so wird das Wasser durch die poröse Wand von der positiven Abteilung nach der negativen überführt. Die Menge des überführten Wassers ist der Stromstärke ungefähr proportional. Auch andere Flüssigkeiten, wie Alkohol, Kupfervitriol, werden in gleicher Weise überführt; verdünnte Schwefelsäure nicht; einige Flüssigkeiten werden auch in entgegengesetzter Richtung überführt. Treibt man umgekehrt eine solche Flüssigkeit durch eine poröse Wand, so entsteht ein Strom, den man als Strömungs-

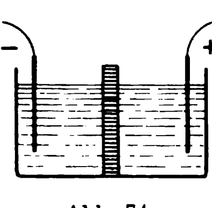


Abb. 74.

strom bezeichnet. Der Grund der Erscheinung liegt in der Reibung der Flüssigkeit an der Wand. Da die berührte Wandfläche bei einer porösen Wand am größten ist, ist hier die Wirkung am stärksten. Die elektrische Mitführung ist nichts anderes, als die Umkehrung dieser Erscheinung. Die elektrische Mitführung hat eine gewisse technische Bedeutung zur Austrocknung von Stoffen, wie z. B. Torf, da die Wirkung etwa 50% stärker ist, als wenn die gleiche Arbeit in Form von Wärme zur Austrocknung benützt wird; ferner zur Wasserentziehung aus Emulsionen (Milch, Blut).

Fünftes Kapitel.

Magnetische Wirkungen des Stromes.

76. Amperesche Regel. Das magnetische Feld des Stromes.

Ein zu einer Magnetnadel paralleler Strom lenkt diese ab, indem er sie senkrecht zum Stromleiter zu stellen sucht. Die Amperesche Regel bestimmt die Richtung der Ablenkung: sie lautet in etwas abgeänderter Form: Man lege die rechte Hand so an den Stromleiter, daß die Fingerspitzen in der Richtung des Stromes zeigen, und die innere Handfläche dem Magnete zugekehrt ist; dann wird der Nordpol des Magnetes in der Richtung des weggespreizten Daumens (also nach links) abgelenkt.

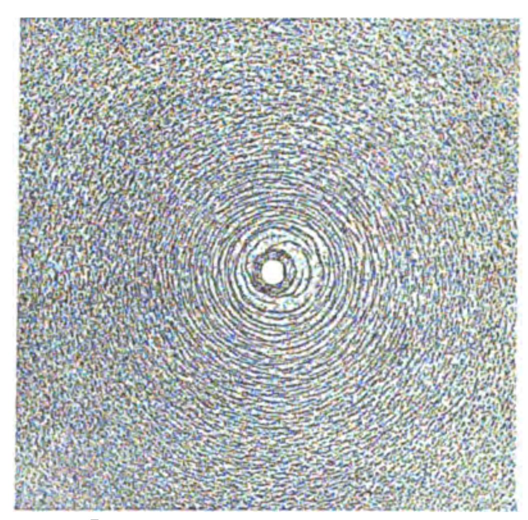


Abb. 75. Magnetisches Feld eines Stromes.

Aus der Ablenkung eines Magnetes durch den Strom folgt, daß dieser ein magnetisches Feld besitzt; man kann es wie in § 5

sichtbar machen, wenn man Eisenfeilspäne auf ein steifes Papier streut und den Stromleiter senkrecht durchsteckt (Abb. 75). Die magnetischen Kraftlinien sind konzentrische Kreise, deren Ebenen senkrecht zum Stromleiter sind. In räumlicher Darstellung umgeben sie natürlich den Leiter auf seiner ganzen Länge (Abb. 76). In diesen Figuren sind nur die innersten Kraftlinien sichtbar; in Wirklichkeit aber erstrecken sie sich, immer weniger werdend, bis ins Unendliche, wo ihre Dichte Null ist.

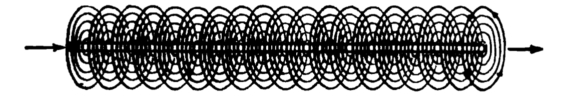


Abb. 76. Magnetisches Feld eines Stromes (perspektivisch).

Da die Niveauflächen nach § 15 in jedem Punkte senkrecht zu den Kraftlinien stehen, so folgt aus den Fig. 75 und 76, daß die magnetischen Niveauflächen eines geradlinigen Stromes ebene Flächen sind, die in der Richtung der Radien der Kraftlinien verlaufen und sich sämtlich in der Achse des Stromleiters schneiden.

Daß die magnetischen Kraftlinien eines Stromes Kreise sind, gilt natürlich nur, wenn keine anderen störenden Felder vorhanden sind. Sind solche vorhanden, so entsteht ein resultierendes Feld, dessen Kraftlinien verschieden gestaltete, aber immer geschlossene Kurven sind, wie die Abbildungen 151 und 152 für zwei parallele Ströme zeigen; im Gegensatz zu den elektrischen Kraftlinien, die niemals geschlossene Kurven sind, sondern auf einer positiven Ladung den Anfang und auf einer negativen das Ende haben.

Da von jeder Elektrizitätsmenge elektrische Kraftlinien ausgehen, so müssen solche auch von jedem stromführenden Leiter ausgehen. Ihr Ende finden sie entweder auf einem Stromleiter von entgegengesetzter Polarität oder einem anderen leitenden Körper, auf dem sie eine entgegengesetzte Elektrizitätsmenge induzieren, oder im Unendlichen. Nach § 16 müssen die elektrischen Kraftlinien senkrecht von der Leiteroberfläche ausgehen. Sind keine anderen, störenden Felder vorhanden, so verlaufen sie radial; und immer sind sie senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien. Außer dem magnetischen hat also jeder stromführende Leiter auch noch ein elektrisches Feld. Die Dichte der elektrischen Kraftlinien oder die Stärke des elektrischen Feldes hängt ab von dem Potentialgefälle, das senkrecht zur Oberfläche des Leiters herrscht. Zwischen zwei nahe nebeneinander befindlichen Leitern von entgegengesetzter Polarität ist die Feldstärke gleich der Potentialdifferenz, dividiert durch den Abstand. Daher ist die elektrische Kraftliniendichte bei

einem Strome von niedrigem Potential, oder zwischen zwei Stromleitern von kleiner Potentialdifferenz (Spannung) sehr klein, so klein, daß man das elektrische Feld eines solchen Stromes neben seinem magnetischen gar nicht beachtet. Anders ist es bei Strömen von hoher Spannung, wo das elektrische Feld für die Isolation maßgebend ist (§ 231).

77. Bewegungsvorrichtungen.

Nach der in § 4 gegebenen Definition der Kraftlinien muß ein magnetischer Nordpol beständig in der durch die Amperesche Regel bestimmten Richtung den Stromleiter umkreisen. Da aber ein einzelner Pol unmöglich ist, und der Südpol gleichzeitig die entgegengesetzte Richtung einschlagen will, so ist keine fortschreitende Bewegung, sondern nur eine Drehung des Magnetes möglich mit dem Bestreben, sich senkrecht zum Strome zu stellen. Es gelingt nur dann eine beständige Bewegung, wenn der eine Pol der Einwirkung des Stromes entzogen wird, wie es z. B. bei dem in Abb. 77 abgebildeten Apparate der Fall ist. Zwei fest verbundene Stabmagnete *ns* schweben

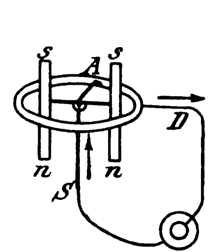


Abb. 77. Drehung eines Magnetes um einen Strom.

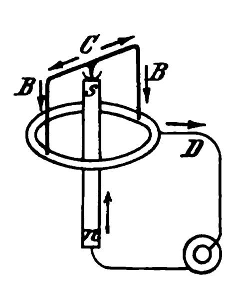


Abb. 78. Drehung eines Stromleiters um einen Magnet.

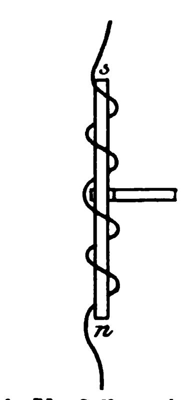


Abb. 79. Selbsttätige Aufwickelung eines Stromleiters auf einen Magnet.

mittels einer Spitze auf einem Quecksilbernäpfchen, das von der Stütze *S* getragen wird. Von der Mitte des Verbindungsstückes reicht ein Metallarm *A* in eine Quecksilberrinne. Der Strom geht durch die Stütze *S* und durch *A* in die Quecksilberrinne und von da durch den Draht *D* zurück. Die beiden Nordpole befinden sich also im Felde des durch *S* fließenden Stromes und werden daher von diesem im Sinne der Ampereschen Regel um *S* gedreht. Die Südpole *ss* können das nicht hindern, da sie keinen Stromleiter neben sich haben.

Steht umgekehrt ein Magnet fest, während der Stromleiter beweglich ist, so wird letzterer natürlich in entgegengesetzter Richtung abgelenkt. Eine solche Vorrichtung zeigt Abb. 78. Ein Draht *BCB* schwebt mittels einer Spitze auf einem Quecksilbernäpfchen, das von dem Magnete *ns* getragen wird. Die Enden reichen in eine Quecksilberrinne, die an die Stromquelle angeschlossen ist. Bei Stromdurchgang werden die beiden senkrechten Leiterstücke entgegen der durch die Amperesche Regel bestimmten Richtung um den festen Magnetpol *s* gedreht. Ein noch schöneres Beispiel ist der rotierende Lichtbogen (Abb. 336) und der auf einen Stabmagnet sich aufwickelnde Leiter (Abb. 79). Läßt man nämlich neben einem Stabmagnet *ns* ein sehr dünnes Kupferband (oder Kupferlitze) herabhängen und schickt plötzlich einen Strom hindurch, so wird es vom Nordpol in dem einen, vom Südpol im anderen Sinne abgelenkt und wickelt sich daher spiralförmig um den Magnetstab.

78. Die Kraft zwischen einem Stromelement und einem Magnetpol.

Das Gesetz von Biot und Savart bestimmt die Größe der zwischen einem unendlich kurzen Stück dl eines Stromleiters mit der Stromstärke i und einem Magnetpol m wirksamen Kraft dF. Es lautet (mit Beziehung auf Abb. 80)

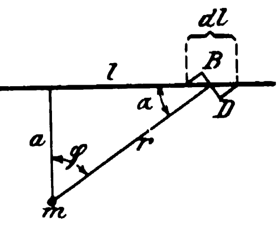


Abb. 80.

$$dF = \frac{i \cdot m \cdot dl \cdot \sin\alpha}{r^2} \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

Führt man für $\frac{m}{r^2}$ die Feldstärke des Poles m ein, die wir jetzt zum Unterschied von der Feldstärke des Stromes mit $\mathfrak{H}_m$ bezeichnen, so ist

$$dF = \mathfrak{H}_m \cdot i \cdot dl \cdot \sin\alpha \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

Die Richtung dieser Kraft ist (abweichend von der zwischen 2 elektrischen oder zwischen 2 magnetischen Massen wirkenden Kraft) nicht die Verbindungslinie zwischen m und dl, sondern die Senkrechte zu der durch m und dl gelegten Ebene und wird durch die Amperesche Regel bestimmt.

Ist $\alpha = 0$, so ist auch $dF = 0$; d. h. zwischen einem in der Verlängerung des Stromleiterstückes dl liegenden Pol und diesem besteht keine Kraft.

Zerlegt man das Stromelement dl in zwei Komponenten, eine senkrecht zu r und eine in der Richtung von r (Abb. 80), so ist $dl \sin\alpha = BD$ und daher $dF = \mathfrak{H}_m \cdot i \cdot \overline{BD}$, d. h. die Kraft geht nur von der auf r senkrechten Komponente des Leiterstückes aus.

79. Die Kraft zwischen einem unendlich langen Strom und einem Magnetpol.

Aus dem vorstehenden Grundgesetz erhält man die Kraft F zwischen einem unendlich langen geradlinigen Strom von der Stärke i und einem Magnetpol m, wenn man die Wirkungen der unendlich vielen Elemente dl summiert. Das geschieht durch Integration von $-\infty$ bis $+\infty$.

$$F = \int dF = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{im \sin\alpha}{r^2}\, dl.$$

Der leichteren Integration wegen wollen wir α durch φ und r durch a (d. i. der senkrechte Abstand der Masse m vom Stromleiter) ausdrücken.

Es ist nämlich (Abb. 80)

$$\alpha = 90 - \varphi \qquad \text{also} \qquad \sin\alpha = \cos\varphi,$$

$$r = \frac{a}{\cos\varphi}$$

$$l = a \operatorname{tg}\varphi \qquad \text{also} \quad dl = \frac{a}{\cos\varphi^2}\, d\varphi$$

$$\text{also } F = \frac{im}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi.$$

Die Grenzen des Integrals sind jetzt $\frac{\pi}{2}$, weil der Winkel φ veränderlich ist; und dieser ist für den einen Grenzfall, wo dl rechts im Unendlichen liegt $+90^0$, für den anderen, wo dl links im Unendlichen liegt -90^0. Führt man die Integration aus, so ist

$$F = \frac{im}{a} \sin\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{im}{a}(1+1) = \frac{2\,im}{a} \quad . \quad (43)$$

Diese Formeln gelten angenähert auch für ein endliches, geradliniges Leiterstück, wenn der Abstand a klein ist gegenüber der Länge des Leiterstückes.

Aus der vorletzten Gleichung erhält man die Arbeit, die vom Strom geleistet wird, wenn sich ein einzelner Pol einmal um den Stromleiter herumbewegt, indem man die Kraft mit dem Weg multipliziert. Da dieser Weg ein Kreis vom Radius a ist, so ist die Arbeit

$$A = F\, 2\pi a = 4\pi i m.$$

80. Magnetische Feldstärke eines Stromes in seiner nächsten Umgebung.

Nach § 4 ist die magnetische Feldstärke nichts anderes als die auf eine magnetische Masseneinheit in der Richtung der Kraftlinien wirkende Kraft. Wir finden daher die magnetische Feldstärke des Stromelementes dl aus Gl. 41 wenn wir eine Masseneinheit in einem Punkte O (Abb. 81) annehmen, der in senkrechter Entfernung a von dl liegt. Durch diesen Punkt geht die von dem Stromelement dl herrührende, kreisförmige Kraftlinie, deren Radius a ist. Da jetzt $\alpha = 90^0$ ist, so folgt aus Gl. 41 für die Feldstärke $\mathfrak{h}_i$ des Stromelementes dl

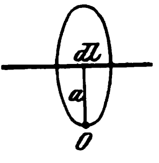


Abb. 81.

$$\mathfrak{h}_i = \frac{i \cdot dl}{a^2},$$

und für die Feldstärke $\mathfrak{H}_i$ eines im Vergleiche zu a langen Leiters aus Gl. 43

$$\mathfrak{H}_i = \frac{2i}{a},$$

und für die Kraft F zwischen diesem Leiter und einem Magnetpol m

$$F = m\,\mathfrak{H}_i.$$

Diese Formel ist gleichlautend mit der Gl. 4 (§ 4) für die Kraft, die auf einen Pol m in einem magnetischen Felde $\mathfrak{H}$ ausgeübt wird. Das war auch nicht anders zu erwarten, denn für den Pol m ist es gleichgültig, ob das magnetische Feld, in dem er sich befindet, von einem Strom oder von einem anderen magnetischen Pol herrührt.

Es ist zu beachten, daß in den Formeln für die Feldstärke und die Kraft eines Leiterstückes die Länge desselben nicht vorkommt. Sie gelten eben strenge genommen nur für solche Punkte, deren Abstand a vom Stromleiter gegen die Länge des Leiterstückes verschwindend klein ist. Für Punkte größeren Abstandes gelten diese Formeln nur näherungsweise.

Beispiel: Um die Feldstärke $\mathfrak{H}_i$ in absoluten Einheiten, d. h. in Kraftlinien pro cm² zu erhalten, müssen alle Größen, also auch die Stromstärke i in absoluten Einheiten ausgedrückt werden. Da 1 Ampere = 0,1 absol. Einh. (Kap. 17) ist, so ist die Feldstärke eines Stromes von 1 Ampere in 0,5 cm Abstand von der Achse des Leitungsdrahtes

$$\mathfrak{H}_i = \frac{2 \cdot 0,1}{0,5} = 0,4.$$

Befindet sich an dieser Stelle ein Magnetpol $m = 1000$, so ist die Kraft, die ihn um den Leiter herumzutreiben sucht,

$$F = m\,\mathfrak{H}_i = 1000 \cdot 0,4 = 400 \text{ Dyn} = \frac{400}{980} \text{ Grammgewicht} = 0,4 \text{ Grammgewicht.}$$

81. Magnetische Feldstärke einer geschlossenen Stromfigur.

Abb. 82 zeigt das räumliche magnetische Feld eines zu einer geschlossenen Figur gebogenen Stromes (Stromfläche) andeutungsweise. Es ergibt sich ohne weiteres aus Abb. 76, wenn man sich den dort gezeichneten Stromleiter zusammengebogen denkt. In der Horizontalebene ist es ausführlich gezeichnet, und man erkennt daraus, daß es in der Mitte nahezu homogen ist, weil auf ein kurzes Stück die Kraftlinien parallel sind. Bringt man in diese Ebene ein mit Eisenfeilspänen bestreutes Kartonpapier, so erhält man das in Abb. 152 abgebildete Kraftlinienbild zweier Ströme von entgegengesetzter Richtung. Man erkennt ferner, daß das Feld einer geschlossenen Stromfigur identisch ist mit dem einer gleich großen magnetischen Platte oder Schale, d. h. mit einer Eisenplatte, welche auf der einen Seite mit positiven, auf der anderen mit negativen Magnetismus gleichmäßig belegt ist; denn die Kraftlinien der Stromfläche gehen ebenfalls von einer Seitenfläche aus und kehren im Bogen zur anderen zurück. Die Bedingungen, unter welchen eine Stromfläche durch eine magnetische Platte auch quantitativ ersetzt werden kann, werden wir später (§ 86) kennen lernen. Welche Seite positiv und welche negativ magnetisch zu denken ist, lehrt die Amperesche Regel, wenn man die Hand so an den Stromleiter legt, daß die innere Handfläche dem Mittelpunkt der Stromfläche zugekehrt ist. Auf der Daumenseite befindet sich die positive Seite der Stromfläche. Steht sie dem Südpol eines

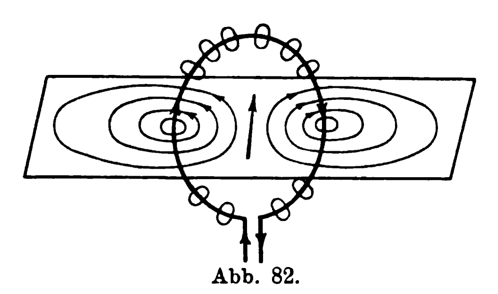


Abb. 82.

Magnetes gegenüber, so wird die Stromfigur von ihm angezogen, steht sie einem Nordpol gegenüber, so wird sie abgestoßen.

Da parallel oder nahezu parallel verlaufende Kraftlinien sich gegenseitig abstoßen (§ 5), so folgt aus Abb. 82, daß auf einen vom Strom durchflossenen Leiter, der eine geschlossene Figur oder einen Bogen bildet, eine Kraft ausgeübt wird, welche die Figur oder den Bogen zu erweitern strebt.

Ist die Stromfigur ein Kreis, so ist die auf einen im Mittelpunkt befindlichen Magnetpol m ausgeübte Kraft und die Feldstärke im Mittelpunkt leicht zu berechnen. Man hat die Summe aller dF zu bilden, die von allen Stromelementen dl, aus denen der Kreis besteht, ausgeübt werden. Da in diesem Falle für alle Teile des Stromes $\alpha = 90$, also $\sin\alpha = 1$ und r gleich dem Radius des Kreises ist, also keine veränderliche Größe vorkommt, so ist die Summe aller dl gleich dem Umfange des Kreises $2\pi r$ und wir haben

$$F = \Sigma dF = \Sigma \frac{i\,m\,dl}{r^2} = \frac{2\pi i\,m}{r}.$$

Daraus folgt für die Feldstärke in der Mitte des Kreises

$$\mathfrak{H} = \frac{2\pi i}{r}.$$

Dieser Ausdruck gilt strenge genommen nur für den Mittelpunkt; angenähert aber auch für einen gewissen Raum um den Mittelpunkt, und zwar um so mehr, je größer der Radius des Kreises ist.

Besteht der Kreis statt aus einer aus N Windungen, und liegen diese so nahe beisammen, daß die Dicke und Breite des so gebildeten Ringes klein ist gegenüber dem mittleren Radius, so ist

$$F = \frac{2\pi i\,m\,N}{r} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H} = \frac{2\pi i\,N}{r}.$$

Beispiel: Die Feldstärke eines Kreisstromes vom Radius 1,5 cm, der eine Stromstärke von 1 Ampere führt, ist demnach im Mittelpunkt

$$\mathfrak{H} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1}{1{,}5} = 0{,}42 \text{ absol. Einh.},$$

also ungefähr ebenso groß wie nach dem Beispiel im vorigen Paragraphen bei einem geraden Stromleiter im Abstand von 0,5 cm.

Folgende Formeln sind manchmal für Berechnungen wichtig.

Die Feldstärke eines Kreisstromes in einem Punkte seitwärts im senkrechten Abstande a vom Mittelpunkt ist

$$\mathfrak{H} = \frac{2 r^2 \pi i}{(r^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Die Feldstärke im Mittelpunkte eines Stromrechteckes mit den Seiten $2b$ und $2d$ ist

$$\mathfrak{H} = \frac{4i\sqrt{b^2+d^2}}{bd}.$$

82. Die elektromagnetische Eigenwirkung eines Stromes.

Es ist schon im Vorhergehenden darauf hingewiesen worden, daß infolge des Bestrebens der Kraftlinien, sich gegenseitig abzustoßen, eine geschlossene Stromfigur so auf sich selbst wirkt, daß sie sich zu erweitern strebt. Macht man also einen Teil der Strombahn beweglich, indem man z. B. wie in Abb. 83 über zwei feste, blanke Leiter einen dritten legt, und schickt einen genügend starken Strom durch die so gebildete Schleife, so wird der dritte Leiter in der Richtung des Pfeiles fortgetrieben, vorausgesetzt, daß nicht an den Berührungsstellen der drei Leiter ein Zusammenschweißen durch die Stromwärme stattfindet. In elektrischen Anlagen sind Fälle beobachtet worden, wo Schmelzsicherungen von der in Abb. 84 abgebildeten Art, die nur durch die Reibung zwischen den Messer-

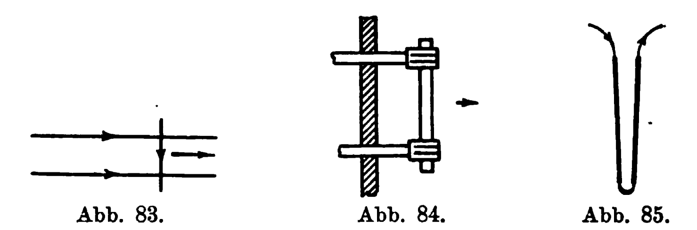
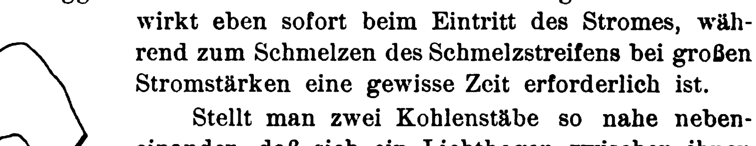


Abb. 83. Abb. 84. Abb. 85.

kontakten festgehalten werden, beim plötzlichen Auftreten großer Stromstärken infolge eines Kurzschlusses, in der Richtung des Pfeiles weggeschleudert wurden. Die elektromagnetische Kraft wirkt eben sofort beim Eintritt des Stromes, während zum Schmelzen des Schmelzstreifens bei großen Stromstärken eine gewisse Zeit erforderlich ist.



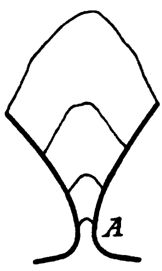


Abb. 86. Auftrieb ein. Lichtbogens an Hörnern.

Stellt man zwei Kohlenstäbe so nahe nebeneinander, daß sich ein Lichtbogen zwischen ihnen bilden läßt, so wandert er bei genügender Stärke des von oben zugeführten Stromes nach unten bis an die Spitzen der Kohlen, trotzdem die warme Luft, die er selbst erzeugt, ihn nach oben zu treiben versucht. Davon macht man bei solchen Bogenlampen Anwendung, die ihr Licht hauptsächlich nach unten aussenden sollen.

Auf der Erweiterung einer vom Strom gebildeten Schleife durch elektromagnetische Eigenwirkung beruhen die Hörnerblitzschutzvorrichtungen (Abb. 86). Tritt an der engsten Stelle (bei *A*) ein Lichtbogen auf, so wird er teils durch elektromagnetische Eigenwirkung, teils durch die von ihm aus aufsteigende heiße Luft nach oben getrieben, wobei er infolge des immer größer werdenden Abstandes zwischen den Hörnern und infolge seiner bogenförmigen Ausbildung schließlich so lang wird, bis die Spannung der Strom-



Abb. 87. Lichtbogen einer Hörnerblitzschutzvorrichtung kurz vor dem Verlöschen.

quelle nicht mehr ausreicht, um ihn aufrecht zu erhalten, so daß er verlischt. Abb. 87 zeigt einen solchen Lichtbogen (bei 12000 Volt Spannung und etwa 10 Amp.) kurz vor dem Erlöschen.

Die elektromagnetische Eigenwirkung ist auch dann schon vorhanden, wenn der Strom einen Winkel bildet (Abb. 88). Man sieht, daß die Kraftlinien auf der Innenseite des Winkels einen kleineren gegenseitigen Abstand haben, als auf der äußeren. Infolgedessen überwiegt ihre gegenseitige Abstoßung auf der Innenseite, und der

Abb. 88.

Stromleiter sucht sich zu strecken, bis er geradlinig geworden ist, in welchem Zustande dann die Abstände der Kraftlinien allseits gleich sind.

83. Ein geradliniger Strom in einem homogenen magnetischen Felde.

Die Kraft F, die zwischen einem geradlinigen Leiterstück von der Länge l mit der Stromstärke i und einem homogenen magnetischen Felde $\mathfrak{H}_m$ besteht (Abb. 89), ergibt sich aus Gl. 42 durch Summierung aller dF, die auf sämtliche Stromelemente dl ausgeübt werden. Es ist also

$$F = \Sigma\, dF = \mathfrak{H}_m\, i \sin\alpha \cdot \Sigma\, dl = \mathfrak{H}_m \cdot i \cdot l \cdot \sin\alpha.$$

Die Richtung der Kraft ist wiederum senkrecht zu der durch den Leiter und die Kraftlinien gelegten Ebene und wird durch die Amperesche Regel wie bisher bestimmt, indem man die innere Handfläche jenen positiven magnetischen Massen zukehrt, von welchen die Kraftlinien des homogenen Feldes ausgehen, so daß also die Kraftlinien, wenn man sie mit Pfeilen bezeichnet, auf die innere Handfläche auftreffen. Dann würden also, wenn der Leiter fest steht, die positiven magnetischen Massen beziehungsweise die Kraftlinien in der Richtung des Daumens bewegt werden. Steht aber das Feld fest, während der Leiter frei beweglich ist, so bewegt er sich parallel zu sich selbst in entgegengesetzter Richtung als der Daumen anzeigt.

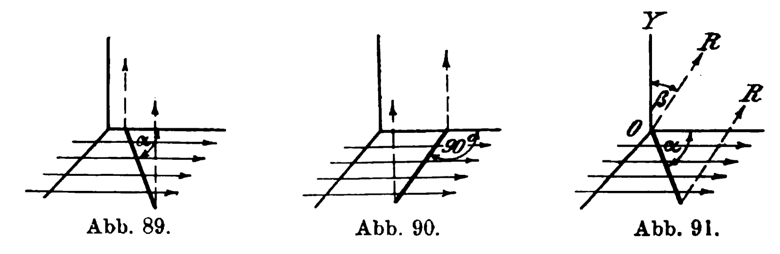


Abb. 89. Abb. 90. Abb. 91.

Liegt der Leiter so, daß er die Kraftlinien senkrecht kreuzt (Abb. 90), so ist $\sin\alpha = 1$ und daher

$$F = \mathfrak{H}_m \cdot i \cdot l.$$

Es ist aber der Fall möglich, daß der Leiter durch irgend eine Führung seiner freien Beweglichkeit beraubt ist und nur den in Abb. 91 durch R bezeichneten Weg einschlagen kann, so daß also die Bewegungsrichtung mit der zu den Kraftlinien senkrechten

Richtung Y den Winkel β einschließt. Dann geht obige Gleichung über in

$$F = \mathfrak{H}_m \cdot i \cdot l \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

weil bei dieser Bewegungsrichtung von der in der Richtung Y wirkenden Kraft nur jene Komponente zur Geltung kommt, welche in die Richtung R fällt.

Zur Erklärung der Erscheinungen und zur Aufstellung ihrer mathematischen Gesetze haben wir bisher das Feld des Stromes und das auf ihn wirkende äußere Feld auseinander gehalten, als ob jedes für sich allein bestände, ebenso wie man in der Mechanik jede Kraft für sich betrachtet, auch wenn mehrere auf denselben Körper einwirken und eine Resultierende bilden. In Wirklichkeit setzen sich beide Felder (nach § 8) zu einem resultierenden zusammen.

Abb. 92.

Abb. 92 zeigt das resultierende Feld in einer zum Stromleiter senkrechten Ebene. Da die Kraftlinien nach § 5 wie elastische Fäden wirken, die sich zu verkürzen streben, so folgt auch aus der Betrachtung dieses Bildes, daß sich der Leiter in der Richtung des Pfeiles also senkrecht zu den Kraftlinien des homogenen Feldes bewegen muß.

84. Eine geschlossene Stromfigur in einem homogenen magnetischen Felde.

Befindet sich ein zu einer geschlossenen Figur gebogener Stromleiter, z. B. ein Rechteck in einem homogenen magnetischen Felde — ein Fall, der in der Elektrotechnik häufig vorkommt —, so ist die Kraft verschieden je nach der Stellung des Rechteckes.

In Abb. 93 steht das um die Y-Achse drehbare Stromrechteck parallel zu den Kraftlinien. Die in den Stromleiter eingezeichneten Pfeile geben die Stromrichtung an. Dann wird nach der im vorigen Paragraph angegebenen Regel die linke Seite des Rechteckes nach rückwärts, die rechte Seite nach vorn bewegt. Infolgedessen muß eine Drehung im Sinne der gestrichelten Pfeile eintreten. Auf die obere und untere Seite des Rechteckes wird bei dieser Stellung keine Kraft ausgeübt, da sie parallel zu den Kraftlinien sind.

Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man die durch Abb. 92 erläuterte Wirkung der Kraftlinien darauf anwendet, wie das untere Bild der Abb. 93 zeigt, das einen Schnitt in horizontaler Richtung darstellt. Da die Kraftlinien wie elastische Fäden wirken, bewegen sie die Seiten des Rechteckes in der Richtung der Pfeile.

Die Kraft, die das Rechteck zu drehen sucht, ist nach Gl. 44

$$F = 2\mathfrak{H}_m il \cos\beta,$$

wenn l eine der Seitenlängen bezeichnet. Bei der in Abb. 93 gezeichneten Stellung ist $\beta = 0$, also $\cos\beta = 1$. Während der Drehung wächst β, und daher nimmt F ab. Ist das Rechteck in die Stellung Abb. 94, also senkrecht zu den Kraftlinien gekommen, so ist $\beta = 90^0$. und daher $F = 0$. Dagegen wirkt jetzt nach der Ampereschen Regel eine Kraft auf alle 4 Seiten nach außen in der Richtung der kleinen Pfeile, und sucht das Rechteck zu vergrößern. Das untere Bild dieser Figur zeigt wiederum einen Schnitt in horizontaler Richtung und man erkennt auch daraus den Druck nach außen.

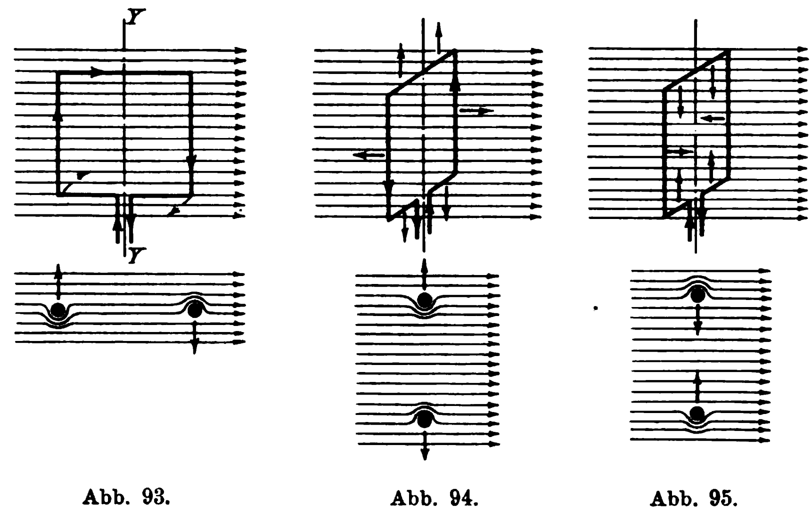


Abb. 93. Abb. 94. Abb. 95.
Stromrechteck im magnetischen Felde bei verschiedener Stellung.

Außerdem gibt es noch eine charakteristische Stellung, das ist die in Abb. 95 dargestellte, wo das Stromrechteck gegen Abb. 94 um 180⁰ verdreht erscheint, oder was dasselbe ist, der Strom entgegengesetzte Richtung hat. Das Rechteck erfährt jetzt ebenfalls keine Drehung, weil die ganze auf seine Seiten wirkende Kraft nach innen gerichtet ist. Das ergibt sich auch aus dem unteren Bild dieser Figur, das wieder den horizontalen Schnitt darstellt. Denkt man sich das Stromrechteck und das magnetische Feld durch entsprechende Magnete ersetzt, so erhält man Abb. 96. Auf den mittleren Magnet wirken von beiden Seiten abstoßende Kräfte, die sich

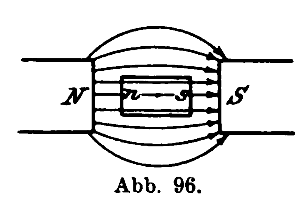


Abb. 96.

gegenseitig aufheben, da gleichnamige Pole einander gegenüberstehen. Der Magnet befindet sich also im Gleichgewicht, aber nicht im stabilen, sondern im labilen, denn bei der geringsten Verschiebung in der einen oder anderen Richtung dreht er sich um 180°. Dasselbe ist bei dem Stromrechteck Abb. 95 der Fall. Bei der geringsten Abweichung aus dieser Stellung dreht es sich, und kommt zunächst in die Stellung Abb. 93 und schließlich in die Stellung Abb. 94, wo das stabile Gleichgewicht erreicht ist.

Wir gewinnen aus dem Vorstehenden den Satz, daß eine drehbare, geschlossene Stromfigur in einem magnetischen Felde dann im Gleichgewicht ist, wenn sie möglichst viel Kraftlinien umschließt. Treffen die Kraftlinien auf die positive Seite der Stromfläche, so ist das Gleichgewicht ein labiles; treffen sie auf die negative Seite, so ist das Gleichgewicht ein stabiles. Eine Stromfigur sucht sich also in einem magnetischen Felde so zu stellen, daß möglich viel Kraftlinien auf die negative Fläche treffen. Das gilt für jede beliebige Stromfigur.

Wird die Stromfläche aus mehreren Windungen gebildet, so gilt der vorstehende Satz natürlich auch dafür.

Solche Stromrechtecke kommen bei Motoren, Drehspuleninstrumenten usw. vor, nur mit dem Unterschied, daß die das Feld erzeugenden Pole in der Regel so geformt sind, daß die Kraftlinien nahezu während der ganzen Drehung senkrecht zu den Seiten des Rechteckes verlaufen, wenigstens bis in die Nähe der Ränder, so daß fast während der ganzen Drehung $\beta = 0$ und $F = 2\mathfrak{H}_m il$ ist.

85. Das magnetische Gebläse.

Bringt man in die Nähe eines Lichtbogens einen Magnet derart, daß seine Kraftlinien den Lichtbogen kreuzen, so wird dieser abgelenkt. Nach § 78 erfolgt die Ablenkung in einer zu den Kraftlinien senkrechten Ebene, und zwar in dem durch die Amperesche Regel angegebenen Sinne. Demnach wird in Abb. 97, wo die Elektroden des Lichtbogens lotrecht stehen, und die Kraftlinien senkrecht zur Zeichenebene verlaufen, der Lichtbogen nach der Seite gedrückt. Da ein entsprechender Luftstrom die gleiche Wirkung auf den Lichtbogen ausübt, so bezeichnet man die Einwirkung eines magnetischen Feldes auf einen Lichtbogen als magnetisches Gebläse. Wird die Richtung des Stromes oder die Richtung des Feldes umgekehrt, so wird der Lichtbogen nach der entgegengesetzten Seite gedrückt. Wird die Richtung des Stromes und des Feldes

Abb. 97.

gleichzeitig umgekehrt, so wird der Lichtbogen immer nach derselben Seite gedrückt. Ein Wechselstromlichtbogen im Felde eines Wechselstromelektromagnetes, der in demselben Stromkreis liegt wie der Lichtbogen, wird mithin in derselben Weise abgelenkt, als wenn Gleichstrom durch diesen Stromkreis ginge.[1])

Wird der Lichtbogen von einem Wechselstrom erzeugt (d. h. von einem Strom, der abwechselnd hin und her geht), während das magnetische Feld immer gleiche Richtung hat, so muß der Lichtbogen bei hingehendem Strom nach der einen, bei hergehendem Strom nach der entgegengesetzten Richtung abgelegt werden. Folgen die Stromwechsel so rasch aufeinander, wie es bei den in der Elektrotechnik üblichen Wechselströmen der Fall ist, so folgen die Lichteindrücke so rasch aufeinander, daß sie in der Sinneswahrnehmung zusammenfließen, und der Lichtbogen so aussieht, als ob er in zwei Hälften zerteilt würde (Fig. 98). Dasselbe ist der Fall, wenn der Lichtbogen von einem Gleichstrom herrührt, das magnetische Feld aber von einem Wechselstrom erzeugt wird.

Abb. 98.

Das magnetische Gebläse wird in der Elektrotechnik häufig angewendet; so z. B. zum sofortigen Auslöschen der Lichtbögen bei automatischen Ausschaltern, Blitzschutzvorrichtungen, Funkenstrecken und dergl.

86. Magnetische Platte.

Aus den §§ 81 und 84 ging schon hervor, daß man die Wirkung einer Stromwindung (Stromfigur) durch die Wirkung eines Magnetes ersetzen kann. Wir wollen nun die Bedingungen, unter denen die Gleichheit der Wirkung besteht, mathematisch ausdrücken.

Das Naheliegendste ist, daß man sich die Stromfigur (Abb. 82 oder 93) ersetzt denkt durch einen Magnet von demselben Querschnitt wie die Fläche der Stromfigur und sehr geringer Länge, also durch eine magnetische Platte oder Schale (Abb. 99), die aus zwei parallelen Flächen besteht, von denen die eine mit positiver, die andere mit negativer magnetischer Masse gleichmäßig belegt ist. Die auf einer Flächeneinheit sitzende Masse wird als magne-

Abb. 99.

[1]) Davon ist Anwendung gemacht bei der vom Verfasser angegebenen Hörnerblitzschutzvorrichtung mit magnetischer Funkenlöschung der A. E. G., um ein rascheres Verlöschen des Lichtbogens zu bewirken, als es nur durch die elektromagnetische Eigenwirkung und durch den Auftrieb der erwärmten Luft geschieht.

tische Flächendichte σ, der Abstand der beiden Flächen mit λ, ihre Größe mit S bezeichnet. Dann ist (nach § 9) das magnetische Moment der Platte

$$\mathfrak{M} = \lambda \sigma S.$$

Das Produkt $\lambda\sigma$ nennt man gewöhnlich magnetische Stärke der Platte und bezeichnet es mit Φ.

Bezeichnet man mit U das Potential einer solchen Platte in bezug auf einen außerhalb der Platte gelegenen Punkt, so ergibt es sich gleich dem Produkte aus der magnetischen Stärke und dem räumlichen Gesichtswinkel ω, unter dem die Platte von diesem Punkte aus gesehen erscheint.[1] Also

$$U = \Phi\omega = \lambda\sigma\omega \quad \ldots \ldots \quad (45)$$

Befindet sich in diesem Punkte eine magnetische Masse m, so ist der Arbeitswert (potentielle Energie; Gl. 8)

$$A = \Phi\omega m.$$

87. Potential einer geschlossenen Stromfigur.

Das magnetische Potential einer geschlossenen Stromfigur (Abb. 82) mit der Stromstärke i in bezug auf einen dem Stromleiter selbst nicht angehörenden Punkt ist gegeben durch das Produkt aus der Stromstärke und dem räumlichen Gesichtswinkel ω, unter dem die Stromfläche von diesem Punkte aus gesehen erscheint.[1] Also

$$U = i\omega \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

Befindet sich in diesem Punkte eine magnetische Masse m, so ist der Arbeitswert

$$A = i\omega m \quad \ldots \ldots \quad (47)$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit denen im vorigen Paragraphen, so erkennt man, daß die magnetische Wirkung einer geschlossenen Stromfigur gleich ist der einer magnetischen Platte von gleicher Größe und gleichem Umfange, wenn

$$i = \Phi = \lambda\sigma \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

Auf die Gestalt der Platte kommt es dabei nicht an, da in diesen Ausdrücken keine Größe vorkommt, die sich auf die Gestalt der Platte bezieht, sondern nur der Gesichtswinkel, unter dem sie von dem betreffenden Punkte aus gesehen erscheint. Die Dicke λ

---

[1]) Über den Beweis dieses Satzes, der hier zu weit ab führen würde, sehe man ein Lehrbuch der theoretischen Physik nach.

der magnetischen Platte, durch die man sich die Stromfigur ersetzt denken kann, ist beliebig, da es nur darauf ankommt, daß das Produkt aus Dicke und Oberflächendichte der Stromstärke gleich ist.

Die Identität zwischen magnetischer Platte und Stromfigur gilt jedoch nicht für Punkte, die in der magnetischen Platte selbst liegen; denn ein solcher Punkt befindet sich zwischen zwei gleichmäßig mit Magnetismus belegten Flächen und unterliegt daher einer Kraft gleich $4\pi\sigma$, wenn er die Masse 1 besitzt und einer Kraft $4\pi\sigma m$, wenn er die Masse m besitzt (§ 11).

Aus Gl. 45 oder 46 ergibt sich sofort die Gestalt der Niveauflächen einer magnetischen Platte oder einer Stromfigur. Es sind jene Flächen, welche alle Punkte enthalten, von denen aus die Platte oder Stromfigur unter demselben Gesichtswinkel erscheint. Die Schnitte der Zeichenebene mit den Niveauflächen müssen Kreise sein (in Abb. 100 gestrichelt gezeichnet), deren gemeinsame Sehne durch den Schnitt der Stromfläche mit der Zeichenebene gebildet wird, weil alle über derselben Sehne aufstehenden Peripheriewinkel eines Kreises gleich groß sind. Hat man die Niveauflächen, so ergeben sich leicht die Kraftlinien, weil sie auf jenen senkrecht stehen müssen (in Abb. 100 die voll ausgezogenen Linien). Man sieht, sie verlaufen so wie in der perspektivischen Darstellung in Abb. 82.

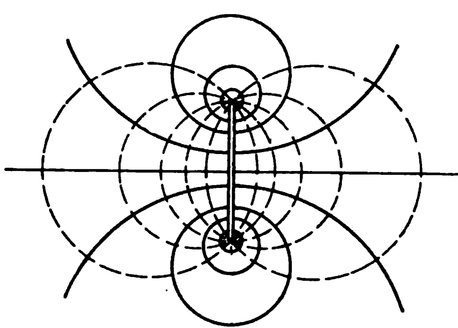


Abb. 100. Kraftlinien und Niveauflächen einer magnetischen Platte oder einer geschlossenen Stromfigur.

In Gl. 47 kann man auch die Kraftlinienmenge, welche von einem Pole m ausgehend die Stromfläche treffen, einführen, wenn man bedenkt, daß im ganzen $4\pi m$ Kraftlinien von ihm ausgehen. Diese gehen, wenn keine störenden Einflüsse vorhanden sind, in gleichmäßiger Verteilung, strahlenförmig von m aus. Da 4π der ganze räumliche Gesichtswinkel ist, so enthält der Gesichtswinkel von der Größe Eins m Kraftlinien und der Gesichtswinkel ω, $m\omega$ Kraftlinien; bezeichnen wir diese mit $\mathfrak{z}$, so ist

$$A = i\mathfrak{z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

Der magnetische Arbeitswert eines geschlossenen Stromes ist also gleich dem Produkte aus der Strom-

stärke und der Anzahl der Kraftlinien, welche die Stromfläche treffen.

Ist die magnetische Platte oder Stromfigur in einem homogenen magnetischen Felde frei beweglich, so gewinnen wir daraus denselben Satz wie in § 84. Nehmen wir an, die Fläche der Figur stände so, daß sie von der größtmöglichen Kraftlinienzahl auf der positiven Seite getroffen wird, so ist der Arbeitswert am größten. Nach § 15 bewegt sich nun die Stromfigur so, daß der Arbeitswert am kleinsten wird. Sie wird sich daher zunächst so drehen, daß $\mathfrak{z}$ null wird, d. h. bis die Fläche parallel zu den Kraftlinien ist, von da wird sie sich so weiter drehen, daß die Kraftlinien von der negativen Seite auftreffen, so daß also A negativ wird. Den kleinsten Wert erreicht A, wenn die Fläche auf ihrer negativen Seite von der größtmöglichen Kraftlinienzahl getroffen wird.

Besteht die geschlossene Figur nicht aus einer, sondern aus N Windungen, so ist

$$A = iN\mathfrak{z} \quad \quad (50)$$

88. Magnetisches Feld eines Solenoides.

Einen in Form einer Schraubenwindung gewickelten Stromleiter nennt man ein Solenoid; es ist also nichts anderes als eine Nebeneinanderreihung von Stromfiguren, der in § 81 beschriebenen Art, die alle von demselben Strom durchflossen werden (Abb. 101). Die Kraftlinien gehen ineinander über, mit Ausnahme jener, die noch in dem Zwischenraum zwischen zwei Windungen Platz finden. Ihre Anzahl ist proportional der Anzahl der Windungen. Die Abb. 102 zeigt das magnetische Feld eines Solenoides, dessen Windungen dicht aneinander liegen in einer durch die Achse gelegten Ebene. Man erkennt daraus die Ähnlichkeit mit dem Felde eines Stabmagnetes von gleicher Gestalt; nur daß man hier auch den Verlauf der Kraftlinien im Innern des Solenoides sieht. Welches Ende dem + und welches dem — Pole entspricht, lehrt die Amperesche Regel, wenn man die innere Handfläche dem Inneren des Solenoides zukehrt.

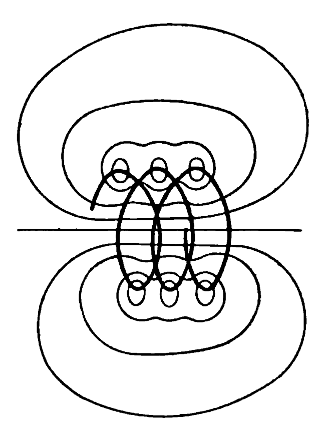


Abb. 101. Kraftlinien eines Solenoides.

Die Ähnlichkeit mit einem Stabmagnet erklärt sic daraus, daß

jede Windung durch eine magnetische Platte ersetzt werden kann. Das ganze Solenoid kann demnach als eine Nebeneinanderreihung ebensovieler gleich magnetisierter Platten betrachtet werden, als Windungen vorhanden sind (Abb. 103).

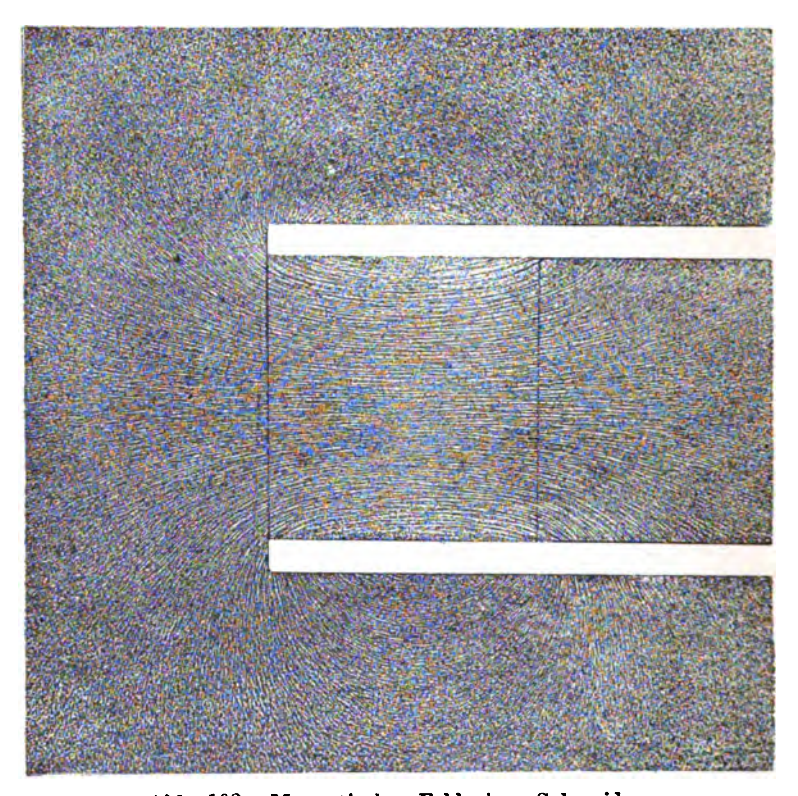


Abb. 102. Magnetisches Feld eines Solenoides.

Hat das Solenoid n Windungen auf der Längeneinheit, so ist die Dicke λ der magnetischen Platten, durch die man sich die Windungen ersetzt denken kann,

$$\lambda = \frac{1}{n}.$$

Abb. 103.

Aus Gl. 48 folgt für die magnetische Flächendichte dieser Platten

$$\sigma = \frac{i}{\lambda} = i n.$$

Befindet sich im Innern des Solenoides ein Magnetpol m, so können wir die Kraft, die vom magnetischen Felde des Solenoides

auf ihn ausgeübt wird, finden aus der Wirkung aller magnetischen Platten. Aus der Abb. 103 erkennt man, daß sich alle zusammenstossenden, mit entgegengesetztem Magnetismus versehenen, Flächen gegenseitig aufheben bis auf die beiden zu m benachbarten und bis auf die beiden Endflächen. Setzt man voraus, daß das Solenoid so lang ist, daß die Wirkung der Endflächen infolge des großen Abstandes von m vernachlässigt werden kann, so ist die gesamte Wirkung des Solenoides auf m gleich der der beiden benachbarten Flächen, also nach § 11 gleich

$$F = 4\pi\sigma m = 4\pi i n m.$$

Demnach ist das magnetische Feld in einem Punkte, der so weit von beiden Endflächen entfernt ist, daß ihre Wirkung vernachlässigt werden kann

$$\mathfrak{H} = 4\pi i n.$$

Genau gelten die beiden Formeln, wenn das Solenoid überhaupt keine Endflächen hat, also für ein ringförmiges. Bei einem solchen verlaufen die Kraftlinien innerhalb der Windungen als geschlossene Linien, wie Abb. 104 zeigt.

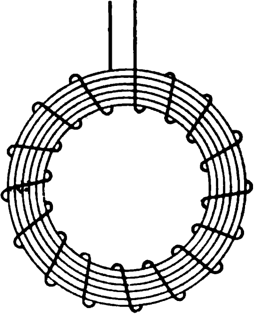


Abb. 104. Kraftlinien eines ringförmigen Solenoids.

Ist der äußere Umfang eines solchen Ringes groß gegenüber dem Durchmesser der Stromwindungen in radialer Richtung, so ist sein magnetisches Feld ein homogenes.

Um die Feldstärke in absoluten Einheiten, d. h. in Kraftlinien pro 1 cm² zu erhalten, muß auch die Stromstärke i in absoluten Einheiten ausgedrückt werden. Da 1 Ampere = 0,1 absoluten Einheiten ist, so ist

$$\mathfrak{H} = 0{,}4\,\pi i n = 1{,}257\, i n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Das Produkt in faßt man gewöhnlich zusammen und nennt es Amperewindungen pro Längeneinheit. Die Feldstärke im Innern eines im Vergleich zum Durchmesser langen Solenoides ist mithin gleich den $0{,}4\pi$ fachen Amperewindungen pro Längeneinheit.

Man kann auch die gesamte Windungszahl N und die Länge l des Solenoides einführen, denn es ist $n = \frac{N}{l}$ also

$$\mathfrak{H} = \frac{0{,}4\,\pi i N}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Ist das Solenoid nicht so lang, daß der Einfluß der Enden auf einen Punkt in der Mitte vernachlässigt werden kann, so erkennt man aus Abb. 103, daß die Endflächen auf $\mathfrak{H}$ verkleinernd wirken, weil jede der beiden Endflächen entgegengesetztes Zeichen hat, als die unmittelbar an m liegenden Flächen. Für diesen Fall ist die Feldstärke im Mittelpunkte O (Abb. 105a)

$$\mathfrak{H} = \frac{0{,}2\,\pi\,i\,N}{d}.$$

Ist das Solenoid sehr lang, so ist $d = \frac{l}{2}$, und die letzte Gleichung geht in die vorhergehende über.

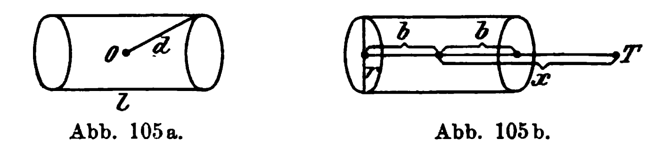


Abb. 105a. Abb. 105b.

Die Feldstärke eines Solenoides in einem auf der Achse liegenden Punkte T (Abb. 105b), dessen Abstand vom Mittelpunkt x ist, und wobei b die halbe Länge des Solenoides bedeutet, ist

$$\mathfrak{H} = 0{,}1\,\frac{\pi i N}{b}\left[\frac{x+b}{\sqrt{r^2+(x+b)^2}} - \frac{x-b}{\sqrt{r^2+(x-b)^2}}\right].$$

Das gilt auch dann, wenn der Punkt T innerhalb des Solenoides liegt. Für den Mittelpunkt ($x = 0$) geht diese Formel in die vorhergehende über, weil $\sqrt{r^2+b^2} = d$ ist.

Sechstes Kapitel.

Magnetische Induktion.

89. Magnetisierungsstärke.

Setzen wir einen gleichmäßig magnetisierten Stabmagnet voraus, so ist sein magnetisches Verhalten, durch das magnetische Moment (§ 9)

$$\mathfrak{M} = m\, l$$

bestimmt. Nach der Voraussetzung ist dann m die Menge des freien Magnetismus auf den Endflächen und l der Abstand derselben. Dieser Fall ist allerdings nur ein idealer, dient aber zur genauen Bestimmung der Begriffe.

Ist σ die magnetische Masse auf der Flächeneinheit (Flächendichte) und S die Größe der Endflächen, so ist $m = \sigma S$.

Der Versuch lehrt, daß man einen Magnet durch Zerteilung in beliebig viele kleinere Magnete zerlegen kann. Setzt man diese Teilung fort, bis man lauter Einheitswürfel erhält, so besitzen diese ein gewisses magnetisches Moment $\mathfrak{J}$, durch welches die Magnetisierung des ganzen Stückes bestimmt ist, und das man daher als Magnetisierungsstärke oder Magnetisierung kurzweg bezeichnet.[1]) Ist V der Rauminhalt des Magnetes, so ist also

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{M}}{V}.$$

Man sieht leicht ein, daß $\mathfrak{J} = \sigma$ sein muß, weil die Polstärke der Volumseinheit gleich σ, und die Länge der magnetischen Achse gleich 1 ist.

[1]) Manchmal findet man dafür auch den Ausdruck „spezifische Magnetisierung". Anderseits aber wird dieser Ausdruck auch auf das Verhältnis des magnetischen Momentes zur Gewichtsmasse des Magnetes angewendet.

90. Magnetisierung durch Verteilung oder Induktion.

Bringt man in die Nähe eines Magnetes ein Eisenstück, so wird dieses selbst zu einem Magnete, und zwar so, daß die zugewendeten Enden ungleichnamige Pole (freien Magnetismus) aufweisen; d. h. der Nordpol des Magnetes induziert im Eisen einen Südpol und umgekehrt; das Eisenstück wird polarisiert. Ganz allgemein kann man sagen, daß ein Eisenstück in einem magnetischen Felde selbst zu einem Magnete wird. Natürlich wird dadurch das frühere Feld sowohl der Gestalt als auch der Stärke nach verändert, denn es setzt sich jetzt aus zweien zusammen: aus dem ursprünglichen, induzierenden oder magnetisierenden Felde und aus dem des neu entstandenen Magnetes. Abb. 106 zeigt ein solches resultierendes Feld; N ist der induzierende, ns der induzierte Magnet. Es unterscheidet sich nicht wesentlich von dem resultierenden Felde zweier permanenter Magnete von derselben Stärke und Lage.

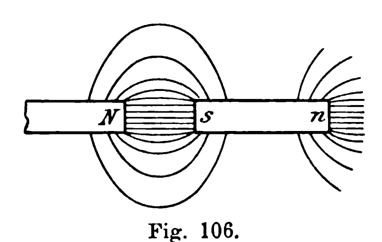


Fig. 106.

Abb. 107 zeigt die Induktion eines runden Eisenstückes, wenn es in das durch Abb. 6 dargestellte homogene Feld gebracht wird. Abb. 108

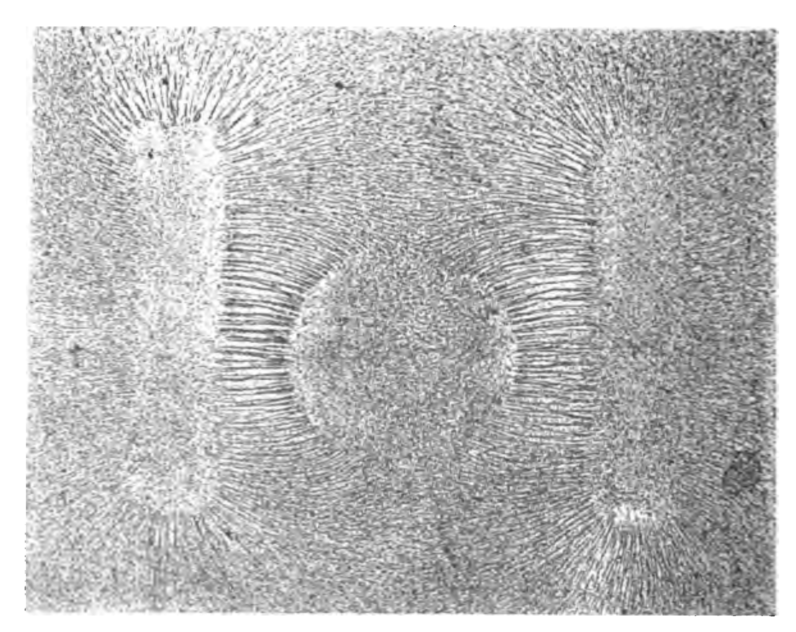


Abb. 107. Induktion eines kreisrunden Eisenstückes in einem homogenen Felde.

zeigt die Induktion eines prismatischen Eisenstückes, wenn es in das Innere des durch Abb. 102 dargestellten Solenoids gebracht wird.

Aus diesen Abbildungen gewinnt man den Eindruck, als ob die Kraftlinien vom Eisen angesaugt würden. Das kommt daher, daß das Eisen (und in ähnlicher Weise Nickel und Kobalt) eine weit größere Magnetisierungsfähigkeit hat als die umgebende

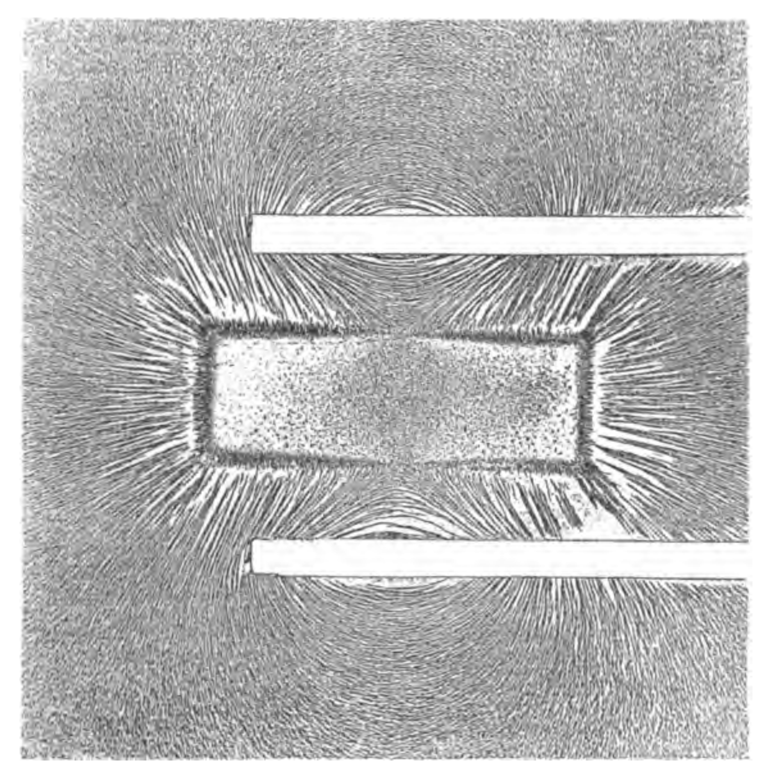


Abb. 108. Induktion eines prismatischen Eisenstückes im Felde eines Solenoides.

Luft oder irgend ein anderer Stoff. Infolgedessen ist der in ihm induzierte Magnetismus so stark, daß er in seiner Nähe über das magnetisierende Feld das Übergewicht hat. Das resultierende Feld sieht daher in der Nähe der Eisenstücke so aus, als ob sie selbstständige Magnete mit ausgeprägten Polen wären. In einiger Entfernung von den Eisenstücken hingegen überwiegt das magnetisierende Feld, so daß es nahezu unverändert erscheint, wie man aus dem Vergleich mit den Abb. 6 und 102 ersieht.

Insofern als in dem der Magnetisierung unterworfenen Eisen-

stück an einem Ende positiver, am andern Ende negativer freier Magnetismus auftritt, gleicht dieser Vorgang dem der elektrischen Influenz eines leitenden Körpers. Jedoch besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den influenzierten elektrischen und induzierten magnetischen Massen. Denn während die eine der beiden Elektrizitäten von dem Leiter, auf dem sie influenziert wurde, abgeleitet werden kann, so daß nur die andere zurückbleibt, ist dies beim Magnetismus unmöglich, da er sich auf seinem Träger überhaupt nicht bewegen kann. Infolgedessen gelten alle für elektrische Leiter in § 18 gezogenen Schlüsse für magnetisierte Körper nicht, sondern: das Potential eines magnetisierten Körpers ist nicht konstant. Der Magnetismus sitzt nicht nur an der Oberfläche, sondern auch im Innern des Körpers und infolgedessen wirken Kräfte auch auf sein Inneres. Die Kraftlinien enden und beginnen nicht auf dem magnetisierten Körper, sondern gehen durch ihn hindurch. Sie sind, wie wir schon aus § 76 wissen, geschlossene Kurven, im Gegensatz zu den elektrischen Kraftlinien, die immer Anfang und Ende haben. Die Oberfläche eines magnetisierten Körpers ist keine Niveaufläche, sondern die Niveauflächen schneiden die Oberfläche. Infolgedessen müssen die Kraftlinien nicht senkrecht zur Oberfläche stehen, wie die elektrischen Kraftlinien, sondern können jeden beliebigen Winkel mit ihr bilden.

Aus diesen Sätzen erkennt man, daß sich die magnetisierbaren Körper in einem magnetischen Felde in gleicher Weise verhalten wie nichtleitende Körper in einem elektrischen Felde. Nur in quantitativer Hinsicht bestehen Unterschiede, insbesondere der, daß die Magnetisierung nicht beliebig gesteigert werden kann, sondern eine von dem betreffenden Stoffe abhängige Grenze hat, die auch durch Anwendung der stärksten magnetisierenden Kraft nicht überschritten werden kann, während die Elektrisierung immer proportional der elektrisierenden Kraft wächst. Praktisch besteht allerdings auch da eine Grenze, weil bei fortgesetzter Steigerung der elektrisierenden Kraft schließlich der Körper zerstört wird.

Dieser Umstand, sowie der, daß es keinen Körper gibt, auf dem sich der Magnetismus bewegen kann, haben zu folgender Vorstellung über die Natur eines magnetisierbaren Stoffes geführt. Man nimmt an, daß kleine (Molekular-) Magnete in ihm enthalten sind, die im unmagnetischen Zustande regellos durcheinanderliegen, so daß ihre Gesamtwirkung nach außen null ist. Wirkt aber eine magnetische Kraft ein, so werden die Molekular-Magnete wie kleine Magnetnadeln gedreht, so daß die positiven Pole vorzugsweise nach der einen, die negativen vorzugsweise nach der anderen Seite gerichtet sind. Die Wirkung nach außen ist dann so, als ob auf

der einen Seite freier positiver, auf der anderen freier negativer Magnetismus (Pole) vorhanden wäre. Im vorigen Paragraph haben wir bereits gesehen, daß das magnetische Moment eines Einheitswürfel, oder die Magnetisierungsstärke gleich ist der Flächendichte σ des Magnetismus, d. h. der Polstärke aller Molekularmagnete eines Einheitswürfel, die nach derselben Seite gerichtet sind. Sind sämtliche vorhandenen Molekularmagnete gerichtet, so ist eine weitere Steigerung von σ unmöglich, d. h. die magnetische Sättigung des betreffenden Stoffes ist erreicht.

In § 33 haben wir zwischen wirklichen (oder wahren) und scheinbaren elektrischen Ladungen unterschieden je nachdem, ob sie auf einem Leiter sitzen und daher bewegt werden können, oder unbeweglich auf Nichtleitern. Da sich der Magnetismus auf keinem seiner Träger bewegen kann, so gibt es im Sinne dieser Unterscheidung überhaupt nur scheinbaren Magnetismus, und daher auch keinen Anfang und kein Ende der magnetischen Kraftlinien, wie schon mehrfach erwähnt.

91. Beziehung zwischen magnetisierender Kraft und Kraftliniendichte. Magnetisierungszahl und magnetische Durchlässigkeit.

Nach § 7 ist in Luft die Feldstärke gleich der Kraftliniendichte; für andere Stoffe gilt dies nicht mehr, wie sich aus folgendem ergibt.

Wenn ein prismatisches Eisenstück in ein homogenes Feld von der Stärke $\mathfrak{H}$ gebracht wird, und zwar so, daß die Endflächen senkrecht zur Kraftlinienrichtung sind, so tritt an den Endflächen freier Magnetismus auf, dessen Flächendichte σ ist. Ist S die Größe der Endflächen, so ist der gesamte freie Magnetismus auf einer Endfläche

$$m = \sigma S.$$

Wäre das Eisenstück nicht vorhanden, so wäre die Kraftlinienmenge, welche durch eine Fläche S geht, gleich $\mathfrak{H} S$. Von dem an den Enden des Eisenstückes sitzenden freien Magnetismus m kommen neue Kraftlinien hinzu, deren Menge nach § 7 gleich $4\pi m$ ist. Die gesamte Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$ ist also

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{H} S + 4\pi m.$$

Bezeichnet man die Kraftlinienmenge, welche durch die Flächeneinheit geht, d. h. die Kraftliniendichte mit $\mathfrak{B}$, so ist

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{Z}}{S} \qquad (53)$$

Dann geht die vorige Gleichung über in

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \frac{m}{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Da der Magnetismus in dem Eisenstück von dem Felde in dem es sich befindet, induziert wurde, so setzt man die Flächendichte σ dieses Magnetismus der Feldstärke $\mathfrak{H}$ proportional

$$\sigma = \varkappa \mathfrak{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Der Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ ist also ein Faktor, der das Eisen oder einen anderen Stoff in bezug auf seine Magnetisierungsfähigkeit charakterisiert. Je größer $\varkappa$ ist, desto größer ist bei gleichem $\mathfrak{H}$ der in dem betreffenden Stoff induzierte Magnetismus. Man nennt daher $\varkappa$ die Magnetisierungszahl oder das magnetische Aufnahmevermögen[1]), auch Suszeptibilität.[2])

Aus der letzten und vorletzten Gleichung folgt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\varkappa\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(1 + 4\pi\varkappa).$$

Setzt man

$$1 + 4\pi\varkappa = \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

so ist

$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Diese Gleichung besagt, daß bei konstanter magnetisierender Kraft die Kraftliniendichte um das μfache wächst; das ist z. B. der Fall, wenn bei einem Solenoid die Stromstärke konstant gehalten wird, an Stelle der Luft aber ein anderer Stoff tritt, dessen magnetische Konstante μ ist. Denn Faktor μ nennt man daher die magnetische Durchlässigkeit oder magnetische Permeabilität des betreffenden Stoffes. Da $\mathfrak{H}$ die Feldstärke bedeutet, so sieht man, daß in einem Körper, dessen magnetische Durchlässigkeit μ von 1 verschieden ist, die Kraftliniendichte nicht der Feldstärke gleich ist, sondern dem μfachen. Um Mißverständnisse zu vermeiden, bezeichnet man $\mathfrak{H}$ am besten nur als magnetisierende Kraft und merkt sich, daß diese nur in Luft gleich der Kraftliniendichte ist. Aus der letzten Gleichung folgt dann noch, daß bei Konstanthaltung der Kraftliniendichte die magnetisierende Kraft in einem Stoff von der Durchlässigkeit μ um das μfache abnimmt.

---

[1]) Nach Fr. Neumann, der diese Konstante eingeführt hat.

[2]) Nach W. Thomson, der damit den von Neumann eingeführten Ausdruck ins Englische übertragen hat.

92. Paramagnetische und diamagnetische Stoffe.

Vergleicht man Gl. 54—57 mit Gl. 30—32 auf S. 51—52, so sieht man, daß sie gleiche Form haben und daß die Magnetisierungszahl $\varkappa$ der Elektrisierungszahl ε und die magnetische Durchlässigkeit μ der Dielektrizitätskonstante ϑ entspricht. Für den luftleeren Raum ist $\mu = 1$. In der Praxis wird aber die Durchlässigkeit der Luft bei Atmosphärendruck gleich 1 gesetzt, da sie von der des luftleeren Raumes nur sehr wenig verschieden ist. Es gibt aber eine Reihe von Stoffen, deren Durchlässigkeit μ kleiner als 1 ist oder deren Magnetisierungszahl $\varkappa$ negativ ist (zufolge Gl. 57); man bezeichnet sie als diamagnetische Stoffe, während man die, deren Durchlässigkeit μ größer als 1 ist ($\varkappa$ positiv), als paramagnetische bezeichnet.

Die auffälligste Eigenschaft der diamagnetischen Stoffe ist die, daß sie in Luft von einem kräftigen magnetischen Pol nicht angezogen, sondern abgestoßen werden (vgl. § 99). Ihre wichtigsten Repräsentanten sind Wismut und Antimon.

Unter den paramagnetischen Stoffen sind drei, die sich von den übrigen durch große Magnetisierungsstärke und dementsprechend großer magnetischer Durchlässigkeit auszeichnen. Es sind dies Eisen, Kobalt und Nickel; man faßt sie nach dem ersten unter dem Namen ferromagnetische Stoffe zusammen. Ihre größte magnetische Durchlässigkeit liegt über 500, während die aller anderen paramagnetischen Stoffe zwischen 1,01 und 1 liegt, die aller diamagnetischen Stoffe zwischen 1 und 0,99. Alle drei ferromagnetischen Stoffe haben die Eigentümlichkeit, daß $\varkappa$ und daher auch μ von der Stärke der Magnetisierung abhängt, und daß sich die Art der Abhängigkeit durch keine Gesetzmäßigkeit feststellen läßt, sondern nur auf Grund von Messungen durch Schaulinien wie in Abb. 109, welche μ in Abhängigkeit von der Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ darstellen. Man sieht daß μ bei allen Arten des Eisens einen Höchstwert hat. Die Schaulinien gelten aber nicht für beste, sondern für Eisensorten mittlerer magnetischer Güte. Bei sehr gutem Schmiedeeisen erreicht μ einen Höchstwert von 6000[1]), bei sehr gutem Dynamostahl 3800. Bei sehr schwacher Magnetisierung des Eisens ($\mathfrak{B}$ kleiner als 10) nähert sich μ einem konstanten Wert, der zwischen 200 und 400 liegt.

Im Jahre 1901 ist es Heusler[2]) gelungen, aus Kupfer, Mangan

---

[1]) Gumlich und Schmidt (ETZ 1901, S. 691) fanden sogar einen Wert von 8350.

[2]) Heusler, Stark und Haupt, Marburg, Elwertsche Buchhandlung, 1904, Gumlich, Annal. d. Phys. 1805, Bd. 16.

und Aluminium Legierungen herzustellen, welche ausgeprägte ferromagnetische Eigenschaften aufweisen. Und zwar beträgt die Magnetisierbarkeit etwa ein Drittel von der eines guten Eisens. Daraus geht hervor, daß die Magnetisierbarkeit nicht an die chemischen Stoffe gebunden ist, sondern von einer eigenartigen, noch unbekannten molekularen Struktur der betreffenden Stoffe abhängt.

Abb. 109. Abhängigkeit der magnetischen Durchlässigkeit von der Kraftliniendichte.

93. Magnetische Sättigung.

Der eigentümliche Verlauf von μ in Abhängigkeit von $\mathfrak{B}$ (Abb. 109), wonach μ nach Überschreitung eines Höchstwertes rasch abnimmt, erklärt sich daraus, daß die Magnetisierungsstärke σ einen gewissen Wert — die magnetische Sättigung — nicht übersteigen kann. Man erkennt dies aus den Schaulinien in Abb. 110, die schließlich in wagerechte, gerade Linien übergehen. Nach der in § 90 besprochenen Vorstellung über das Wesen eines magnetisierbaren Stoffes wird die Sättigung dann erreicht, wenn die Achsen aller Molekularmagnete so weit gedreht sind, daß sie in die Rich-

tung der magnetisierenden Kraft fallen. Wenn also bei immer weiter wachsendem $\mathfrak{H}$ schließlich σ nicht mehr zunimmt, so muß sich nach Gl. 56 $\varkappa$ immer mehr dem Werte Null nähern, ohne ihn

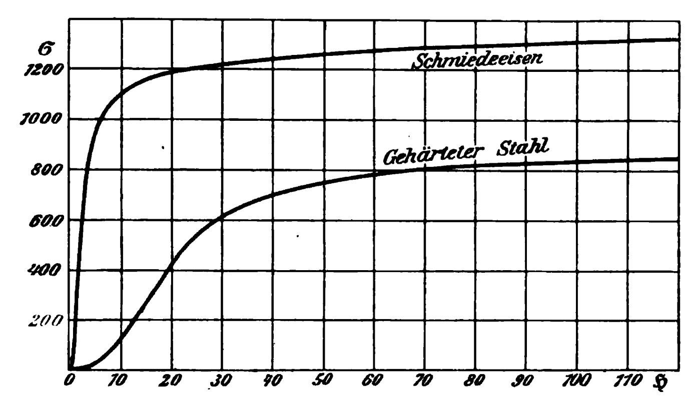


Abb. 110. Abhängigkeit der Magnetisierungsstärke σ von der magnetisierenden Kraft.

aber jemals zu erreichen. Dann muß sich aber nach Gl. 57 μ immer mehr dem Werte 1 nähern. Der kleinste Wert für μ, der bisher (bei einer Kraftliniendichte von $\mathfrak{B} = 74\,200$) erhalten wurde,

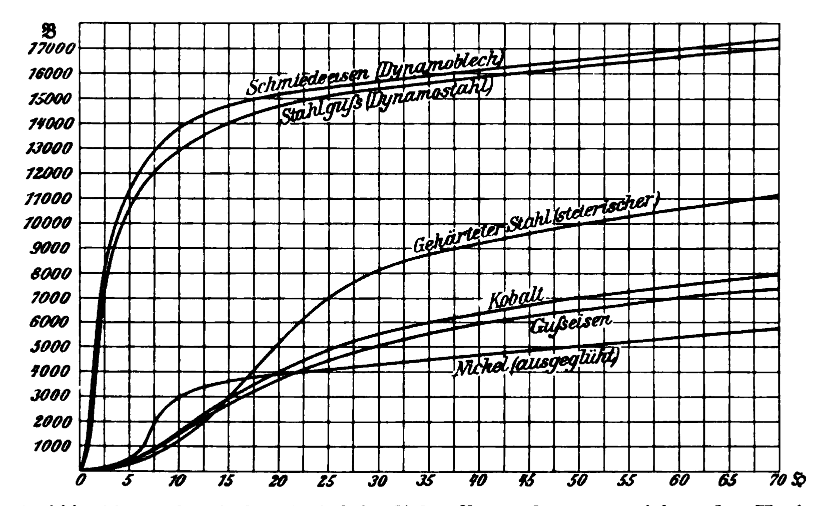


Abb. 111. Abhängigkeit der Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ von der magnetisierenden Kraft.

ist 1,44. Aus Gl. 54 folgt dann weiter, daß die Kraftliniendichte schließlich nur mehr um so viel zunimmt, als die magnetisierende Kraft $\mathfrak{H}$ zunimmt. Aus Abb. 110, welche die Magnetisierungs-

stärke σ in Abhängigkeit von der magnetisierenden Kraft $\mathfrak{H}$ darstellt, erkennt man, daß man der Sättigung schon sehr bald nahe kommt; für Schmiedeeisen bei etwa 20 absol. Einh. der magnetisierenden Kraft, für gehärteten Stahl bei etwa 50. Für praktische Zwecke sind die Schaulinien in Abb. 111, welche die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ in Abhängigkeit von der magnetisierenden Kraft zeigen, geeigneter, da es in der Praxis auf die Kraftliniendichte ankommt. Die Schaulinien in Abb. 109 ergeben sich daraus ohne weiteres als Verhältnis der Ordinaten zu den Abszissen.

94. Magnetische Hysterese.

Außer der Eigentümlichkeit, daß die magnetische Durchlässigkeit von der magnetisierenden Kraft $\mathfrak{H}$ oder von der Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ abhängt, haben die ferromagnetischen Stoffe noch eine Eigentümlichkeit, die darin besteht, daß bei einer Änderung der magnetisierenden Kraft der erreichte magnetische Zustand auch von dem magnetischen Zustande abhängt, der vorher geherrscht hat. Unterzieht man z. B. ein gänzlich unmagnetisches Eisenstück einer Magnetisierung in der Art, daß man die magnetisierende Kraft $\mathfrak{H}$ von null bis zu einem Werte C (Abb. 112) wachsen läßt, so ändert sich die Kraftliniendichte von null bis D in der Weise, wie wir sie schon aus Abb. 111 kennen. Man kann eine beliebig veränderliche magnetisierende Kraft am einfachsten dadurch herstellen, daß man einen Eisenring mit Stromwindungen wie in Abb. 104 umwickelt und die Stromstärke nach Wunsch ändert. Läßt man die magnetisierende Kraft wieder von C bis null abnehmen, so ändert sich die Kraftliniendichte nicht in gleicher Weise wie beim Anstieg, sondern von D bis F. Im Eisen ist also ein Magnetismus OF verblieben, trotzdem die magnetisierende

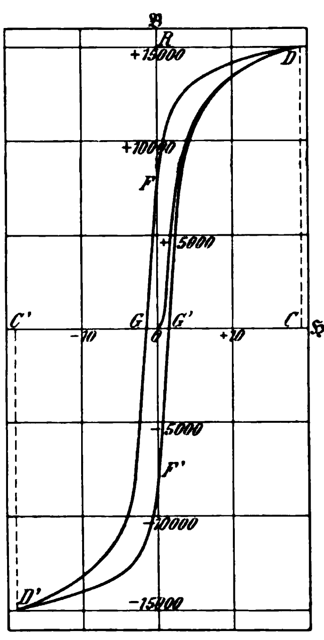


Abb. 112. Hystereseschleife von Schmiedeeisen.

Kraft null geworden ist. Man nennt ihn daher remanenten Magnetismus. Läßt man jetzt die magnetisierende Kraft negativ werden (durch Umkehrung der Stromrichtung in der Wickelung) und bis zu demselben Werte C' wie vorher im positiven Sinne ansteigen, so ändert

sich die Kraftliniendichte von F über G bis zum Werte D'. Läßt man nun die magnetisierende Kraft wieder von C' bis null abnehmen, so ändert sich die Kraftliniendichte von D' bis F'. Es verbleibt also wieder derselbe remanente Magnetismus OF' wie vorhin auf der positiven Seite. Läßt man nun die magnetisierende Kraft wieder von null bis zum Werte C ansteigen, so ändert sich die Kraftliniendichte von F' über G' bis D. Der jeweilige Wert von $\mathfrak{B}$ hängt also von den vorhergegangenen Werten ab, in dem Sinne, daß der vorhergehende Zustand sich zu erhalten sucht.

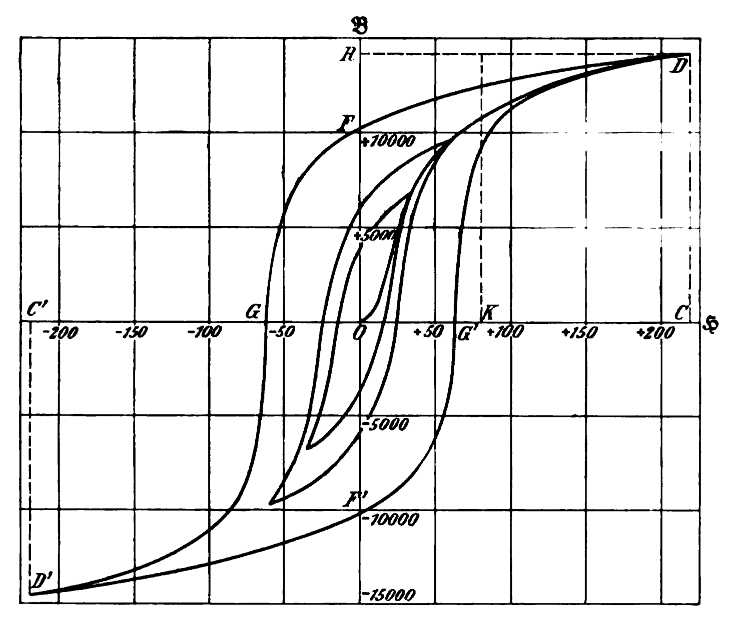


Abb. 113. Hystereseschleifen verschiedener Größe von Stahl.

Während die magnetisierende Kraft von C bis C' und von da wieder zurück bis C geändert wurde, hat die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ eine geschlossene Figur $DGD'G'$ beschrieben, innerhalb welcher die Kurve OD liegt, welche durch die Änderung der magnetisierenden Kraft von null bis C erhalten wurde, und die man als jungfräuliche Kurve bezeichnet, weil sie vom unmagnetischen Zustand ausgeht.

Man bezeichnet die eben beschriebene, von Warburg beobachtete Erscheinung als Hysterese, die von den $\mathfrak{B}$-Werten gebildete geschlossene Figur als Hystereseschleife und den Vorgang, durch den sie erzeugt wird, nähmlich die Änderung der Magnetisierung zwischen zwei gleich großen Werten — einem positiven und einem negativen — als magnetischen Kreisprozeß.

So wie die Werte von μ, hängt natürlich auch die Gestalt der Hystereseschleife von dem Stoffe ab; während die Abb. 112 für Schmiedeeisen (Dynamoblech) gilt, gilt Abb. 113 für gehärteten Stahl.

Führt man mehrere Kreisprozesse mit verschiedenen Höchstwerten von $\mathfrak{H}$ aus, so erhält man ineinander liegende Hystereseschleifen (Abb. 113). Verbindet man die Spitzen durch eine Linie, so fällt diese mit der jungfräulichen Kurve nahezu zusammen.

Ist der Kreisprozeß ein unvollkommener, d. h. ein solcher, der sich nicht zwischen gleich großen positiven und negativen Werten abspielt, sondern zwischen zwei Werten $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ in Abb. 114, so machen die $\mathfrak{B}$-Werte die Schleife $D_1 a$ $D_2 b$. Aus dieser und den beiden vorigen Abbildungen erkennt man, daß zu einem bestimmten Werte von $\mathfrak{H}$ (z. B. OK in Abb. 113) nicht auch ein bestimmter Wert von $\mathfrak{B}$ gehört, sondern unendlich viele Werte von $\mathfrak{B}$, nämlich sämtliche zwischen dem aufsteigenden und dem absteigenden Ast der größten Hystereseschleife liegenden. Welcher von diesen Werten jeweils vorhanden ist, das hängt von der magnetischen Vorgeschichte des betreffenden Körpers ab. Da die Durchlässigkeit μ nichts anderes ist als das Verhältnis von $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{H}$, so gilt dies auch von μ. Zu einem bestimmten $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{B}$ können je nach der Vorgeschichte verschiedene Werte von μ innerhalb gewisser Grenzen gehören.

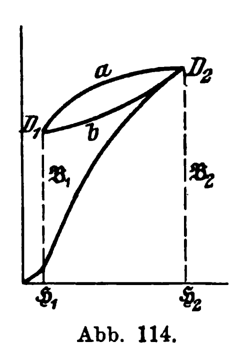


Abb. 114.

95. Dauermagnetismus und Koerzitivkraft.

Wir haben im vorhergehenden gesehen, daß nach dem Verschwinden der magnetisierenden Kraft $\mathfrak{H}$ ein remanenter Magnetismus zurückbleibt, dessen Kraftliniendichte durch den Abschnitt OF bzw. OF' (Abb. 112) auf der Ordinatenachse der Hystereseschleife bestimmt ist. Wie man aus dem Vergleich der Abb. 112 und 113 sieht, ist er bei Stahl größer als bei weichem Eisen. Ferner ersieht man aus Abb. 113, daß er bei demselben Körper um so größer ist, je größer der beim Kreisprozeß erreichte Höchstwert der Magnetisierung ist. Der Magnetismus der Dauermagnete oder permanenten Magnete ist nichts anderes als ein Teil dieses, nach dem Verschwinden der magnetisierenden Kraft zurückgebliebenen remanenten Magnetismus. Als Ursache dieser Erscheinung kann man sich leicht vorstellen, daß ein Teil der beim Magnetisieren gedrehten Molekularmagnete nicht mehr ganz in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt. Die Kraft, welche sie in der beim Magnetisieren

erhaltenen Lage zurückzuhalten sucht und so die Remanenz verursacht, nennt man Koerzitivkraft. Genauer definiert wird sie durch jene Kraft, welche notwendig ist, um den remanenten Magnetismus wieder zu vernichten. Wie man aus Abb. 112 und 113 sieht, ist dazu die magnetisierende Kraft OG bzw. OG' erforderlich, denn erst bei diesem Werte geht die $\mathfrak{B}$-Linie durch null. Aus dem Vergleich dieser beiden Abbildungen erkennt man aber auch, daß Remanenz und Koerzitivkraft keineswegs proportional sind, sondern daß letztere bei Schmiedeeisen bedeutend kleiner ist als bei hartem Stahl. Noch deutlicher sieht man dies aus folgender Zahlentafel.[1])

	$\mathfrak{B}$	Remanenz	Koerzitivkraft	μ_{max}	η
Walzeisen[2]) . .	18000	8000	0,7	6000	0,0008
Dynamoblech .	18300	10000	1,2	4500	0,0016
Stahlguß . . .	18200	10000	2,4	2800	0,003
Gußeißen . . .	10000	5000	11	200	0,013
Harter Stahl . .	18000	11000	15—60	300	0,018—0,03

96. Magnetische Verzögerung.

Zu den eigentümlichen Erscheinungen, die bei der Magnetisierung auftreten, gehört auch die, daß nach Herstellung der magnetisierenden Kraft die Kraftliniendichte nicht sofort den ihr zukommenden Wert erhält, sondern erst nach einiger allerdings sehr kurzer Zeit. Diese Verzögerung hat wahrscheinlich, ebenso wie die Hysterese, ihren Grund in gewissen, noch unbekannten, mechanischen Vorgängen (molekulare Reibung).

Mit der magnetischen Hysterese darf die magnetische Verzögerung nicht verwechselt werden. Jene besteht in einer Abhängigkeit des jeweiligen Wertes $\mathfrak{B}$ von den vorhergehenden Werten, diese in einer Abhängigkeit von der Zeit. Ferner darf die magnetische Verzögerung nicht verwechselt werden mit der Verzögerung der magnetisierenden Kraft $\mathfrak{H}$, die dadurch entsteht, daß Wirbelströme in dem zu magnetisierenden Eisenkörper auftreten, die der magnetisierenden Kraft entgegenwirken. Vgl. § 188.

[1]) Durchschnittliche Werte nach Messungen von Gumlich und Schmidt (ETZ 1901, S. 691).

[2]) Sehr weiches, reines Material von hoher magnetischer Güte.

97. Magnetische Arbeit.

Wie wir in § 91 gesehen haben, erfolgt die Magnetisierung irgend eines Stoffes nach denselben Gesetzen wie die Elektrisierung eines Nichtleiters, nur ist an Stelle der Dielektrizitätskonstante ϑ die magnetische Durchlässigkeit μ zu setzen. Wir können daher für die Arbeit, welche notwendig ist, um eine Volumseinheit durch die magnetisierende Kraft $\mathfrak{H}$ zu magnetisieren, den in § 35 erhaltenen Ausdruck Gl. 33 übernehmen

$$A_{einh} = \mu \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}$$

oder, wenn die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ eingeführt wird

$$A_{einh} = \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi\mu}.$$

Daraus ergibt sich die Änderung der Arbeit dA, wenn sich $\mathfrak{H}$ um $d\mathfrak{H}$ ändert

$$dA_{einh} = \frac{1}{4\pi\mu}\mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{B},$$

führt man die Gl. 58 ein, so ist

$$dA_{einh} = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{B}.$$

Mithin ist die magnetische Arbeit für eine Raumeinheit, wenn sich die Kraftliniendichte von $\mathfrak{B}_1$ bis $\mathfrak{B}_2$ ändert,

$$A_{einh} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Das Produkt $\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{B}$ ist nichts anderes als die Fläche des von $\mathfrak{B}$ und $d\mathfrak{H}$ gebildeten unendlich schmalen Rechteckes, daß in Abb. 115 schraffiert ist. Daher ist $\int_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2}\mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{B}$ die zwischen den Ordinalen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ liegende Fläche $\mathfrak{B}_1 P_1 P_2 \mathfrak{B}_2$. Ist $\mathfrak{B}^2 > \mathfrak{B}_1$, d. h. nimmt die Magnetisierung zu, so ist A_{einh} positiv, d. h. das $\frac{1}{4\pi}$fache dieser Fläche ist gleich der Arbeit, welche von der magnetisierenden Ursache aufgewendet werden muß.

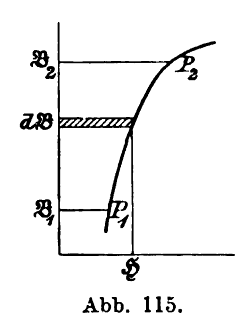


Abb. 115.

Wenn also z. B. die magnetisierende Kraft von einem Strom erzeugt wird, so muß diese Arbeit von der Stromquelle geleistet werden und wird in dem magnetisierten Stoff als potentielle Energie aufgespeichert. Ist aber $\mathfrak{B}_2 < \mathfrak{B}_1$, so ist A_{einh} negativ, d. h. die aufgespeicherte Energie wird an die Stromquelle zurückgeliefert, soweit nicht ein Verlust durch Umsatz in Wärme eintritt. Es ist wie bei einer elastischen Feder; wird sie gespannt, so nimmt sie Arbeit auf. Hört die spannende Kraft auf, so gibt die Feder die Arbeit zurück, bis auf einen Verlust durch Umsatz in Wärme.

98. Arbeitsverlust bei einem magnetischen Kreisprozeß.

Läßt man die auf einen Körper wirkende magnetisierende Kraft von Null bis $\mathfrak{H}$ wachsen, z. B. durch Schließen des Stromkreises eines Solenoides, wie in Abb. 104, so wächst die Kraftliniendichte von Null bis D (Abb. 115a). Die dabei aufgewendete Arbeit ist nach dem vorigen gleich der $\frac{1}{4\pi}$fachen Fläche ODR zwischen der $\mathfrak{B}$-Kurve und der Odinatenachse. Läßt man $\mathfrak{H}$ wieder bis Null sinken, indem man den Strom ausschaltet, so nimmt die $\mathfrak{B}$-Kurve, wie wir aus § 94 wissen, nicht denselben Weg zurück, sondern den Weg DF, wobei der Magnetismus FO bestehen bleibt. Die an die Stromquelle zurückgegebene Arbeit ist gleich der $\frac{1}{4\pi}$fachen Fläche DRF. Es ist also ein Arbeitsbetrag gleich der $\frac{1}{4\pi}$fachen Fläche ODF nicht zurückgewonnen worden. Die Erfahrung lehrt, daß dieser Betrag innerhalb des magnetisierten Körpers in Wärme umgewandelt wird. Will man den verbliebenen Dauermagnetismus vernichten, so muß eine entgegengerichtete magnetisierende Kraft und die entsprechende Arbeit gleich der $\frac{1}{4\pi}$ fachen Fläche FOG aufgewendet werden.

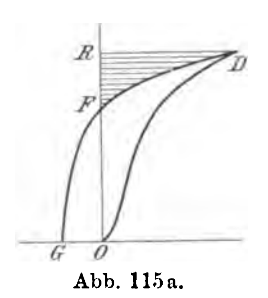


Abb. 115a.

Wird ein vollkommener magnetischer Kreisprozeß zwischen den Werten $+D$ und $-D'$ (Abb. 112) ausgeführt, so ist der in Wärme umgesetzte Arbeitsverlust gleich der $\frac{1}{4\pi}$fachen, von der Hystereseschleife eingeschlossenen Fläche $DGD'G'$. Man kann sich vorstellen, daß dieser Arbeitsverlust durch die bei der Ummagnetisierung auftretende Reibung der Molekularmagnete verursacht wird, und bezeich

net ihn daher auch als **Ummagnetisierungsarbeit**, oder, weil er durch die Hystereseschleife dargestellt ist, als **Hystereseverlust**.

Die magnetische Arbeit nach der letzten Gleichung besteht aus zwei Teilen, die man erkennt, wenn man für $\mathfrak{B}$ die Gl. 54 einsetzt. Es ist dann

$$A_{einh} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{B}_1}^{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{H}\cdot d\,(\mathfrak{H} + 4\pi\sigma) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{H}_1}^{\mathfrak{H}_2} \mathfrak{H}\cdot d\mathfrak{H} + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathfrak{H}\cdot d\sigma$$

$$= \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{H}_2^2 - \mathfrak{H}_1^2) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathfrak{H}\cdot d\sigma.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite bedeutet die auf die Erzeugung oder Änderung der magnetisierenden Kraft entfallende Arbeit, das zweite Glied die zur Erzeugung der Flächendichte σ (§ 89) erforderliche Arbeit.

Für einen vollständigen Kreisprozeß ist $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1$ und daher das erste Glied auf der rechten Seite Null. Das heißt, für einen vollständigen Kreisprozeß ist der gesamte Arbeitsverlust nur gleich der durch die Flächendichte, entsprechend Abb. 110, dargestellten Hystereseschleife.

Es sei hier gleich bemerkt, daß der bei einer Ummagnetisierung auftretende Hystereverlust nicht der einzige Arbeitsverlust ist, der sich in Wärme umsetzt, sondern daß hierzu noch die Stromwärme der Wirbelströme kommt, die bei einer Änderung der Magnetisierung erzeugt werden.

Um also den Arbeitsverlust zahlenmäßig ergeben zu können, ist in jedem Falle die Kenntnis der Hystereseschleife für $\mathfrak{B}$ oder σ erforderlich. Für praktische Zwecke genügt aber die von **Steinmetz** aus zahlreichen Messungen aufgestellte empirische Formel, wonach der Verlust in 1 cm^3 Eisen für einen zwischen den Grenzen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ (Abb. 114) verlaufenden Kreisprozeß gleich

$$\eta\,(\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1)^{1,6}\cdot 10^{-7} \text{ Watt.}$$

Ist der Kreisprozeß ein vollkommener zwischen den Grenzen $+\mathfrak{B}$ und $-\mathfrak{B}$, so ist der Verlust gleich

$$\eta\,\mathfrak{B}^{1,6}\cdot 10^{-7} \text{ Watt.}$$

Für Schmiedeeisen (Dynamoblech) ist η gleich 0,0015—0,002, für Stahlguß 0,0018—0,003, Gußeisen 0,01—0,02, harten Stahl 0,01—0,03. Jedoch ist η in Wirklichkeit keine von $\mathfrak{B}$ unabhängige Konstante, sondern wächst ein wenig mit $\mathfrak{B}$.

Aus den vorstehenden Zahlen und der Zahlentafel auf S. 141 erkennt man schon, daß η um so größer ist, je größer die Koerzitivkraft des betreffenden Materiales ist. Ja es besteht sogar (bei gleichen $\mathfrak{B}$) nahezu Proportionalität.

99. Anziehung und Abstoßung in einem magnetischen Felde.

Wird ein ringförmiger, geschlossener Körper durch Stromwindungen wie in Abb. 104 magnetisiert, so verlaufen die Kraftlinien vollständig in ihm und es tritt an keiner Stelle freier Magnetismus (Pole) auf, weil der Körper keine Enden hat; infolgedessen wirkt auch keinerlei bewegende Kraft auf ihn. Bringt man hingegen einen prismatischen Körper in ein magnetisches Feld, dessen übriger Raum aus Luft besteht, so tritt an den Stellen, wo die Kraftlinien ein- und austreten, freier Magnetismus auf. In Abb. 116 sei CD das positive Ende eines Magnetes oder Solenoides, von dem das durch die wagerechten Linien angedeutete magnetische

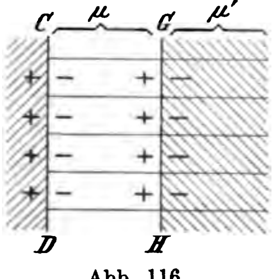


Abb. 116.

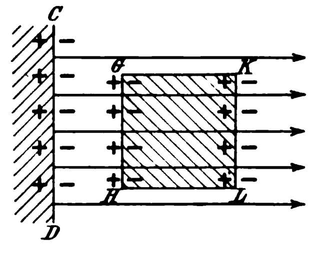


Abb. 117.

Feld herrührt. GH sei eine Endfläche des prismatischen Körpers mit der Durchlässigkeit μ', während der Raum zwischen CD und GH durch ein Gas oder eine Flüssigkeit von der Durchlässigkeit μ erfüllt sei. An der Grenzfläche GH tritt freier Magnetismus zu beiden Seiten auf, weil ja beide Stoffe magnetisiert werden. Ist $\mu' > \mu$, so überwiegt der freie Magnetismus des rechten Stoffes und die Grenzfläche erscheint in diesem Falle mit negativem Magnetismus versehen, wird also von CD angezogen. Ist aber $\mu' < \mu$, so überwiegt an der Grenzfläche der positive Magnetismus des linken Stoffes, und daher wird sie von CD abgestoßen. Ist der zweite Stoff ein begrenzter Körper, z. B. $GHKL$ (Abb. 117), der in einem homogenen Felde von dem ersten Stoff allseitig umgeben ist, so überwiegt an der Grenzfläche KL die negative Ladung, wird also von CD angezogen. Da nun in einem homogenen Felde die Kraft

an allen Stellen des Feldes dieselbe ist, so haben sich die Anziehung der Fläche *KL* und die Abstoßung der Fläche *GH* gegenseitig auf und der Körper bleibt in Ruhe. Ist aber das Feld nicht homogen (Abb. 118), so ist die Kraft an der Fläche *GH* größer als an der Fläche *KL*, es überwiegt die Abstoßung der Fläche *GH* und daher wird der ganze Körper in der Richtung der divergierenden Kraftlinien abgestoßen. Damit ist die in § 92 erwähnte Abstoßung diamagnetischer Körper, d. h. solcher, deren Durchlässigkeit kleiner als der der Luft ist, wie z. B. Wismut, erklärt. Gäbe es aber ein Gas oder eine Flüssigkeit, deren Durchlässigkeit noch kleiner als die des Wismuts wäre, so würde in einem solchen Wismut angezogen. Ganz allgemein gilt folgendes: Ist ein magnetisierter Körper von einem anderen umgeben und befinden sich beide in einem homogenen Felde, so bleiben beide in Ruhe; ist aber das Feld nicht homogen, so sucht sich der Körper in der Richtung der divergierenden Kraftlinien zu bewegen, wenn seine magnetische Durchlässigkeit kleiner ist als die des umgebenden Stoffes, hingegen in der Richtung der konvergierenden Kraftlinien, wenn seine Durchlässigkeit größer ist als die des umgebenden Stoffes.

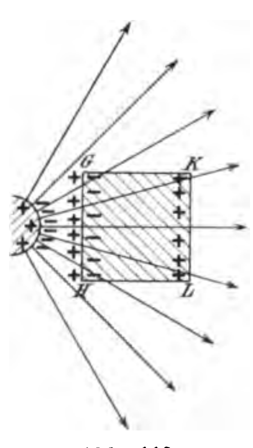


Abb. 118.

Da wir in § 91 gesehen haben, daß die Magnetisierung nach denselben Gesetzen vor sich geht wie die Elektrisierung eines Nichtleiters, wobei die magnetische Durchlässigkeit μ dieselbe Rolle spielt, wie die Dielektrizitätskonstante ϑ, so können wir das mathematische Ergebnis aus § 36 unmittelbar hier anwenden. Ist also σ die magnetische Flächendichte des einen Stoffes an der Grenzfläche *GH* (Abb. 116), σ' die des andern, so ist die resultierende Flächendichte

$$\sigma' - \sigma = \frac{\mathfrak{B}}{4\pi}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu'}\right).$$

Ist $\mu' > \mu$, so ist die rechte Seite der Gleichung positiv und umgekehrt. Das heißt, in der resultierenden Flächendichte $\sigma' - \sigma$ überwiegt die Ladung jenes Stoffes, der die größere Durchlässigkeit besitzt, und zwar ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Ladungen, das ja nur davon abhängt, wie die Richtung der magnetisierenden Kraft ist, d. h. ob *CD* positiv oder negativ ist.

100. Brechung der Kraftlinien an der Grenzfläche magnetischer Stoffe.

Wenn die Kraftlinien nicht senkrecht auf die Grenzfläche *GH* zweier magnetischer Körper auftreffen, sondern wie in Abb. 42 unter einem schiefen Winkel, so gelten hier dieselben Gesetze wie für den Durchgang elektrischer Kraftlinien durch die Grenzfläche zweier Nichtleiter. Es verhalten sich also die magnetisierenden Kräfte in den beiden aneinander grenzenden Stoffen umgekehrt wie die Sinus der Einfallswinkel (Abb. 42)

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (60)$$

Ferner verhalten sich die Kraftliniendichten in den beiden Stoffen umgekehrt wie die Cosinus der Einfallswinkel (Abb. 43)

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}'} = \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (61)$$

Aus beiden folgt, daß sich die trigonometrischen Tangenten des Einfallswinkel so verhalten wie die magnetischen Durchlässigkeiten der beiden Stoffe:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = \frac{\mu}{\mu'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (62)$$

Diese Gleichung wird als Brechungsgesetz der Kraftlinien bezeichnet. Die beiden letzten Gleichungen besagen, daß in dem Stoff mit der größeren Durchlässigkeit der Einfallswinkel und die Kraftliniendichte den größeren Wert hat. Das ist für den Übergang der Kraftlinien vom Eisen zur Luft in elektrischen Maschinen und Apparaten von Wichtigkeit. In der Zahlentafel auf der nächsten Seite sind die Einfallswinkel in Eisen (α') und die Einfallswinkel in Luft (α) bei den Durchlässigkeiten 3000 und 300 zusammengestellt. Da für Luft $\mu = 1$ ist, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\mu'} \operatorname{tg} \alpha'$$

Aus diesen Zahlen ersieht man, daß Kraftlinien in der Luft fast immer senkrecht zur Eisenoberfläche stehen, selbst wenn sie im Eisen sehr schräg auf die Oberfläche auftreten. Das Kraftlinienbild (Abb. 107) läßt dies deutlich erkennen. In Abb. 44 S. 57 sind auch die Kraftlinien im Eisen gezeichnet. Beide Abbildungen

bei $\mu' = 3000$		bei $\mu' = 300$	
Einfallswinkel in Eisen α'	Einfallswinkel in Luft α	Einfallswinkel in Eisen α'	Einfallswinkel in Luft α
10°	0° 0′ 1″	10°	0° 2′
30°	0° 0′ 40″	30°	0° 7′
50°	0° 1′ 30″	50°	0° 14′
70°	0° 3′	70°	0° 32′
80°	0° 6′	80°	1° 5′
85°	0° 13′	85°	2° 11′
89°	1° 5′	89°	10° 45′
89° 50′	6° 30′	89° 50′	48° 45′
90°	90°	90°	90°

beziehen sich auf ein kreisrundes Eisenstück, das in ein homogenes Feld gebracht wurde. Abb. 119 zeigt dasselbe an einem eisernen Hohlzylinder im homogenen Felde. Aus allen drei genannten Abbildungen erkennt man auch die aus Gl. 61 folgende Verdichtung der Kraftlinien (Zunahme von $\mathfrak{B}$). Diese Berechnung und Verdichtung der Kraftlinien sind es, die den in § 90 erwähnten Eindruck des Ansaugens der Kraftlinien durch einen Körper von größerer Durchlässigkeit hervorrufen. Abb. 45 (S. 57) stellt den Fall dar, wo ein zylindrischer Körper von keinerer Durchlässigkeit als seine Umgebung (z. B. Wismut in Luft) in ein homogenes Feld gebracht wurde. In einem solchen Körper ist die Kraftliniendichte geringer. Es sieht aus, als ob die Kraftlinien von einem solchen Körper weggedrängt würden.

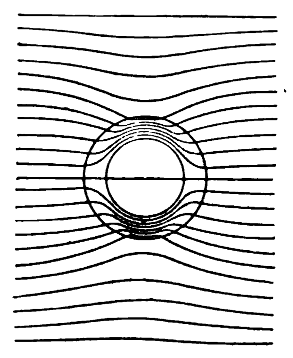


Abb. 119. Eiserner Hohlzylinder in einem homogenen Felde.

Es sei besonders betont, daß die Verdichtung der Kraftlinien nur bei schrägem Auftreten auf die Oberfläche stattfindet. Bei senkrechtem Auftreten bleibt die Kraftliniendichte, wie aus Abb. 116 hervorgeht, unverändert. Es können ja auch keine neuen Kraftlinien an der Grenzfläche GH entstehen, da die magnetischen Kraftlinien nur als geschlossene Kurven existieren. Die Gl. 58 widerspricht dem nicht, denn diese besagt nur, daß die Kraftliniendichte sich gegen Luft um das μfache vermehrt, wenn an ihre Stelle ein Stoff von der Durchlässigkeit μ tritt.

101. Magnetische Schirmwirkung.

Aus dem nahezu senkrechten Auftreffen der Kraftlinien auf eine Eisenoberfläche und ihrer Verdichtung im Eisen erklärt sich auch die Erscheinung, daß eine in ein magnetisches Feld gebrachte Eisen-

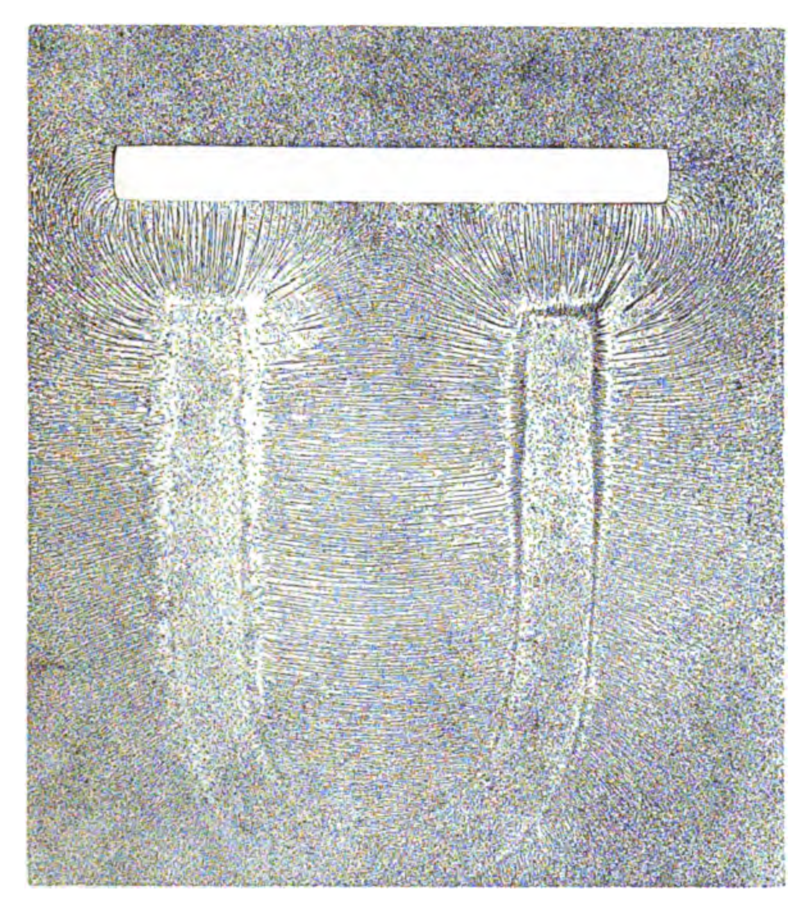


Abb. 120. Magnetische Schirmwirkung einer Eisenplatte.

platte von entsprechender Stärke fast alle Kraftlinien in sich aufnimmt, so daß der Raum hinter ihr nahezu frei von jeder magnetischen Wirkung ist. Abb. 120 zeigt das Kraftlinienbild, wenn eine Eisenplatte vor einem Hufeisenmagnete steht. Man sieht, wie die Kraftlinien von der Platte gewissermaßen angesaugt

werden, und daß hinter ihr die Eisenfeilspäne ungeordnet liegen, so wie sie aufgestreut wurden; ein Zeichen, daß hier das magnetische Feld verschwindend klein ist.

Abb. 119 zeigt die Schirmwirkung eines eisernen Hohlzylinders auf seinen Hohlraum. Man benutzt dies, um empfindliche Galvanometer gegen äußere magnetische Felder zu schützen.

Die magnetische Schirmwirkung ist ähnlich wie die Schirmwirkung einer zur Erde abgeleiteten leitenden Platte oder eines Hohlzylinders gegen elektrische Felder (§ 19). Während aber die elektrische Schirmwirkung eine vollkommene ist, so daß selbst hinter der dünnsten Platte die elektrische Kraft Null ist, ist die magnetische Schirmwirkung eine unvollkommene; sie hängt von der Dicke der Platte und ihrer magnetischen Durchlässigkeit ab. Nur hinter einer unendlich dicken Platte oder hinter einer, deren Durchlässigkeit unendlich groß ist, wäre die magnetische Kraft Null.

Die Schirmwirkung ist stärker, wenn mehrere durch Zwischenräume getrennte Platten statt einer einzigen von gleicher gesamter Dicke angewendet werden.

102. Entmagnetisierende Kraft. Dauermagnete.

Verlaufen die geschlossenen magnetischen Kraftlinien in ihrer ganzen Länge in demselben Stoff, wie z. B. bei dem ringförmigen Solenoid in Abb. 104, so ist der magnetische Zustand durch die Gleichung

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$$

vollständig bestimmt. Anders ist es, wenn sie, wie in Abb. 108, nur eine Strecke lang im Eisen und im übrigen Teil in Luft verlaufen. Dann sind an den Ein- und Austrittsstellen der Kraftlinien freie magnetische Massen (Pole) vorhanden, die ihrerseits ein magnetisches Feld erzeugen, welches das von der magnetisierenden Kraft herrührende schwächt.

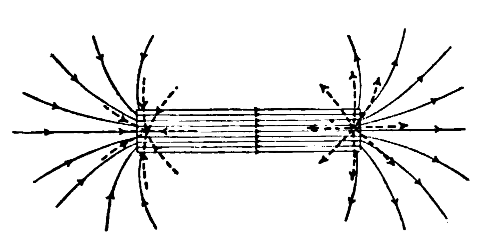


Abb. 121. Entmagnetisierende Kraft freier Pole.

Abb. 121, die ein prismatisches Eisenstück in einem magnetischen Felde darstellt, läßt dies erkennen. Die ausgezogenen Linien, stellen die Kraftlinien dar, die gemäß robige Gleichung von der magnetisierenden Kraft erzeugt werden. Die an den Enden auftretenden freien magnetischen Massen kann man

sich wie in § 9 in zwei Punkten, den Polen, vereinigt denken. Diese erzeugen ihrerseits ein Feld, wie wir es aus Abb. 3 kennen. In Abb. 121 ist es durch die gestrichelten Kraftlinien angedeutet. Wie man sieht, verlaufen diese im Innern des Eisenstückes entgegen denen, die von der magnetisierenden Kraft herrühren. Die freien magnetischen Massen üben also eine schwächende oder entmagnetisierende Wirkung auf das ganze Innere des Eisenstückes aus. Sie ist im allgemeinen an verschiedenen Stellen verschieden; nur bei Ellipsoiden ist sie an allen Stellen gleich und kann genau berechnet werden. Bei anderen Körpern ist diese Berechnung nur näherungsweise oder gar nicht möglich. Man hat aber noch eine andere Methode zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Körpers, welche die Betrachtung der entmagnetisierenden Wirkung überflüssig macht und mit der wir uns in §§ 105, 106 beschäftigen werden. Bei Dauermagneten ist aber die Betrachtung der entmagnetisierenden Wirkung zweckmäßiger als jene Methode.

Unter Dauermagneten oder permanenten Magneten versteht man solche Eisenstücke, bei denen nach dem Verschwinden der magnetisierenden Kraft ein Teil des remanenten Magnetismus dauernd bestehen bleibt. In Abb. 112 und 113 ist der remanente Magnetismus durch die Kraftliniendichte OF dargestellt. Verlaufen die Kraftlinien ganz in einem geschlossenen Eisenkörper, so kann freier Magnetismus nicht auftreten, und deshalb verbleibt der ganze remanente Magnetismus OF so lange bestehen, als er nicht durch eine entgegenwirkende magnetisierende Kraft vernichtet wird. Hat aber das Eisenstück freie Enden, an denen Pole auftreten, so üben diese die eben geschilderte entmagnetisierende Kraft aus, und der verbleibende Dauermagnetismus ist nicht gleich OF, sondern kleiner. Für diesen dauernd verbleibenden Magnetismus ist weniger der remanente Magnetismus OF, sondern hauptsächlich die Koerzitivkraft OG maßgebend, denn diese stellt ja jene entgegenwirkende magnetisierende Kraft dar, welche notwendig wäre, um den remanenten Magnetismus zu vernichten. Ist also die entmagnetisierende Kraft der Pole gerade gleich OG, so verbleibt vom remanenten Magnetismus kein dauernder Rest. Ist die entmagnetisierende Kraft halb so groß, so verbleibt auch nur die Hälfte[1]) von OF als Dauermagnetismus. Daraus erklärt sich die bekannte Tatsache, daß der Dauermagnetismus bei Schmiedeeisen viel kleiner ist als bei hartem Stahl, obwohl der remanente Magnetismus bei gleicher Magnetisierung wenig verschieden ist, wie ein Vergleich der Abb. 112 und 113 zeigt. Dagegen ist bei Schmiedeeisen die Koerzitivkraft OG be-

---

[1]) Das gilt nur ungefähr, weil die $\mathfrak{B}$-Kurve keine gerade Linie ist.

trächtlich kleiner als bei Stahl, und daher genügt bei ersterem die entmagnetisierende Wirkung der Pole um den remanenten Magnetismus fast ganz zu vernichten, während sie bei letzterem nur einem Teil der Koerzitivkraft gleichkommt. Es verbleibt daher ein großer Teil des remanenten Magnetismus als Dauermagnetismus.

Aus Abb. 121 folgt, daß bei gleicher Polstärke die entmagnetisierende Kraft um so größer ist, je kürzer das Stück ist, weil nach § 4 die magnetische Kraft mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt. Daher muß man bei Eisenkörpern für elektromagnetische Meßinstrumente, Elektrizitätszähler und ähnliche Apparate, wo es auf möglichst wenig Dauermagnetismus ankommt, die Gestalt so wählen, daß die Länge im Vergleich zur Dicke möglichst klein ist. Umgekehrt muß man die Dauermagnete, die möglichst viel Dauermagnetismus haben sollen, möglichst lang im Vergleich zu ihrer Dicke wählen.

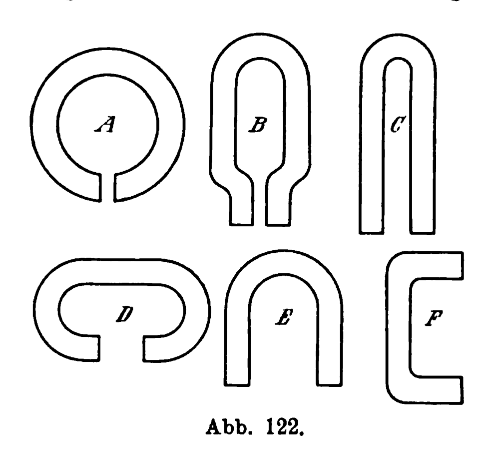


Abb. 122.

Da bei geschlossenen Eisenkörpern die entmagnetisierende Kraft Null ist, so muß bei gleicher Länge und Dicke jene Form die kleinste entmagnetisierende Kraft und daher den größten Dauermagnetismus haben, welche der ganz geschlossenen Form am nächsten kommt. Mißt man daher bei den in Abb. 122 dargestellten Formen A bis F den Dauermagnetismus, so findet man, daß er tatsächlich bei A am größten, bei F am kleinsten ist. Die Dauermagnetismen dieser Formen verhalten sich ungefähr wie folgt:

$$A : B : C : D : E : F = 2{,}6 : 2{,}5 : 2{,}1 : 1{,}7 : 1{,}3 : 1.$$

Daher eignen sich die Formen A und B am besten zu Dauermagneten für Drehspuleninstrumente, Elektrizitätszähler und zu Dämpfmagneten.

Bei demselben Eisenstück ist der Dauermagnetismus um so größer, je größer der Höchstwert von $\mathfrak{B}$ ist, bis zu dem die Magnetisierung getrieben wurde, denn wie aus Abb. 113 ersichtlich, ist sowohl der remanente Magnetismus als auch die Koerzitivkraft um so größer, je größer der Höchstwert von $\mathfrak{B}$ ist.

Der Dauermagnetismus ist aber auch von äußeren Einflüssen abhängig. Durch Erschütterungen (Klopfen, Schütteln) nimmt er

ab. Ebenso mit zunehmender Temperatur; durch Erhitzung bis zur Rotglut verschwindet er ganz.

103. Die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur.

Erst bei hohen Temperaturen ist ein stärkerer Einfluß auf die Magnetisierung zu bemerken. Eine einfache Gesetzmäßigkeit läßt sich nicht feststellen, so daß man den Temperatureinfluß nicht durch Koeffizienten, wie beim Temperatureinfluß auf den elektrischen Leitungswiderstand angeben kann. Im allgemeinen läßt sich der Temperatureinfluß für alle ferromagnetischen Stoffe in folgender Weise charakterisieren: Bei kleinen magnetisierenden Kräften nimmt der Magnetismus mit wachsender Temperatur bis zu einem (schwach ausgeprägten) Maximum zu und dann rasch bis nahezu Null ab; bei großen magnetisierenden Kräften nimmt er von vornherein erst langsam, dann rasch bis nahezu Null ab. Abb. 123 zeigt dieses Verhalten für Eisen; und zwar ist als Maß der Magnetisierung die Flächendichte (oder Magnetisierungsstärke § 89) σ in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt. Die verschiedenen Kurven gelten für verschiedene magnetisierende Kräfte, die den Kurven beigeschrieben sind. Stahl und Nickel zeigen einen ähnlichen Verlauf. Jene Temperatur, wo die Magnetisierung ziemlich plötzlich auf sehr kleine Werte abzufallen beginnt, nennt man die **kritische Temperatur**. Sie liegt bei weichem Eisen zwischen 700° und 900°, bei Stahl zwischen 600° und 700°, bei Nickel zwischen 250° und 300°.

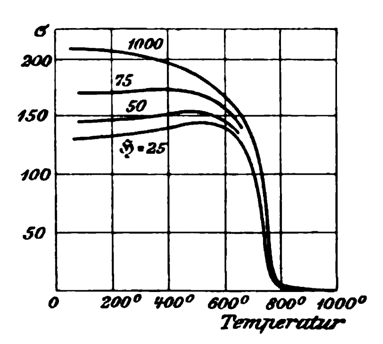


Abb. 123. Abhängigkeit der Magnetisierung von der Temperatur.

Hierauf beruht der **thermomagnetische Motor von Stefan**. Ein Rad aus Nickelblech (Abb. 124) wird durch eine Flamme von unten erhitzt, so daß sein unterer Teil schwächer magnetisch ist als sein oberer. Infolgedessen wird der obere Teil von dem Magnet M stärker angezogen als der untere und das Rad dreht sich in der Richtung des Pfeiles. Hier wird Wärme unmittelbar ohne Hilfe

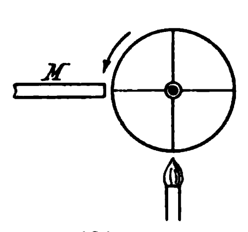


Abb. 124. Thermomagnetischer Motor.

erhitzter Dämpfe wie bei den Dampfmaschinen und Gasmotoren in mechanische Arbeit umgesetzt. Der Wirkungsgrad ist natürlich sehr klein.

Infolge der Erwärmung nimmt auch der Magnetismus der Dauermagnete ab, kehrt aber bei Abkühlung zum Teil wieder zurück, wenn die Erwärmung nicht über Rotglut gesteigert wurde. Bei Erhitzung bis zur Weißglut verschwindet der Dauermagnetismus gänzlich. Man hat also darin ein Mittel um Eisen- oder Stahlstücke unmagnetisch zu machen.

Der Hystereseverlust bei einem magnetischen Kreisprozeß (§ 94) nimmt im allgemeinen mit wachsender Temperatur ab. Davon ist aber wohl zu unterscheiden die dauernde Veränderung der magnetischen Eigenschaften durch längere Erhitzung und Wiederabkühlung (magnetisches Altern).

104. Das magnetische Altern des Eisens.

Messungen an Transformatoren haben gezeigt, daß sich ihr Eisenkern nach längerem Betrieb insofern verschlechtert hatte, als der Verlust durch Hysterese in einzelnen Fällen auf das Doppelte gestiegen war. Außerdem zeigte sich eine Verminderung der magnetischen Durchlässigkeit. Besondere Untersuchungen[1]) haben ergeben, daß diese als magnetische Alterung bezeichneten Verschlechterungen auf die während des Betriebes stattfindende Erwärmung zurückzuführen sind. Bei schlechten Eisensorten zeigt sich eine Zunahme des Hystereseverlustes nach längerer Zeit schon infolge des Wechsels zwischen Tag- und Nachttemperatur. Dagegen zeigen gute Eisenbleche selbst nach längerer und wiederholter Erwärmung bis 150^0 nur eine geringe Zunahme.

Im allgemeinen zeigen auch gute Bleche unmittelbar nach ihrer Herstellung (Walzen und Ausglühen) eine bei gewöhnlicher Temperatur von selbst eintretende kleine Verschlechterung, die aber nach einigen Wochen nachläßt, und es tritt auch dann bei höherer Temperatur keine weitere Verschlechterung ein.

Ein Ausglühen der Bleche kann die eingetretene Alterung nicht wieder rückgängig machen.

---

[1]) ETZ 1899, S. 189; G. Stern, ebenda 1903, S. 407. Epstein, Stern, Soschinski, ebenda 1904, S. 497.

105. Der magnetische Kreis.

Verlaufen die geschlossenen magnetischen Kraftlinien in ihrer ganzen Länge durch einen ringförmig geschlossenen Körper von gleichmäßigem Querschnitt wie in Abb. 104, so ist nach § 91 die Kraftliniendichte

$$\mathfrak{B} = \mu \, \mathfrak{H}.$$

Die magnetisierende Kraft für diesen Fall kennen wir aus § 88, nämlich

$$\mathfrak{H} = \frac{4 \pi i N}{l},$$

wenn N die gesamte Anzahl der Windungen, l die mittlere Länge der Kraftlinien (des Kraftlinienpfades) und i die durch die Windungen geschickte Stromstärke in absol. Einh. bedeutet, oder

$$\mathfrak{H} = \frac{0{,}4 \pi i N}{l},$$

wenn i die Stromstärke in Ampere bedeutet.

Dann ist

$$\mathfrak{B} = \mu \frac{0{,}4 \pi i N}{l}.$$

Daraus erhält man die gesamte Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$, wenn man mit dem Querschnitt S des Kraftlinienbündels multipliziert, also

$$\mathfrak{Z} = \mu S \frac{0{,}4 \pi i N}{l}.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\mathfrak{Z} = \frac{0{,}4 \pi i N}{\frac{l}{\mu S}} \quad \text{. . . . . (63)}$$

so sieht man, daß sie gleiche Form mit dem Ohmschen Gesetze für einen elektrischen Stromkreis hat.

Bezeichnet man daher den Zähler als magnetomotorische Kraft $\mathfrak{F}$

$$\mathfrak{F} = 0{,}4 \pi i N = 1{,}257 \, i N \quad \text{. . . . . (64)}$$

und den Nenner als magnetischen Widerstand $\mathfrak{w}$

$$\mathfrak{w} = \frac{l}{\mu S} \quad \text{. . . . . (65)}$$

so ist

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}} \quad \text{. . . . . (66)}$$

d. h. die Kraftlinienmenge eines Kraftlinienbündels ist gleich der magnetomotorischen Kraft dividiert durch den magnetischen Widerstand.

Am häufigsten werden die vorstehenden Formeln in der Form

$$\mathfrak{Z} = \frac{0{,}4\,\pi\, i\, N}{\mathfrak{w}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66a)$$

angewendet.

Das Produkt iN nennt man die Amperewindungen. Mithin ist die MMK[1]) gleich den $0{,}4\,\pi$ fachen Amperewindungen.

Vergleicht man $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{H}$, so sieht man, daß

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\, l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

Ist die magnetisierende Kraft $\mathfrak{H}$ nicht auf der ganzen Länge l des Kraftlinienpfades konstant, so ist dieser in unendlich kurze Stücke dl zu zerlegen, für jedes das Produkt mit dem an dieser Stelle herrschenden $\mathfrak{H}$ zu bilden und alle diese Produkte sind zu addieren; also $\mathfrak{F} = \Sigma\, \mathfrak{H} \cdot dl$ oder analytisch angeschrieben

$$\mathfrak{F} = \int \mathfrak{H} \cdot dl$$

Die MMK ist also gleich dem Linienintegral der magnetisierenden Kraft.

Ferner sieht man aus dem Ausdruck für den magnetischen Widerstand, daß $\frac{1}{\mu}$ im magnetischen Kreis dieselbe Bedeutung hat wie der spezifische Widerstand in einem elektrischen Stromkreis. Daher kann man $\frac{1}{\mu}$ auch als spezifischen magnetischen Widerstand und μ als spezifisches magnetisches Leitungsvermögen bezeichnen.

Als einzige Voraussetzung für diese Ableitung besteht die, daß die ganzen $\mathfrak{Z}$ Kraftlinien durch den Querschnitt S gehen, wie in Abb. 104; dagegen ist es gleichgültig, an welcher Stelle die MMK sitzt, d. h. ob die Stromwindungen, von denen sie erzeugt wird, längs des ganzen Kraftlinienpfades verteilt sind, oder an einer Stelle sitzen.

Wirken zwei magnetomotorische Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ (zwei Stromspulen) in demselben Kraftlinienpfad, so ist die gesamte MMK $\mathfrak{F}$ gleich der Summer beider

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2,$$

[1]) Mit MMK wird die „magnetomotorische Kraft“ abgekürzt bezeichnet.

wenn sie im gleichen Sinne wirken, oder der Differenz

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2,$$

wenn sie im entgegengesestzten Sinne wirken.

106. Magnetische Widerstände in Hintereinanderschaltung.

Besteht der magnetische Kreis aus zwei Teilen von der Länge l_1 und l_2, den Querschnitten S_1, S_2 und verschiedener Durchlässigkeit μ_1 und μ_2, so sind die magnetischen Widerstände

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{l_1}{\mu_1 S_1} \qquad \mathfrak{w}_2 = \frac{l_2}{\mu_2 S_2}.$$

Werden beide Teile von denselben Kraftlinien durchsetzt, so sind die magnetischen Widerstände hintereinander geschaltet und der gesamte magnetische Widerstand $\mathfrak{w}$ ist gleich der Summe der einzelnen Widerstände, wie bei einem elektrischen Stromkreise:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2.$$

Es ist also

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2}.$$

Wird ein geschlossener Eisenring aufgeschnitten (Abb. 125), so daß ein Luftzwischenraum von der Länge d entsteht, so setzt sich nun der gesamte Widerstand zusammen aus dem in Eisen $\mathfrak{w}_1$ und dem in Luft $\mathfrak{w}_2$. Ist der Zwischenraum d klein im Verhältnis zum Querschnitt, so breiten sich die Kraftlinien nicht weiter aus, und man kann den Querschnitt des Kraftlinienbündels in Luft gleich den Endflächen (Polflächen) des Eisens setzen. Da für Luft $\mu = 1$ ist, so ist

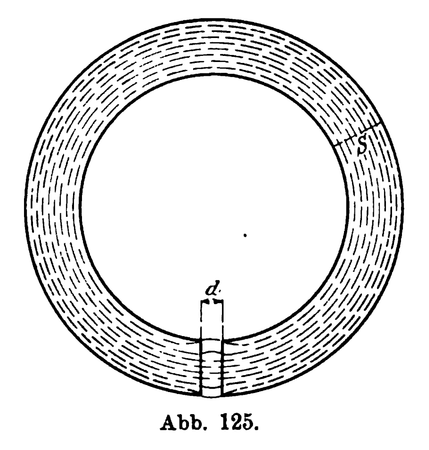


Abb. 125.

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{l}{\mu S} \qquad \mathfrak{w}_2 = \frac{d}{S}.$$

Daher der gesamte Widerstand

$$\mathfrak{w} = \frac{l}{\mu S} + \frac{d}{S}$$

und
$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{F}}{\frac{l}{\mu S} + \frac{d}{S}}.$$

Dividiert man durch den Querschnitt, so ergibt sich die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$. Man erhält so den magnetischen Zustand ohne die entmagnetisierende Kraft der an den Enden vorhandenen freien magnetischen Massen zu berücksichtigen. Statt durch die entmagnetisierende Kraft kommt hier die Verminderung der Kraftlinien dadurch zum Ausdruk, daß im Nenner der letzten Gleichung der magnetische Widerstand der Luft hinzugekommen ist. Je länger der Luftzwischenraum, desto größer die entmagnetisierende Kraft, desto größer aber auch der magnetische Widerstand. Beide Methoden müssen natürlich bei richtiger Berechnung der entmagnetisierenden Kraft und des magnetischen Widerstandes zu demselben Ergebnis führen. Diese Methode ist aber die leichtere und übersichtlichere.

In den meisten Fällen ist die Berechnung des magnetischen Widerstandes nur näherungsweise möglich, weil die Kraftlinien meist nicht gleiche Länge haben, und der Querschnitt eines Kraftbündels in Luft wegen der an verschiedenen Stellen verschiedenen Kraftliniendichte nicht genau definiert werden kann.

Selbst in einem geschlossenen Kreisring von Eisen ist die Länge der äußeren Kraftlinien größer als die der inneren. Ist die Dicke der Ringes nicht zu groß gegenüber dem inneren Radius, so ist die mittlere Länge l des Kraftlinienpfades gleich dem arithmetischen Mittel aus dem inneren und äußeren Umfang (l_i bzw. l_a).

$$l = \frac{l_i + l_a}{2}.$$

Ist aber der Ring sehr dick, so muß man setzen

$$l = \frac{l_a - l_i}{\log \text{nat} \frac{l_a}{l_i}}.$$

1. Beispiel. Ein Ring aus Schmiedeeisen von 8 cm² Querschnitt, 24 cm innerem, 26 cm äußerem Umfang ist mit 100 Windungen bewickelt, durch welche 1 Ampere Strom geschickt werden. Wie groß ist die Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$? Die mittlere Länge des Kraftlinienpfades ist $\frac{24 + 26}{2} = 25$.

Nach Gl. 52 ist die magnetisierende Kraft

$$\mathfrak{H} = \frac{0{,}4\pi i N}{l} = \frac{1{,}25 \cdot 1 \cdot 100}{25} = 5.$$

Dazu findet man aus Abb. 111 $\mathfrak{B} = 11300$ und daher

$$\mathfrak{Z} = 8 \cdot 11300 = 90400.$$

2. Beispiel. Hat derselbe Ring einen Luftzwischenraum von 0,1 cm Länge, so ensteht die Frage, welcher Strom ist notwendig, um dieselbe Kraftlinienmenge zu erzeugen? Nach obigem ist

$$\mathfrak{Z} = \frac{0{,}4\pi i N}{\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2},$$

also

$$i = \frac{1}{0{,}4\pi N} (\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2)\, \mathfrak{Z}.$$

Für die Durchlässigkeit des Schmiedeeisens bei $\mathfrak{B} = 11300$ findet man aus Abb. 109 $\mu = 2250$.

Daher

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{25}{2250 \cdot 8} = 0{,}0014.$$

Für den Luftzwischenraum ist

$$\mathfrak{w}_2 = \frac{0{,}1}{8} = 0{,}0125.$$

Also

$$i = \frac{1}{1{,}25 \cdot 100} (0{,}0014 + 0{,}0125)\; 90400 = 10{,}1 \text{ A}.$$

Man erkennt daraus den großen Einfluß eines selbst kurzen Luftzwischenraumes, denn ohne diesen genügte 1 A. für die gleiche Magnetisierung.

3. Beispiel. Die umgekehrte Aufgabe, aus der Stromstärke die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ oder die Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$ zu berechnen, ist auf direktem Wege unlösbar, weil man, um die Größe von μ zu erfahren, die Kraftliniendichte kennen muß, die aber erst berechnet werden soll. Um einen Näherungswert zu erhalten, vernachlässigt man den magnetischen Widerstand im Eisen und berücksichtigt nur den in Luft; dann ist

$$\mathfrak{w}_2 = \frac{0{,}1}{8} = 0{,}0125$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{0{,}4\pi i N}{\mathfrak{w}_2} = \frac{1{,}25 \cdot 10{,}3 \cdot 100}{0{,}0125} = 103000.$$

In Wirklichkeit ist dieser Wert zu hoch; wir können aber eine Korrektur anbringen, denn wir erfahren jetzt wenigstens den ungefähren Wert von $\mathfrak{B}$, wenn wir durch den Querschnitt dividieren, also

$$\frac{103000}{8} = 12900.$$

Dazu finden wir aus Abb. 109 $\mu = 1650$, und berechnen nun damit den magnetischen Widerstand im Eisen

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{25}{1650 \cdot 8} = 0{,}0019.$$

Nun ist

$$\mathfrak{Z} = \frac{0{,}4\pi i N}{\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2} = \frac{1{,}25 \cdot 10{,}3 \cdot 100}{0{,}0144} = 90000.$$

Man sieht, dieser zweite Näherungswert kommt dem wirklichen Wert, den wir aus dem 2. Beispiel kennen, schon beträchtlich näher. Wünscht man noch größere Annäherung, so kann man in gleicher Weise einen dritten Näherungswert berechnen.

Ist der Luftzwischenraum 0,5 cm oder mehr, so ist der magnetische Widerstand des Eisens gegen den der Luft in der Regel verschwindend klein.

107. Der magnetische Widerstand längerer Luftstrecken.

Ist die Länge d einer Luftstrecke zwischen zwei gleich großen Polflächen nicht sehr klein gegen das Ausmaß dieser Flächen, so kann der Querschnitt des Kraftlinienbündels nicht gleich dem der Polfläche gesetzt werden. Eine genaue Berechnung des magnetischen Widerstandes solcher Luftstrecken ist daher nicht möglich.

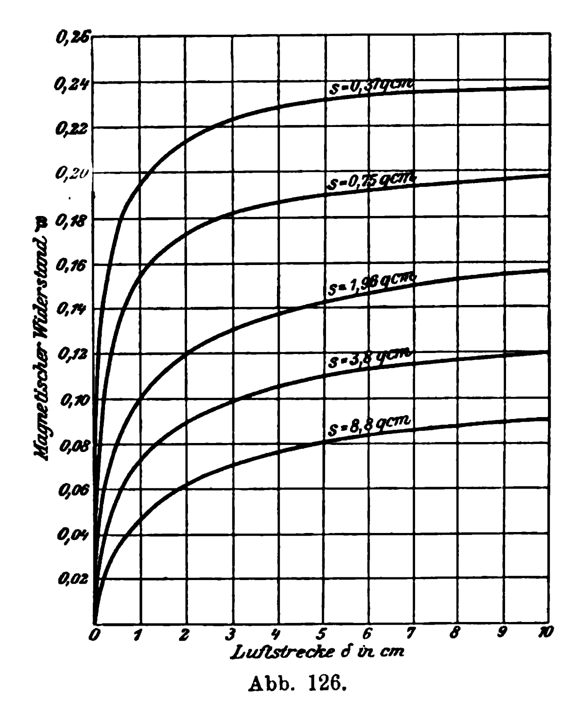


Abb. 126.

Abb. 126 stellt den experimentell ermittelten magnetischen Widerstand solcher Luftstrecken zwischen quadratischen, annähernd quadratischen, oder runden Polflächen von der Größe s und für Längen d bis zu 10 cm dar, nach Messungen des Verfassers[1]). Berechnet man daraus nach der Gleichung $\mathfrak{w} = \frac{d}{S}$ den äquivalenten

[1]) Benischke, ETZ 1904, S. 810.

Querschnitt S des Kraftlinienbündels in der Luft, d. h. jenen Querschnitt, den das Kraftlinienbündel haben müßte, wenn es in parallelen Linien und mit gleichmäßiger Dichte den Luftraum erfüllen würde, so kann man sie durch die lineare Gleichung

$$S = s + kd \quad \ldots \ldots \quad (68)$$

darstellen, wobei s die Polfläche und k einen Faktor bedeutet, dessen Abhängigkeit von der Polfläche durch Abb. 127 dargestellt ist. Man kann also damit die magnetischen Widerstände auch für solche Polflächen berechnen, die in Abb. 126 nicht enthalten sind, und zwar bis zu Längen von 10 cm.

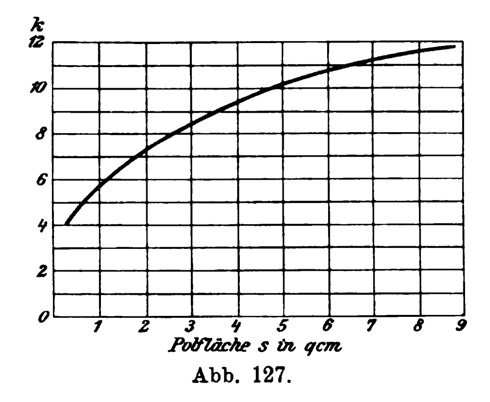


Abb. 127.

Stehen sich verschieden große Polflächen gegenüber (Abb. 128) und ist die Länge d klein gegenüber der kleineren der beiden Flächen, so kann der Querschnitt des Kraftlinienbündels S gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Polflächen s_1 und s_2 gesetzt werden, also

$$\mathfrak{w} = \frac{d}{\frac{s_1 + s_2}{2}} = \frac{2d}{s_1 + s_2}.$$

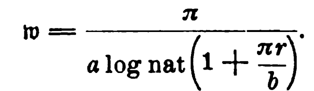
Abb. 128. Abb. 129. Abb. 130.

Für zwei nahe nebeneinander in derselben Ebene liegende Polflächen (Abb. 129), deren Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene a ist, ist der magnetische Widerstand

$$\mathfrak{w} = \frac{\pi}{a \log \text{nat} \frac{r_2}{r_1}}.$$

Liegen die Polflächen so weit auseinander, daß die Kraftlinien nicht mehr als Halbkreise betrachtet werden können (Abb. 130),

so ist



$$\mathfrak{w} = \frac{\pi}{a \log \text{nat}\left(1 + \frac{\pi r}{b}\right)}.$$

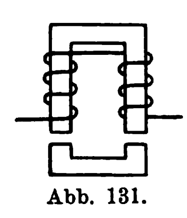


Abb. 131.

Beispiel. Bei einem Elektromagneten aus Schmiedeeisen (Abb. 131) von 8 cm² Eisenquerschnitt und 50 cm gesamter Eisenlänge (Schenkel + Anker) und bei einem Luftzwischenraum von 1 cm sei eine Kraftliniendichte von $\mathfrak{B} = 3000$ erforderlich, um eine gewisse Zugkraft zu erhalten; wieviel Amperewindungen (iN) sind erforderlich, um diese Magnetisierung herzustellen? Ist $\mathfrak{w}_1$ der magnetische Widerstand im ganzen Eisen, $\mathfrak{w}_2$ der eines Luftzwischenraumes, so ist nach Gl. 66a

$$iN = \frac{\mathfrak{Z}}{0{,}4\pi}(\mathfrak{w}_1 + 2\mathfrak{w}_2).$$

Nun ist $\mathfrak{Z} = 8 \cdot 3000 = 24000$; μ finden wir aus Abb. 109 gleich 2300. Daher

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{50}{2300 \cdot 8} = 0{,}0027.$$

Für einen Luftzwischenraum ist $\mathfrak{w}_2 = \frac{d}{S}$; S finden wir aus Gl. 68, nachdem wir für k aus Abb. 127 den Wert 11,8 entnommen haben:

$$S = 8 + 11{,}8 \cdot 1 = 19{,}8; \qquad \mathfrak{w}_2 = \frac{1}{19{,}8} = 0{,}05;$$

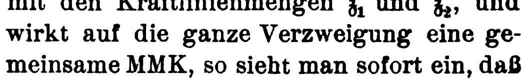
also

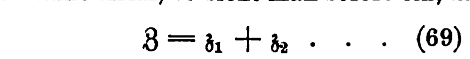
$$iN = \frac{24000}{1{,}25}(0{,}027 + 2 \cdot 0{,}05) = 19200 \cdot 0{,}103 = 1980.$$

Hätte man den magnetischen Widerstand im Eisen gegen den des Luftzwischenraumes vernachlässigt, so hätte der Fehler nur 3% betragen.

108. Verzweigung eines Kraftlinienbündels. Magnetische Widerstände in Nebeneinanderschaltung.

Teilt sich ein Kraftlinienbündel mit der Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$ in zwei Zweige (Abb. 132) mit den Kraftlinienmengen $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, und wirkt auf die ganze Verzweigung eine gemeinsame MMK, so sieht man sofort ein, daß





$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

ist, weil in den Zweigen weder Kraftlinien entstehen, noch verschwinden können. Das ist das erste Kirchhoffsche Gesetz in Anwendung auf den magnetischen Kreis.

Abb. 132.

Ist $\mathfrak{W}$ der magnetische Widerstand der ganzen Verzweigung, $\mathfrak{w}_1$ der des einen, $\mathfrak{w}_2$ der des anderen Zweiges, so ist

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{W}},$$

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}_1},$$

$$\mathfrak{z}_2 = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}_2}.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 = \frac{1}{\mathfrak{w}_1} : \frac{1}{\mathfrak{w}_2} \quad \ldots\ldots \quad (70)$$

d. h. die Kraftlinienmengen verhalten sich umgekehrt wie die magnetischen Widerstände.

Zufolge der ersten Gleichung ist

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}_1} + \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}_2} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{W}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{\mathfrak{w}_1} + \frac{1}{\mathfrak{w}_2}$$

oder

$$\mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2}{\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2} \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

Wie vorauszusehen war, gilt auch da dasselbe Gesetz wie für eine Stromverzweigung.

Zieht man den ganzen Weg der geschlossenen Kraftlinien in Betracht (Abb. 133), so ist der magnetische Widerstand $\mathfrak{w}$ des gemeinsamen Weges dem der Verzweigung vorgeschaltet; es ist also

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{w} + \frac{\mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2}{\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2} \quad \ldots \quad (72)$$

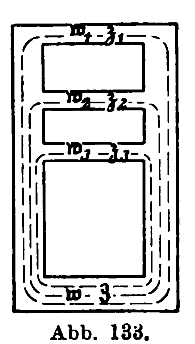


Abb. 133.

Für drei oder mehr Zweige (Abb. 133) gilt

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 + \ldots$$

$$\frac{1}{\mathfrak{W}} = \frac{1}{\mathfrak{w}_1} + \frac{1}{\mathfrak{w}_2} + \frac{1}{\mathfrak{w}_3} + \ldots$$

Für die Kraftlinienmengen in den einzelnen Bündeln ergeben sich folgende Beziehungen. Da man das Ohmsche Gesetz für den magnetischen Kreis in der Form

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{w}\mathfrak{Z} \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

schreiben kann, so gilt für jeden geschlossenen Kreis, der in der Verzweigung enthalten ist, das zweite Kirchhoffsche Gesetz, wo

nach die gesamte MMK gleich ist der Summe aus den Produkten von magnetischem Widerstand und Kraftlinienmenge. So ist für den geschlossenen Kreis, der den ersten Zweig enthält

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{w}\mathfrak{Z} + \mathfrak{w}_1\mathfrak{z}_1$$

für den zweiten

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{w}\mathfrak{Z} + \mathfrak{w}_2\mathfrak{z}_2 \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

und für den dritten

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{w}\mathfrak{Z} + \mathfrak{w}_3\mathfrak{z}_3.$$

In dem von $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ gebildeten magnetischen Kreis wirkt keine MMK. Es ist also

$$0 = \mathfrak{w}_1\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{w}_2\mathfrak{z}_2$$

In gleicher Weise gilt

$$0 = \mathfrak{w}_1\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{w}_3\mathfrak{z}_3 \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

$$0 = \mathfrak{w}_2\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{w}_3\mathfrak{z}_3$$

Die letzten drei Gleichungen kann man auch in folgende Form bringen

$$\mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 : \mathfrak{z}_3 = \frac{1}{\mathfrak{w}_1} : \frac{1}{\mathfrak{w}_2} : \frac{1}{\mathfrak{w}_3}.$$

Enthält auch noch einer der Zweige eine MMK z. B. $\mathfrak{F}_3$, so gelten folgende Gleichungen

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{w}\mathfrak{z} + \mathfrak{w}_3\mathfrak{z}_3$$

$$\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{w}_1\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{w}_3\mathfrak{z}_3$$

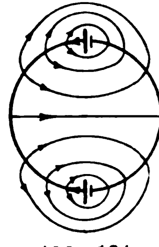
usw.

Nach diesen Gleichungen kann man die MMK aus den Kraftlinienmengen ohne weiteres berechnen, da man aus Abb. 109 die entsprechenden Werte von μ entnehmen kann. Das umgekehrte Problem, aus den MMKen die Kraftlinienmengen zu berechnen, kann unmittelbar nicht gelöst werden, da man eben $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{B}$ nicht kennt. Man kann dann μ, soweit es sich um ferromagnetische Körper handelt, nur schätzen.

109. Magnetomotorische Kräfte von entgegengesetzter Richtung. Magnetische Stauung.

Wirken in einem aus guten Leitern gebildeten, gegen außen isolierten elektrischen Stromkreis zwei gleich große EMKe von entgegengesetzter Richtung, so ist die Stromstärke Null, weil der Strom wegen der Isolation nicht aus den guten Leitern heraustreten kann. Würde man aber den Stromkreis ohne Isolation in eine leitende

Flüssigkeit eintauchen (Abb. 134), so würde aus jeder der beiden EMKe ein Strom entstehen, der durch die Flüssigkeit von einem Pol zum anderen geht; die leitende Flüssigkeit bildet einen elektrischen Nebenschluß zum eigentlichen Stromkreis. Die mit Pfeilen versehenen Linien in Abb. 134 deuten den Stromverlauf an.


Abb. 134.

Wirken in einem geschlossenen Eisenkörper, wie z. B. in dem durch Abb. 135 dargestellten Ring, zwei gleich große MMKe von entgegengesetzter Richtung, so würde die Magnetisierung im Ring Null sein, wenn die Kraftlinien nicht aus dem Ring in die Luft übertreten würden. Das ist aber tatsächlich fast immer der Fall, weil der magnetische Widerstand der Luft nicht unendlich groß ist gegenüber dem des Eisens. Infolgedessen bilden sich magnetische Nebenschlüsse durch die Luft, wie die Abbildung zeigt. An den Stellen, wo die Kraftlinien in Luft übertreten — und das ist hauptsächlich an den Enden der Wickelung der Fall — treten freie magnetische Massen *n*, *s* auf. Ihr Vorzeichen, und darnach die Richtung der Kraftlinien erkennt man aus der Ampereschen Regel. Dasselbe ist der Fall, auch wenn das Eisen wie in Abb. 136 keinen geschlossenen Körper bildet. Man bezeichnet diese an den Außenflächen auftretenden freien magnetischen Massen *n*, *s* als magnetische Folgepole. Das Kraftlinienbild gewährt den Eindruck, als ob sich die Kraftlinien gegenseitig stauen würden, wie 2 Flüssigkeitsstrahlen, die aufeinander treffen und seitwärts abfließen. Daher wurde vom Verfasser für diese Erscheinung die Bezeichnung „magnetische Stauung" angewendet.[1])

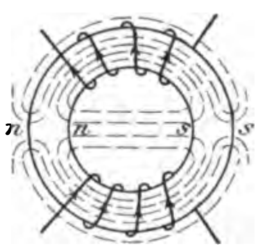


Abb. 135. Magnetische Stauung in einem Ring.

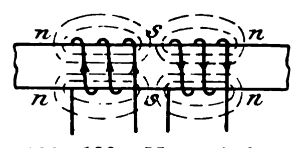


Abb. 136. Magnetische Stauung in einem offenen Stück.

Die in diesen beiden Abbildungen dargestellten Fälle sind von praktischer Wichtigkeit. Der erstere entspricht dem Ringanker einer elektrischen Maschine. Ein solcher besitzt eine fortlaufende in sich geschlossene Wickelung, der an zwei Stellen (bei mehrpoligen Maschinen an mehr Stellen) Strom durch Bürsten zu- oder abgeleitet wird (Abb. 137). Dadurch erscheint die geschlossene Wickelung in zwei Teile von entgegen-

[1]) Benischke, „Grundgesetze der Wechselstromtechnik" § 26.

gesetzter Stromrichtung zerlegt, und an den Stromzuführungsstellen entstehen Außen- oder Folgepole.

Magnetische Felder, welche durch entgegengesetzte Stromrichtung erzeugt werden, treten ferner bei Transformatoren und Induktionsmotoren auf, wenn die Phasenverschiebung zwischen primärem und sekundärem Strom 180° beträgt, denn dann sind diese beiden Ströme in jedem Augenblick einander entgegengerichtet. Die Abb. 136 entspricht insbesondere einem Transformator, dessen primäre und sekundäre Wickelung in Abteilungen nebeneinander liegen. Ist die Phasenverschiebung kleiner als 180°, so ist die Stauung entsprechend kleiner.

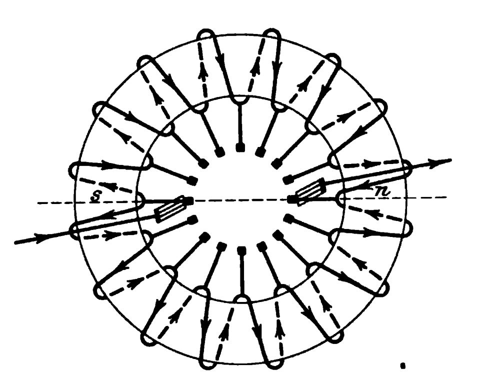


Abb. 137. Geschlossene Ringwickelung mit Stromzuleitung an zwei gegenüberliegenden Stellen.

Wie groß die Anzahl der aus dem Eisen in Luft übertretenden Kraftlinien ist, hängt von dem magnetischen Widerstand in Eisen und Luft ab. Wäre der magnetische Widerstand der Luft unendlich groß gegenüber dem im Eisen, so würden die Kraftlinien keine magnetischen Nebenschlüsse durch die Luft bilden können, und daher wären auch keine Kraftlinien im Eisenkörper vorhanden; die MMKe würden sich gegenseitig aufheben.

Bei gleichen magnetischen Widerständen ist die Stauung natürlich um so größer, je größer die MMKe sind.

Sind zwei MMKe zwar entgegengesetzt gerichtet, aber nicht gleich groß, so entsteht natürlich im Eisenkörper eine Kraftlinienmenge entsprechend dem Unterschied beider MMKe; außerdem gehen aber auch Kraftlinien durch die Luft, jedoch weniger, als wenn die MMKe gleich groß sind.

110. Magnetische Streuung.

Wird ein geschlossener Eisenkörper (Abb. 138) durch eine Stromspule magnetisiert, so verläuft der größte Teil der Kraftlinien in ihm. Einige aber treten an den Enden der Spule aus dem Eisenkörper heraus und schließen sich durch die Luft. Bei einer zweipoligen Gleichstrommaschine (Abb. 139) tritt nur ein Teil der gesamten, von der Magnetwicklung erzeugten Kraftlinienmenge in den Anker ein und durchsetzt seinen Querschnitt CD. Der übrige

Teil geht seitwärts durch die Luft, kann also im Anker nicht nutzbar gemacht werden.

Dieses Heraustreten aus dem gewünschten oder beabsichtigten Wege nennt man **Kraftlinienstreuung** oder **magnetische Streuung**.

Diese Verhältnisse sind ganz ähnlich wie bei einem Stromleiter, den man in die Erde verlegt (stromleitende Bahnschienen). Aus diesem treten überall Ströme heraus und gehen durch die Erde zum anderen Pol, weil der elektrische Widerstand der Erde nicht unendlich groß ist gegenüber dem der Schienen. Während es aber für elektrische Ströme isolierende Stoffe gibt, deren Widerstand unendlich groß ist gegenüber dem der Metalle und daher eine vollständige elektrische Isolation möglich ist, gibt es für den Magnetismus keinen derartigen Stoff, welcher eine magnetische Isolation möglich machen würde.

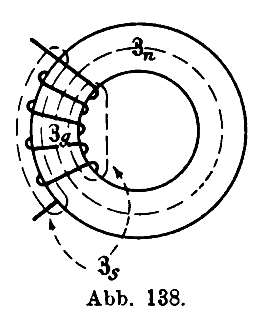


Abb. 138.

Als **Streukoeffizient** oder **Streufaktor** τ bezeichnet man entweder das Verhältnis der Streulinien $\mathfrak{Z}_s$ zu den nützlichen Kraftlinien $\mathfrak{Z}_n$; es ist also

$$\tau = \frac{\mathfrak{Z}_s}{\mathfrak{Z}_n} \quad . \; . \; . \quad (76)$$

oder das Verhältnis der gesamten Kraftlinien $\mathfrak{Z}_g$ zu den nützlichen Kraftlinien $\mathfrak{Z}_n$, das man mit v bezeichnet. Es ist also

$$v = \frac{\mathfrak{Z}_g}{\mathfrak{Z}_n} \quad . \; . \; . \quad (77)$$

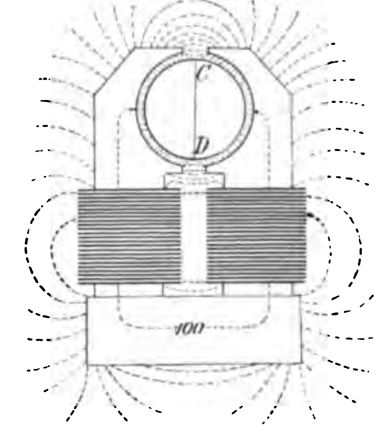


Abb. 139. Magnetische Streuung bei einer zweipoligen Gleichstrommaschine.

Beide Streufaktoren sind um so größer, je größer die Anzahl der Streulinien im Verhältnis zu den anderen ist.

Da die gesamten Kraftlinien $\mathfrak{Z}_g$ aus der Summe der nützlichen und der Streulinien bestehen (Abb. 138), so ergibt sich folgende Beziehung zwischen den beiden Streufaktoren τ und v:

$$\mathfrak{Z}_g = \mathfrak{Z}_n + \mathfrak{Z}_s = \mathfrak{Z}_n + \tau\, \mathfrak{Z}_n = \mathfrak{Z}_n\, (1 + \tau)$$

also

$$1 + \tau = \frac{\mathfrak{Z}_g}{\mathfrak{Z}_n} = v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (78)$$

Ist $\mathfrak{F}$ die MMK, $\mathfrak{w}_n$ der magnetische Widerstand der nützlichen Kraftlinien, $\mathfrak{w}_s$ der der streuenden und $\mathfrak{w}_g$ der der gesamten, so ist

$$\mathfrak{Z}_n = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}_n}, \qquad \mathfrak{Z}_s = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}_s}, \qquad \mathfrak{Z}_g = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}_g}.$$

Daraus folgt

$$\tau = \frac{\mathfrak{w}_n}{\mathfrak{w}_s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (79)$$

$$v = \frac{\mathfrak{w}_n}{\mathfrak{w}_g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (80)$$

Da $\mathfrak{Z}_g = \mathfrak{Z}_n + \mathfrak{Z}_s$ ist, so ist

$$\frac{1}{\mathfrak{w}_g} = \frac{1}{\mathfrak{w}_n} + \frac{1}{\mathfrak{w}_s}$$

oder

$$\mathfrak{w}_g = \frac{\mathfrak{w}_n \mathfrak{w}_s}{\mathfrak{w}_n + \mathfrak{w}_s}$$

was auch ohne weiteres aus § 108 folgt, da die Kraftlinienbündel $\mathfrak{Z}_n$ und $\mathfrak{Z}_s$ parallel geschaltet sind.

Aus den obigen Gleichungen folgt, daß die Anzahl der streuenden Kraftlinien im Verhältnis zu den nützlichen, also die **Streuung** schlechtweg, um so größer ist, je größer der magnetische Widerstand der nützlichen Kraftlinien gegenüber dem der streuenden ist. Da der magnetische Widerstand verkehrt proportional der magnetischen Durchlässigkeit ist, so ist die Streuung bei einem geschlossenen Eisenkörper, wo die nützlichen Kraftlinien alle im Eisen und die streuenden hauptsächlich in der Luft verlaufen, ungefähr proportional dem Verhältnis der magnetischen Durchlässigkeit der Luft zu Eisen: $\frac{1}{\mu}$. Da für Eisen μ veränderlich ist und nach Abb. 109 für Schmiedeeisen und Stahlguß bei einer Kraftliniendichte von 4000—9000 am größten ist, so ist hierbei die Streuung am kleinsten.

Noch mehr als von der magnetischen Durchlässigkeit ist die Streuung von der **Gestalt des Eisenkernes** und der **Wickelung** abhängig. Vergleicht man die Abb. 140 und 141, die denselben Eisenkern haben, wo aber in dem einen Falle die Spule auf dem langen Joch, in dem anderen auf dem kurzen Joch sitzt, so erkennt man sofort, daß im letzteren Falle die Streuung größer sein muß, weil der Kraftlinienweg des Streufeldes in der Luft viel kürzer ist als im ersten Falle. Von großem Einfluß sind auch die Stoßfugen, weil ihr magnetischer Widerstand beträchtlich ist. Infolgedessen ist die Streuung bei den Abb. 142 bis 144 größer als bei den Abb. 140 und 141; und bei Abb. 143 wiederum größer als

bei Abb. 142. Am größten ist sie bei Abb. 144, weil hier die Stoßfugen nur im Wege der nützlichen Kraftlinien liegen und nicht gleichzeitig auch im Wege der streuenden.

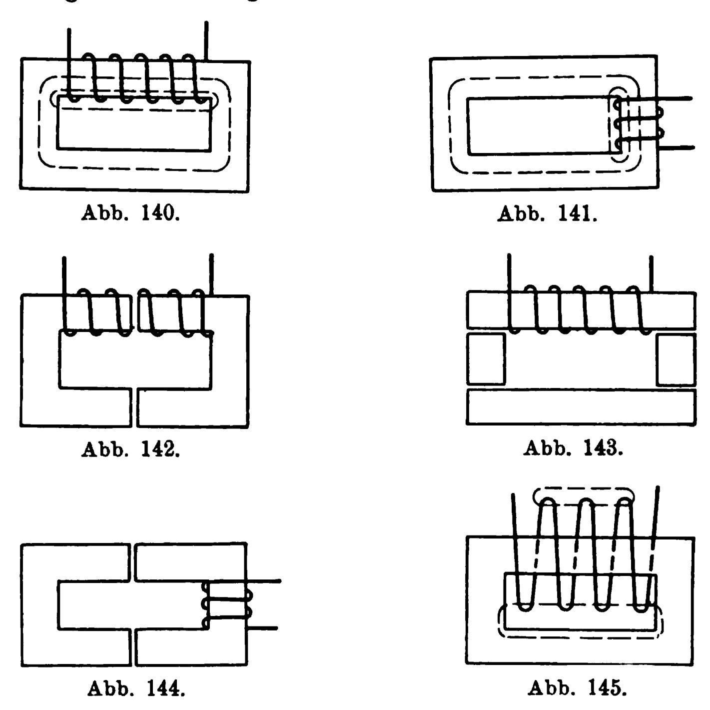


Abb. 140. Abb. 141.

Abb. 142. Abb. 143.

Abb. 144. Abb. 145.

Ist der Durchmesser der Wickelung wesentlich größer als der Kern (Abb. 145), so ist die Streuung größer, als wenn sie den Kern knapp umgibt.

Aber auch dann ist schon eine Streuung vorhanden, wenn auf einem geschlossenen Eisenkörper die Wickelung ungleich verteilt ist (Abb. 146).

Unter sonst gleichen Verhältnissen hängt demnach die magnetische Streuung lediglich von der geometrischen Form des Eisenkörpers und von der Lage der Wickelung ab.

Noch anders ist es, wenn sich auf dem Eisenkern zwei stromführende Wickelungen befinden, deren MMKe einander entgegenwirken. Dann tritt zu der eben besprochenen Streuung jeder der beiden Wickelungen noch die im vorigen Paragraph besprochene magnetische Stauung hinzu. In solchen Fällen besteht also die gesamte mag-

Abb. 146. Magnetische Streuung bei ungleich verteilter Wickelung.

netische Streuung aus zwei Teilen, nämlich aus der magnetischen Streuung im engeren Sinne, das ist die Streuung jeder Wickelung für sich, die von der anderen Wickelung unabhängig ist, und nur von der Gestalt des Kernes und der Wickelung, sowie von dem Verhältnis der magnetischen Widerstände $\frac{\mathfrak{w}_n}{\mathfrak{w}_s}$ abhängt, und aus der magnetischen Stauung, die von der Lage und Größe der entgegengerichteten MMKe, also von den Stromstärken in den beiden Spulen und ihrer gegenseitigen Lage, sowie von der Phasenverschiebung zwischen den beiden Strömen abhängt. Das ist besonders bei Transformatoren und Induktionsmotoren von Wichtigkeit.

111. Magnetische Charakteristik.

Die Schaulinien in Abb. 111 stellen die Abhängigkeit der Kraftliniendichte von der magnetisierenden Kraft bei ferromagnetischen Körpern dar und zwar unabhängig von der Gestalt des magnetisierten Körpers. Herrscht an irgend einer Stelle desselben die magnetisierende Kraft $\mathfrak{H}$, so ist die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ an der betreffenden Stelle durch die dazu gehörige Ordinate der Abb. 111 dargestellt. Herrscht im ganzen Körper dieselbe magnetisierende Kraft und dieselbe Durchlässigkeit μ, so ist auch die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ im ganzen Körper dieselbe. Multipliziert man $\mathfrak{B}$ mit dem Querschnitt S des Kraftlinienbündels, so erhält man die Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$. Ist der magnetisierte Körper ein geschlossener, so daß der ganze Kraftlinienpfad in ihm verläuft, so kann man $\mathfrak{H}$ mit der Länge l des Kraftlinienpfades multiplizieren und erhält nach Gl. 67 die MMK $\mathfrak{F}$. Die Kurve, welche die Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$ in Abhängigkeit von $\mathfrak{F}$ darstellt, unterscheidet sich also von den Kurven in Abb. 111 nur durch die Maßstäbe der Abszissen und Ordinaten.

Ist der magnetisierte Körper kein geschlossener, sondern hat er einen Luftzwischenraum (Abb. 125), so muß die Kraftlinienmenge nach § 105 aus dem Ohmschen Gesetze für magnetische Kreise berechnet werden. Ist $\mathfrak{w}_1$ der magnetische Widerstand des Kraftlinienpfades im Eisen und $\mathfrak{w}_2$ der im Luftzwischenraum, so ist nach § 106

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{w}_1 \mathfrak{Z} + \mathfrak{w}_2 \mathfrak{Z},$$

$\mathfrak{w}_1 \mathfrak{Z}$ stellt also denjenigen Teil der MMK dar, welcher auf den Weg im Eisen, und $\mathfrak{w}_2 \mathfrak{Z}$ denjenigen, welcher auf den Weg in der Luft entfällt. Entsprechend dem Spannungsabfall in einem elektrischen Stromkreis kann man $\mathfrak{w}_1 \mathfrak{Z}$ als Abfall der MMK im Eisen und $\mathfrak{w}_2 \mathfrak{Z}$ als Abfall der MMK im Luftzwischenarm bezeichnen.

Berechnet man für jeden Teil die Abhängkeit der Kraftlinienmenge von der MMK, so erhält man für den Eisenkörper die Kurve *I* in Abb. 147, für den Luftzwischenraum die Kurve *II*. Da sich nach der letzten Gleichung die Abszissen addieren, so stellt die Kurve *III* die Beziehung zwischen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{F}$ für den betreffenden Körper dar. Für jede beliebige Ordinate ist die Abszisse der Kurve *III* gleich der Summe der Abszissen von *I* und *II*:

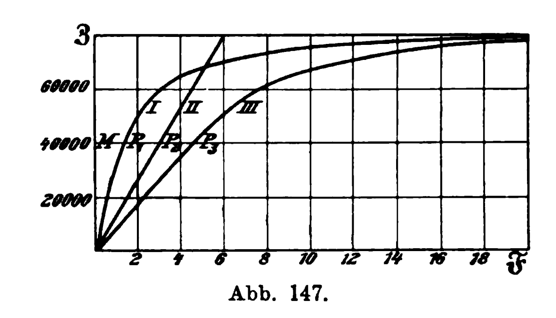


Abb. 147.

$$M P_3 = M P_1 + M P_2.$$

Verändert man den Abszissenmaßstab im Verhältnis von 0,4 π, so stellen die Abszissen die Amperewindungen iN dar. Die Kurve *III* bezeichnet man als **magnetische Charakteristik** des betreffenden Körpers. Sie unterscheidet sich von den Magnetisierungskurven in Abb. 109 bis 111 dadurch, daß jene unabhängig von der Gestalt des magnetisierenden Körpers für irgend eine Stelle desselben gelten, während diese für einen magnetisierten Körper von bestimmter Gestalt gilt. Die magnetische Charakteristik bildet den Übergang zur **Leerlaufcharakteristik** einer Gleichstrommaschine oder einer synchronen Wechselstrommaschine, denn die MMK ist proportional dem Erregerstrom und die EMK der Maschine ist proportional der Kraftlinienmenge, welche aus den Magnetpolen in den Anker übertritt.

Die den Abfall der MMK in einem Luftzwischenraum darstellende Kurve ist immer eine Gerade, wie *II* in Abb. 147, weil die magnetische Durchlässigkeit μ der Luft konstant und gleich 1 ist.

Aus Abb. 147 erkennt man auch, daß die magnetische Charakteristik um so geradliniger und um so horizontaler verläuft, je horizontaler die Luftlinie *II* verläuft, d. h. je größer der Luftzwischenraum ist.

Liegt bei einem ferromagnetischen Körper ein Luftzwischenraum im **Nebenschluß** (Abb. 148), so ergibt sich die magnetische Charakteristik auf folgende Weise. Sind $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ die Kraftlinienmengen der beiden Zweige, so ist die gesamte Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$

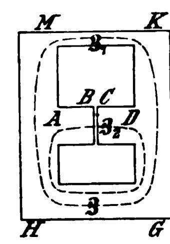


Abb. 148.

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2.$$

Ist $\mathfrak{F}$ die MMK zwischen den Verzweigungspunkten A und D, ist $\mathfrak{w}_1$ der magnetische Widerstand des Kraftlinienpfades $AMKD$, und $\mathfrak{w}_2$ der des Kraftlinienpfades AD, so ist

$$\mathfrak{Z}_1 = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}_1}, \qquad \mathfrak{Z}_2 = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}_2}.$$

Diese beiden Beziehungen sind in Abb. 149 durch die Kurven *I* und *II* dargestellt. Die letztere ist eine gerade Linie, wenn der magnetische Widerstand der Stücke AB und CD verschwindend klein ist gegenüber dem des Luftzwischenraumes BC. Daraus erhält man nun die Kurve *III* für die gesamte Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$, wenn man gemäß der obigen Gleichung die zu demselben Abszissenwerte $\mathfrak{F}$ gehörigen Ordinaten addiert. Wie man daraus ersieht, wird die magnetische Charakteristik durch einen im Nebenschluß liegenden Luftzwischenraum ebenso verflacht wie in Abb. 147 durch einen in der Hintereinanderschaltung liegenden Luftzwischenraum. Dagegen wird sie steiler als jene, da die gesamte Kraftlinienmenge durch den Nebenschluß vermehrt wird.

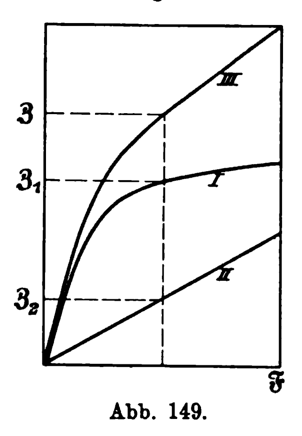


Abb. 149.

Ist der magnetische Widerstand der Stücke AB und CD nicht verschwindend klein gegenüber dem des Luftzwischenraumes BC, so ist die Kurve *II* keine gerade Linie, sondern gekrümmt und muß so wie die Kurve *III* in Abb. 147 ermittelt werden.

Ist der magnetische Widerstand des Kraftlinienpfades $AHGD$ vor der Verzweigungsstelle nicht vernachlässigbar, so ist das Verfahren zur Ermittelung der magnetischen Charakteristik nicht mehr so einfach, weil dann die Gl. 72 in Anwendung kommen muß.

Die Aufstellung der magnetischen Charakteristik ist dann von Wichtigkeit, wenn es sich darum handelt, die zu einer bestimmten MMK oder einer bestimmten Stromstärke gehörige Kraftlinienmenge oder Kraftliniendichte zu ermitteln. Direkt und für einen bestimmten Wert ist diese Aufgabe, wie wir schon in § 106 (3. Beispiel) gesehen haben, unlösbar, weil man die Durchlässigkeit μ aus Abb. 109 nur dann entnehmen kann, wenn man die Kraftliniendichte bereits kennt. Man bestimmt daher die zu verschiedenen Kraftliniendichten gehörigen Werte von $\mathfrak{Z}$ und trägt sie wie in Abb. 147 oder 149 in Abhängigkeit von der MMK $\mathfrak{F}$ oder von den Amperewindungen iN oder von der Stromstärke i auf. Daraus entnimmt

man dann die zu einem bestimmten Werte von $\mathfrak{F}$, iN oder i gehörige Ordinate $\mathfrak{B}$.

112. Praktische Anwendungen.

Wir haben bereits in § 106 (2. Beispiel) und in § 107 die Aufgabe gelöst, den zu einer gewissen Magnetisierung erforderlichen Strom zu berechnen. Diese Aufgabe spielt in der Praxis eine große

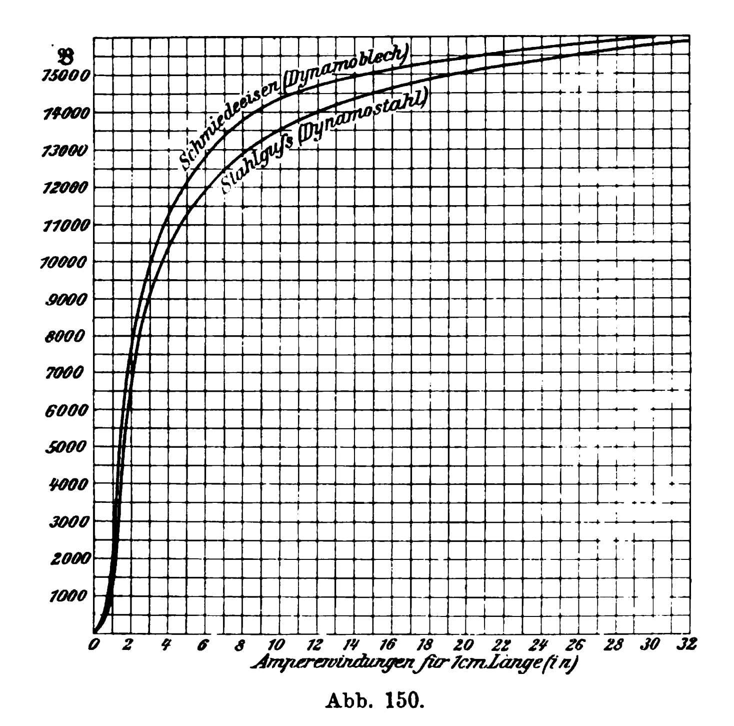


Abb. 150.

Rolle, denn man erhält aus ihr die Größe des erforderlichen Erregerstromes bei Maschinen, Elektromagneten usw. Infolge der Häufigkeit dieser Aufgabe hat man sich Kurven zurechtgelegt, welche die Beziehung zwischen Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ und Amperewindungen für eine Längeneinheit in unmittelbar zu entnehmen gestatten. Abb. 150 enthält diese Kurven. Die Rechnung wird dann etwas kürzer, wenn in dem magnetischen Kreis verschiedene Kraftliniendichten vorkommen, wie es bei elektrischen Maschinen zumeist der Fall ist. Besteht z. B. der magnetische Kreis aus Stücken von verschiedener Abmessung ($l_1\,S_1$, $l_2\,S_2$, $l_3\,S_3$ . . .), so ist nach § 106

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_3 + \ldots}$$

$$= \frac{1{,}257\, iN}{\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \frac{l_3}{\mu_3 S_3} + \ldots}$$

Daraus ist die gesamte Amperewindungszahl

$$iN = \frac{1}{1{,}257}\left(\frac{l_1\,\mathfrak{Z}}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2\,\mathfrak{Z}}{\mu_2 S_2} + \frac{l_3\,\mathfrak{Z}}{\mu_3 S_3} + \ldots\right)$$

Weil

$$\frac{\mathfrak{Z}}{S_1} = \mathfrak{B}_1, \quad \frac{\mathfrak{Z}}{S_2} = \mathfrak{B}_2 \text{ usw.},$$

so ist

$$iN = 0{,}8\left(\frac{\mathfrak{B}_1 l_1}{\mu_1} + \frac{\mathfrak{B}_2 l_2}{\mu_2} + \frac{\mathfrak{B}_3 l_3}{\mu_3} + \ldots\right) \quad . \quad . \quad (81)$$

Diese Gleichung kann zur Ausrechnung von iN benutzt werden, indem man die zu $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ . . . gehörigen Werte μ_1, μ_2 . . . aus Abb. 109 entnimmt.

Schneller kommt man mit Hilfe der Kurven in Abb. 150 zum Ziele. Denn es ist (nach Gl. 58)

$$\frac{\mathfrak{B}_1}{\mu_1} = \mathfrak{H}_1, \quad \frac{\mathfrak{B}_2}{\mu_2} = \mathfrak{H}_2 \quad \text{usw.}$$

und nach Gl. 51

$$\frac{\mathfrak{H}_1}{1{,}257} = (in)_1, \quad \frac{\mathfrak{H}_2}{1{,}257} = (in)_2 \quad \text{usw.},$$

wobei in die auf eine Längeneinheit des betreffenden Stückes entfallenden Amperewindungen bedeutet. Der Index zeigt an, zu welchem Stück sie gehören.

Man hat also

$$iN = l_1\,(in)_1 + l_2\,(in)_2 + l_3\,(in)_3 + \ldots$$

Diese Gleichung besagt, daß die gesamten Amperewindungen gleich sind der Summe der Produkte aus den Amperewindungen pro Längeneinheit und der Länge der betreffenden Stücke.

Man hat also bei Benutzung der Kurven in Abb. 150 folgendermaßen zu verfahren. Man bestimmt die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ . . . . für die einzelnen Stücke des magnetischen Kreises und entnimmt nun den Kurven die dazu gehörigen Amperewindungen pro Längeneinheit. Diese sind mit den Längen der betreffenden Stücke l_1 l_2 l_3 . . . . zu multiplizieren, so daß man die zur Magneti-

sierung jedes Stückes aufzuwendenden Amperewindungen erhält. Ihre Summe gibt die gesamten Amperewindungen.

Für Luft ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$; daher nach Gl. 51

$$\mathfrak{B} = 1{,}26\ in \quad \text{oder}$$

$$in = 0{,}8\,\mathfrak{B} \quad \ldots \ldots \quad (82)$$

Beispiel: Im Anker einer Gleichstrommaschine (Abb. 139) seien 5 400 000 Kraftlinien zur Erzeugung einer gewissen Spannung notwendig. Wieviel Amperewindungen müssen die Schenkel des Feldmagnetes erhalten? Beim Übergange der Kraftlinien vom Feldmagnete zum Anker findet eine Streuung statt, deren Koeffizient $v = 1{,}2$ sei. Es müssen also in den Feldmagneten $5400000 \cdot 1{,}2 = 6\,480\,000$ Kraftlinien erzeugt werden. Die mittlere Länge der Kraftlinien im Feldmagnet sei $l_1 = 100$, sein Querschnitt $S_1 = 600$ cm². Die Länge eines Luftzwischenraumes sei 1 cm; beide zusammen also: $l_2 = 2$; ihr Querschnitt $S_2 = 1200$ cm². Die mittlere Länge der Kraftlinien im Anker sei $l_3 = 15$ cm, der von den Kraftlinien durchsetzte Querschnitt $S_3 = 450$ cm². Dann ist

$$\mathfrak{B}_1 = 6\,480\,000 : \ 600 = 10\,800$$
$$\mathfrak{B}_2 = 5\,400\,000 : 1200 = \ 4\,500$$
$$\mathfrak{B}_3 = 5\,400\,000 : \ 450 = 12\,000.$$

Nun haben wir aus den Kurven (Abb. 150), die zu diesen Induktionswerten gehörigen Amperewindungen pro Längeneinheit zu suchen und finden (Magnete aus Stahlguß, Anker aus Dynamoblech)

$$(in)_1 = 4{,}5 \quad (in)_3 = 4{,}8.$$

Für den Luftzwischenraum ist $(in)_2 = 0{,}8 \cdot 4500 = 3600$.

Wenn wir mit den dazu gehörenden Längen multiplizieren, erhalten wir die für die einzelnen Stücke aufzuwendenden Amperewindungen. Ihre Summe gibt die gesuchten Amperewindungen, mit denen der Feldmagnet zu versehen ist. Zur besseren Übersicht folgen die Zahlen in Zusammenstellung:

	l	S	$\mathfrak{B}$	in	$l\,(in)$
Feldmagnet	100	600	10 800	4,5	450
Luftschichte	2	1200	4 500	3600	7200
Anker . .	15	450	12 000	4,8	72
					7722

Der Feldmagnet ist also mit rund 7720 Amperewindungen zu versehen. In welcher Weise man diese herstellt, durch 7720 Windungen mit 1 A Strom, oder durch 772 Windungen mit 10 A Strom, oder durch eine andere Kombination, die dasselbe Produkt gibt, dafür sind andere Erwägungen maßgebend; insbesondere die Spannung und die größte zulässige Temperaturerhöhung.

113. Der magnetische Kreis bei Dauermagneten.

Bei der Magnetisierung eines Körpers durch eine Stromspule oder durch ein äußeres magnetisches Feld kann die magnetisierende Kraft leicht berechnet oder experimentell ermittelt werden. Wie ist es aber bei einem Dauermagnet? Hier sitzt die magnetisierende

Kraft im Magnet selbst; sie besteht aus der Koerzitivkraft, d. h. aus jenem Teil der äußeren magnetisierenden Kraft, welche nach dem Verschwinden ihrer Ursache (elektrischer Strom oder äußeres magnetisches Feld) in dem Eisen zurückgeblieben ist. Die MMK ist dann (nach § 105) gleich dem Linienintegral der Koerzitivkraft über die Länge des Magnetes. Die MMK ist also bei einem Dauermagnet konstant, solange nicht eben Veränderungen der Koerzitivkraft stattfinden wie z. B. durch Erhitzen oder durch Erschütterungen oder durch äußere magnetische Felder. Ist der Magnet ein geschlossener Körper, so ist auch die Kraftlinienmenge konstant; ist er aber offen wie z. B. der Stabmagnet in Abb. 7 oder der Hufeisenmagnet in Abb. 8, so hängt die Kraftlinienmenge vom gesamten magnetischen Widerstand des Kraftlinienpfades ab. Wird also z. B. dem Hufeisenmagnet ein Eisenstück (Anker) genähert (Abb. 120), so wird die Kraftlinienmenge um so größer, je kleiner der Luftzwischenraum zwischen den Polen des Magnetes und dem Anker ist. Insbesondere nimmt die von den Polen ausgehende Kraftlinienmenge bedeutend zu (nach Messungen von Sahulka[1]) beispielsweise von 1060 auf 4100, wenn der Anker ganz anliegt), während die gesamte, vom ganzen Magnet ausgehende Kraftlinienmenge bedeutend weniger zunimmt (von 4700 auf 5550). Der Grund liegt darin, daß ein Teil der Kraftlinien, welche bei offenem Magnet zwischen den Schenkeln verlaufen, beim Anlegen des Ankers durch diesen verlaufen, weil sie hier einen kleineren magnetischen Widerstand finden oder mit anderen Worten, die magnetische Streuung aus den Seitenflächen ist erheblich geringer, wenn der magnetische Kreis ganz aus Eisen besteht, als wenn er offen ist. Daß die gesamte Kraftlinienmenge beim Anlegen eines Ankers nur wenig (im obigen Beispiel um 18 %) zunimmt,[2]) hat seinen Grund darin, daß die an der Oberfläche auftretenden freien magnetischen Massen den Kraftlinien proportional sind (§ 7). Da nun der freie Magnetismus (nach § 102) eine entmagnetisierende Kraft ausübt, so hat die Zunahme der Kraftlinien eine Verminderung der MMK zur Folge. Daraus erklärt sich, warum durch öfteres Anziehen und Abreißen des Ankers eine bleibende Schwächung der Koerzitivkraft des Dauermagnetes bewirkt wird.

---

[1]) Sahulka, ETZ 1905, S. 118.

[2]) Diese verhältnismäßig geringe Zunahme hat zu der irrtümlichen Meinung (z. B. S. Thompson: „Der Elektromagnet", Halle 1894, S. 184) Anlaß gegeben, als sei nicht die Koerzitivkraft und daher auch die MMK, sondern die Kraftlinienmenge dasjenige, was bei einem Dauermagnet konstant ist.

114. Anziehung zweier paralleler Flächen. Tragkraft eines Magnetes.

Für die mechanische Kraft F, die zwischen zwei parallelen, gleichmäßig mit magnetischer Masse von entgegengesetztem Vorzeichen belegten Flächen wirkt, gilt genau dasselbe, wie für zwei elektrisch geladene Flächen. Ist der Abstand der Flächen klein gegenüber dem kleinsten Ausmaß der Flächen, so ist das Feld bis in die Nähe der Ränder homogen. Unter dieser Voraussetzung gilt dieselbe Gleichung wie in § 23, nur daß an Stelle der Dielektrizitätskonstante die magnetische Durchlässigkeit μ einzusetzen ist. Also

$$F = \frac{S\mathfrak{B}^2}{8\pi\mu}\text{ Dyn} = \frac{S\mathfrak{B}^2}{8\pi\mu\cdot 980}\text{ Grammgewicht,}$$

wobei S die Größe einer Endfläche bedeutet. Es ist zu beachten, daß in diesem Ausdruck der Abstand der beiden Flächen nicht vorkommt, sondern nur die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$. Diese ist aber natürlich bei gegebener MMK von dem Abstand abhängig.

Die vorstehende Formel gibt die Tragkraft eines Magnetes an, wenn die gegenüberstehenden Flächen des Magnetes und des von ihm angezogenen Eisenstückes (Anker) gleich groß sind, und ihr Abstand klein ist. Der Anker wird ja durch den Magnet derart magnetisiert, daß die gegenüberstehenden Flächen gleichviel aber entgegengesetzten Magnetismus erhalten.

Befindet sich zwischen den gegenüberstehenden Flächen Luft oder eine Flüssigkeit, so kann $\mu = 1$ gesetzt werden. Ferner ist

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{Z}}{S} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{w}S}.$$

Also

$$F = \frac{\mathfrak{F}^2}{8\pi\mathfrak{w}^2 S}\text{ Dyn} = \frac{\mathfrak{F}^2}{24\,600\,\mathfrak{w}^2 S}\text{ Grammgewicht.} \quad (83\text{a})$$

Handelt es sich um einen Elektromagnet mit N Windungen in denen ein Strom von i Ampere fließt, so ist (nach § 105)

$$\mathfrak{F} = 1{,}257\, iN$$

also

$$F = 0{,}0000642\,\frac{(iN)^2}{\mathfrak{w}^2 S}\text{ Grammgewicht} \quad . \quad . \quad (83\text{b})$$

Kann der magnetische Widerstand im Eisen gegenüber dem im Luftzwischenraum vernachlässigt werden und ist der Luftzwischenraum d zwischen beiden Flächen klein gegenüber dem kleinsten Ausmaß derselben, so ist

$$\mathfrak{w} = \frac{d}{S}$$

und daher

$$F = 0{,}0000642\,\frac{S}{d^2}(iN)^2 \text{ Grammgewicht} \quad . \quad . \quad (83\,c)$$

In diesem einfachsten Falle ist also die Tragkraft proportional der Polfläche und dem Quadrate der Amperewindungen, aber verkehrt proportional dem Quadrate des Abstandes.

Sind die gegenüberstehenden Flächen nicht gleich groß, so kann näherungsweise für S das arithmetische Mittel eingesetzt werden.

Beispiel: Ein Elektromagnet von der Form wie in Abb. 131 sei mit 1000 Windungen bewickelt, die 2 Amp. Strom führen. Die Endflächen seien 8 cm², ihr Abstand 0,3 cm. Da zwei Anziehungsstellen vorhanden sind, so ist nach der letzten Gleichung

$$F = 2 \cdot 0{,}0000642\,\frac{8}{0{,}3^2}\,2000^2 = 45\,700 \text{ g} = 45{,}7 \text{ kg}.$$

Ist bei denselben Polflächen der Abstand 2 cm, so kann diese Formel nicht mehr zur Anwendung kommen, sondern die Gl. 83b und der magnetische Widerstand muß nach § 107 berechnet werden, wonach sich der äquivalente Querschnitt S des Kraftlinienbündel aus $S = s + kd$ ergibt. Hierin bedeutet s die Polfläche und für k findet man aus Abb. 127 den Wert 11,6. Also

$$S = 8 + 11{,}6 \cdot 2 = 31{,}2; \qquad \mathfrak{w} = \frac{2}{31{,}2} = 0{,}064.$$

Mithin

$$F = 0{,}0000642\,\frac{2000^2}{0{,}064^2 \cdot 31{,}2} = 2000 \text{ g} = 2 \text{ kg}.$$

115. Die Arbeit bei magnetischer Anziehung.

Wird von einem Dauermagnet, z. B. dem Hufeisenmagnet in Abb. 120, ein Anker angezogen, so wird eine mechanische Arbeit geleistet, welche für jedes Wegstückchen gleich dem Produkte aus dem Wegstückchen und der Kraft F an dieser Stelle ist. Nach dem Gesetze von der Erhaltung der Arbeit kann diese nicht aus Nichts entstehen, sondern muß irgendwo herkommen. Da aber eine äußere Arbeitsquelle nicht vorhanden ist, muß sie aus dem magnetischen System selbst kommen. Nach § 97 ist die magnetische Arbeit in jeder Raumeinheit eines magnetischen Stoffes gleich $\frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi\mu}$. Ist die Durchlässigkeit μ im Eisen beispielsweise gleich 1000, so ist die in einer solchen Raumeinheit aufgespeicherte magnetische Arbeit 1000mal kleiner als in einer Raumeinheit Luft. Treten also während der Anziehung des Ankers Kraftlinien in diesem ein, die früher durch die Luft verlaufen sind, so nimmt die gesamte magne-

tische Arbeit, die im magnetischen Felde aufgespeichert ist, um ein Beträchtliches ab, und zwar um so viel als während der Anziehung des Ankers mechanische Arbeit geleistet wird. Mit anderen Worten: während einer magnetischen Anziehung findet eine Umwandlung der im Luftfeld aufgespeicherten potentiellen magnetischen Arbeit in mechanische Arbeit (lebendige Kraft) statt. Wird der Anker wieder losgerissen und entfernt, so ist dazu eine mechanische Arbeit erforderlich, die zur neuerlichen Magnetisierung des Luftfeldes verwendet wird, sobald die Kraftlinien aus dem Eisen in Luft übertreten.

Diese Umwandlung findet aber wie alle Arbeitsumwandlungen nicht ohne Verlust durch Wärmeentwickelung statt. Und zwar findet eine Wärmeumwandlung statt bei der Magnetisierung des Ankers infolge Hysterese und durch die Wirbelströme, die im Eisen durch die ein- oder austretenden Kraftlinien induziert werden.

Bei einem Elektromagnet liegen die Verhältnisse genau so, denn die Anziehung des Ankers findet erst statt, nachdem das magnetische Feld bereits vorhanden ist. Die magnetische Arbeit des ganzen Feldes im Magnete und in der Luft wird aber natürlich von der Stromquelle im Augenblick des Stromschlusses geleistet.

Siebentes Kapitel.

Elektrodynamik.

116. Die Kraftwirkung zweier Ströme.

Parallele Stücke zweier Stromkreise ziehen sich an, wenn die Ströme gleiche Richtung haben, und stoßen sich ab, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben. Man erkennt diese Tatsache auch

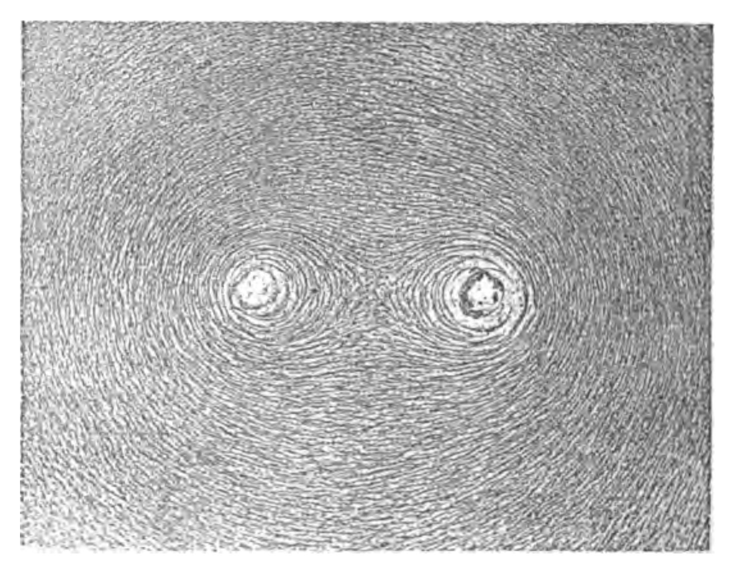


Abb. 151. Magnetisches Feld zweier Ströme von gleicher Richtung.

aus dem Aussehen der magnetischen Felder, die man erhält, wenn man die beiden Leiter durch ein steifes Papier steckt und Eisenfeilspäne darauf streut. In nächster Nähe jedes Leiters sind die Kraftlinien in beiden Fällen nahezu Kreise, so wie bei einem ein-

zelnen Leiter. Bei gleichgerichteten Strömen (Abb. 151) schließen sich die entfernteren zu einer lemniskatenförmigen Figur und umfassen beide Leiter. Da die Kraftlinien (§ 5) wie elastische Fäden wirken, die sich zu verkürzen suchen, so erkennt man daraus das Bestreben der beiden Leiter, sich einander zu nähern. Haben aber die Ströme entgegengesetzte Richtung (Abb. 152), so bestehen alle Kraftlinien jedes Leiters für sich; sie weichen aber um so mehr von der Kreisform ab, je entfernter sie sind. Da sich die Kraftlinien untereinander abstoßen, so folgt daraus eine Abstoßung zwischen den beiden Leitern.

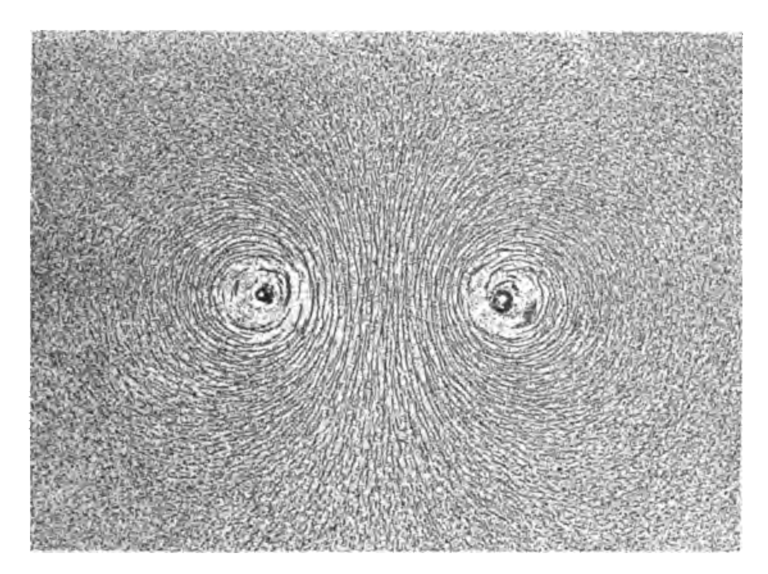


Abb. 152. **Magnetisches Feld zweier Ströme von entgegengesetzter Richtung.**

Sind zwei Ströme gekreuzt, so suchen sie sich parallel zu stellen, und zwar so, daß sie gleiche Richtung haben; sie vollführen also die in Abb. 153 angedeutete Drehung.

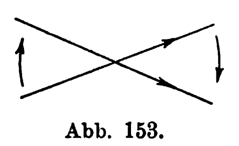


Abb. 153.

Da jeder stromführende Leiter ein Stück eines geschlossenen Stromes ist, so folgt diese elektrodynamische Wirkung auch aus dem Satze, daß ein geschlossener Strom durch eine magnetische Platte von gleichem Umfang ersetzt werden kann (§ 81). Die Amperesche Regel lehrt dann, daß parallele Stromkreise mit gleicher Stromrichtung die ungleichnamigen Flächen einander zukehren, also sich anziehen, und daß umgekehrt solche mit entgegengesetzter Stromrichtung sich abstoßen.

Die Kraft, mit der diese Anziehung oder Abstoßung stattfindet, ist bei sonst gleichen Verhältnissen proportional dem Produkte der beiden Stromstärken.

Außer dieser auf der Strömung der Elektrizität beruhenden, also elektrodynamischen Kraft zwischen zwei stromführenden Leitern gibt es natürlich auch noch eine elektrostatische Kraft, wie immer zwischen zwei Körpern, die Elektrizität enthalten. Durch folgenden Versuch von Nicolajew kann man beide Kräfte zur Erscheinung bringen. An einem Blatt Pappe (Abb. 154) sind mittels vier dünner Drähte zwei U-förmige, aus Stanniol ausgeschnittene Bügel leicht beweglich aufgehängt, und in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise mit einer Stromquelle verbunden. In dem Stromkreis befindet sich noch ein Schalter *S* und ein Regulierwiderstand *R*. Ist der Schalter *S* offen, so besteht elektrostatische Anziehung zwischen den beiden Bügeln, weil sie entgegengesetzte Ladung haben. Wird der Schalter geschlossen, so geht ein Strom durch die Bügel. Da seine Richtung in den beiden Bügeln entgegengesetzt ist, so muß eine abstoßende elektrodynamische Kraft auftreten. Wird der Strom mittels des Regulierwiderstandes sehr schwach eingestellt, so bemerkt man immer noch eine Anziehung zwischen den beiden Bügeln, weil die elektrostatische Anziehung über die elektrodynamische Abstoßung überwiegt. Wird der Strom allmählich verstärkt, so kommt man zu einem Wert, wo weder Anziehung noch Abstoßung bemerkbar ist, weil sich beide Kräfte das Gleichgewicht halten. Bei weiterer Verstärkung des Stromes überwiegt die elektrodynamische Abstoßung über die elektrostatische Anziehung.

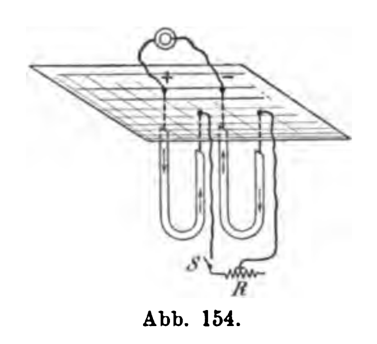


Abb. 154.

Außer den magnetischen Kraftlinien, welche den Leiter umschließen, gibt es also auch noch elektrische Kraftlinien, welche strahlenförmig vom Leiter ausgehen und eventuell auf einen anderen oder im Unendlichen endigen.

117. Arbeitswert zweier Ströme.

Aus dem vorigen folgt, daß zwischen zwei geschlossenen Stromkreisen ein gewisser Arbeitswert[1]) bestehen muß, der dem Potential

[1]) Der Ausdruck Potential wäre in diesem Falle unrichtig, da nach § 12 das Potential den Arbeitswert in bezug auf eine magnetische oder elektrische Masse Eins bedeutet.

entspricht; d. h. wir finden aus demselben die wirksame Kraft in irgend einer Richtung, wenn wir den Differentialquotienten nach dieser Richtung bilden und negativ nehmen.

Bedeutet dl_1 ein unendlich kleines Stückchen des einen Stromkreises mit der Stromstärke i_1 und dl_2 ein ebensolches des anderen mit der Stromstärke i_2, r die Entfernung dieser beiden und ε ihren Neigungswinkel gegeneinander, so ist der Arbeitswert dA zwischen diesen beiden Stromelementen

$$dA = -\,i_1 i_2 \frac{\cos\varepsilon}{r}\, dl_1\, dl_2.$$

Daraus ergibt sich der Arbeitswert A zwischen den beiden ganzen, geschlossenen Stromkreisen durch Integration über beide Stromkreise, also

$$A = -\,i_1 i_2 \int\!\!\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, dl_1\, dl_2.$$

Setzt man

$$\int\!\!\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, dl_1\, dl_2 = -M,$$

so ist

$$A = i_1 i_2 M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Man nennt M den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion oder gegenseitige Induktion schlechtweg, da er für die Induktion elektrischer Ströme (§ 145) maßgebend ist.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Arbeitswert zwischen einem geschlossenen Strome und einer magnetischen Masse m (§ 87), nämlich mit

$$A = i\omega m = i\mathfrak{z},$$

so sieht man, daß $i_2 M$ die Anzahl der Kraftlinien ist, die von einem Stromkreise i_2 ausgehen und den anderen Stromkreis treffen. Umgekehrt ist $i_1 M$ die Anzahl der Kraftlinien, die von dem Stromkreis i_1 ausgehen und den anderen treffen. Also ist M die Anzahl der Kraftlinien, die von einem Stromkreise mit der Stromstärke Eins ausgehen und mit einem anderen von der gleichen Stromstärke verkettet sind. Oder: Der Koeffizient M der gegenseitigen Induktion eines Stromkreises auf einen anderen ist gleich dem Verhältnis seiner mit dem anderen Stromkreis verketteten Kraftlinienmenge zu seiner Stromstärke.

Bestehen die beiden Stromkreise nicht aus je einer Windung, sondern aus N_1 bzw. N_2 Windungen, von denen jede sämtliche Kraftlinien umschließt, so ist (nach Gl. 50)

$$A = i_1 N_1 \mathfrak{z} = i_2 N_2 \mathfrak{z} = i_1 i_2 M$$

also

$$\left.\begin{aligned} M &= \mathfrak{z}\frac{N_1}{i_2} \\ M &= \mathfrak{z}\frac{N_2}{i_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (84\text{a})$$

oder

Wird aber die gesamte Kraftlinienmenge nicht von sämtlichen Windungen beider Spulen umschlossen, so kann nicht einfach mit der Windungszahl multipliziert werden, sondern die gesamte gegenseitige Induktion ist dann gleich der Summe der für jede einzelne Windung nach der obigen Definition berechneten Koeffizienten M.

Die Kraftlinien entstehen gleichzeitig mit den Strömen i_1, i_2 und bleiben so lange unverändert bestehen, solange die Stromkreise und die Stromstärken unverändert bleiben. Dasselbe gilt für den Arbeitswert A. Er ist also nichts anderes als die magnetische Arbeit, die zur Erzeugung der beiden Stromkreisen gemeinsamen Kraftlinien, also zur Herstellung des gemeinsamen magnetischen Feldes notwendig ist; und er besteht so lange als potentielle Energie weiter, solange alles unverändert bleibt. Verschwindet einer der Ströme, so verschwindet auch das gemeinsame magnetische Feld, und die Energie A setzt sich in elektrische Arbeit um, da beim Verschwinden eines Stromes ein Induktionsstrom im anderen Stromkreise entsteht.

118. Koeffizient der gegenseitigen Induktion.

Der Arbeitswert zweier Ströme, bzw. der Koeffizient der gegenseitigen Induktion läßt sich nur für einige einfache Fälle berechnen; meistens muß er experimentell bestimmt werden.

a) Die beiden Stromkreise bestehen aus übereinander geschobenen Spulen mit den Windungszahlen N_1 bzw. N_2, zwischen denen keine magnetische Streuung besteht, d. h. sämtliche Windungen beider Spulen umschließen sämtliche Kraftlinien. Nach § 105 ist die Kraftlinienmenge der einen Spule bei der Stromstärke 1 (abs. Einh.) gleich $\frac{4\pi N_1}{\mathfrak{w}}$, wobei $\mathfrak{w}$ den magnetischen Widerstand des ganzen Kraftlinienbündels bedeutet. Da die andere Spule N_2 Windungen hat, so ist nach dem obigen

$$M = \frac{4\pi N_1 N_2}{\mathfrak{w}}.$$

Ist l die Länge, S der Querschnitt des Kraftlinienbündels und μ die magnetische Durchlässigkeit des Mediums, so ist

$$\mathfrak{w} = \frac{l}{\mu S}$$

und daher

$$M = \frac{4\pi N_1 N_2 \mu S}{l}.$$

b) Für zwei parallele Stromleiter, deren Länge l groß ist gegenüber ihrem Abstande a, ist

$$M = 2l\left(\log\text{nat}\frac{2l}{a} - 1\right);$$

dann ist nach § 12 die Kraft, die zwischen ihnen wirkt:

$$F = -\frac{dA}{da} = -\frac{dM}{da} i_1 i_2 = -2 i_1 i_2 \frac{l}{a}.$$

Haben i_1 und i_2 gleiche Richtung, so ist F negativ, die Kraft also eine anziehende; haben sie entgegengesetzte Richtung, so ist F positiv, also abstoßend.

Weitere Formeln sind in Heydweiller „Elektrische Messungen" (Leipzig 1892) zu finden.

Beispiel: Eine Fernleitung aus zwei parallelen Drähten von 1000 m Länge im gegenseitigen Abstand von 1 cm (zweiadriges Kabel)

$$M = 200000\left(\log\text{nat}\frac{200000}{1} - 1\right) = 200000\,(12{,}2 - 1) = 2240000 \text{ abs. Einh.}$$

Da 10^9 abs. Einh. gleich 1 Henry sind (Kap. 17), so ist $M = 0{,}00224$ Henry.

Gehen 100 Ampere (= 10 abs. Einh.) in einem Draht hin, im anderen zurück, so ist die Kraft, mit der sich die Drähte anziehen,

$$F = 2 \cdot 10 \cdot 10\,\frac{100000}{1} = 20000000 \text{ abs. Einh.}$$

Da 980 abs. Einh. gleich einem Grammgewicht sind, so ist $F = 20400$ Grammgewicht auf der ganzen Länge; also für 1 m gleich 20,4 Grammgewicht.

119. Arbeitswert eines Stromes in bezug auf sich selbst; Koeffizient der Selbstinduktion.

Da jeder Stromleiter eine gewisse Dicke besitzt, so kann man ihn als ein Bündel unendlich vieler, leitender Fäden betrachten, wovon jeder einen gewissen Bruchteil des ganzen Stromes führt. Es wirkt also unter ihnen eine anziehende Kraft, die den ganzen

Leiter dünner zu machen sucht, und daher besteht auch ein Arbeitswert zwischen jedem dieser Stromfäden und allen übrigen. Dies ist der Arbeitswert des Stromes in bezug auf sich selbst. Er ist das Analogon der strömenden Elektrizität zu dem Selbstpotential der ruhenden Elektrizität (§ 16).

Ist der Draht nicht geradlinig, sondern etwa zu einem Solenoid gewickelt, so besteht außer der Kraftwirkung der Stromfäden untereinander auch noch eine zwischen jeder Windung und allen übrigen, und zwar ebenfalls eine anziehende, da die Stromrichtung in allen dieselbe ist. Die Windungen eines Solenoides suchen sich näher zu kommen. In diesem Falle haben wir also noch einen zweiten Arbeitswert des Stromes in bezug auf sich selbst.

Aus dem Gesagten erkennt man, daß zwischen diesem Arbeitswerte und dem gemeinsamen zweier verschiedener Stromkreise (§ 117) kein wesentlicher Unterschied besteht, und daß letzterer in ersteren übergeht, wenn man die zwei Stromkreise in einen zusammenfallen läßt. Doch muß man jetzt durch 2 dividieren, da aus zwei Stromkreisen einer geworden ist. Das Produkt $i_1 i_2$ geht über in i^2. Wir erhalten also aus Gl. 84 für den Arbeitswert eines Stromes in bezug auf sich selbst:

$$A = \frac{i^2 L}{2}, \qquad \qquad (85)$$

wenn wir jetzt statt M entsprechend der anderen Bedeutung L setzen und dieses den Koeffizienten der Selbstinduktion oder Selbstinduktion schlechtweg nennen. iL ist dann die Anzahl der Kraftlinien, die von einem Strome i ausgehen. Mithin ist L die Anzahl der Kraftlinien, die von einem gestreckten Stromleiter oder einer einzelnen Windung mit der Stromstärke 1 ausgehen, oder: das Verhältnis seiner Kraftlinienmenge zu seiner Stromstärke.

Besteht der Stromkreis aus N Windungen, von denen jede sämtliche Kraftlinien umschließt, so folgt aus Gl. 84a

$$L = \mathfrak{z} \frac{N}{i} \qquad \qquad (86)$$

Die Kraftlinien entstehen gleichzeitig mit dem Strome i und bleiben so lange unverändert bestehen, als der Stromkreis und die Stromstärke unverändert bleiben. Dasselbe gilt für den Arbeitswert in bezug auf sich selbst. Er ist also nichts anderes als die magnetische Arbeit, die zur Erzeugung der eigenen Kraftlinien, also zur Herstellung des eigenen magnetischen Feldes notwendig ist; und er besteht so lange als potentielle

Energie weiter, solange alles unverändert bleibt. Verschwindet der Strom, so verschwindet auch sein magnetisches Feld, und die magnetische Arbeit A setzt sich in elektrische Arbeit um, da beim Verschwinden des Stromes ein Induktionsstrom im eigenen Kreise (Extrastrom § 187) entsteht.

120. Spezielle Fälle.

Nach dem vorhergehenden erhalten wir offenbar die Koeffizienten der Selbstinduktion aus denen der gegenseitigen, wenn wir die beiden Stromkreise in einen zusammenfallen lassen.

a) Wir erhalten also aus § 118 für den Koeffizienten der Selbstinduktion einer Spule, deren sämtliche Kraftlinien von sämtlichen N Windungen umschlossen werden

$$L = \frac{4\pi N^2}{\mathfrak{w}} = \frac{4\pi N^2 \mu S}{l}.$$

b) Für einen geradlinigen Leiter in Luft, dessen Länge l sehr groß ist gegenüber seinem Radius r, und dessen Material die magnetische Durchlässigkeit μ hat, ist

$$L = 2l\left(\log\text{nat}\frac{2l}{r} - 1 + \frac{\mu}{4}\right).$$

Besteht der Leiter aus einem unmagnetischen Metalle, so ist

$$L = 2l\left(\log\text{nat}\frac{2l}{r} - \frac{3}{4}\right).$$

c) Zwei parallele Drähte im Abstande a, jeder von der Länge l und dem Radius r. Geht der Strom in einem derselben hin, im anderen zurück (Stromschleife), so ist die Selbsinduktion jedes der beiden (vgl. § 159 und 160)

$$L = 2l\left(\log\text{nat}\frac{a}{r} + \frac{\mu}{4}\right).$$

Die Selbstinduktion beider zusammen, also der Stromschleife, ist dann gleich dem Doppelten, also

$$L = 4l\left(\log\text{nat}\frac{a}{r} + \frac{\mu}{4}\right).$$

d) Ein kreisförmig gebogener Draht mit der Länge l, dem Krümmungsradius R und dem Durchmesser $2r$

$$L = 2l\left(0{,}58 + \log\text{nat}\frac{l}{2r\pi} - \frac{2r}{R} - \frac{r^2}{24R^2} - \dots\right).$$

Weitere Formeln sind in Heydweiller „Elektrische Messungen" zu finden.

121. Verhältnis zwischen dem Koeffizienten der gegenseitigen und der Selbstinduktion.

Aus der Grundgleichung für den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion zweier Spulen (§ 118) folgt, daß er um so größer ist, je kleiner der Abstand der beiden Stromkreise ist. Er erreicht also ein Maximum, wenn die beiden Stromkreise ineinander fallen; dann ist

$$M^2 = L_1 L_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (87)$$

Man sieht dies ohne weiteres bei Spulen ohne magnetische Streuung, für welche

$$L_1 = \frac{4\pi N_1^2}{\mathfrak{w}}$$

und

$$L_2 = \frac{4\pi N_2^2}{\mathfrak{w}}$$

ist. Ferner ist in diesem Falle

$$\frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{und} \quad \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Wenn diese Beziehung gelten soll, so müssen sämtliche Kraftlinien des einen Stromkreises alle Windungen des anderen treffen. Man kann sie also ziemlich angenähert verwirklichen, wenn die Windungen beider Stromkreise auf einen geschlossenen Eisenkern unmittelbar über- oder nebeneinander aufgewickelt sind. Die Kraftlinien beider Stromkreise verlaufen dann alle als geschlossene Kreise im Eisen. Sobald aber eine beträchtliche Streuung der Kraftlinien vorhanden ist, gilt diese Beziehung nicht mehr, sondern es ist dann $M^2 < L_1 L_2$.

Beispiel. Ein Eisenring (Stahlguß) von 100 cm Länge und 2 cm² Querschnitt ist mit 1000 Windungen bewickelt, die von 0,46 A Strom durchflossen werden. Daher sind die Amperewindungen auf der Längeneinheit 4,6. Dazu findet man aus Abb. 150 eine Kraftliniendichte, von etwa 11000 und dazu aus Abb. 109 $\mu = 2000$.

Also ist die Selbstinduktion:

$$L = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1000^2 \cdot 2000 \cdot 2}{100} = 500\,000\,000 \text{ absolute Einheiten.}$$

Und da eine praktische Einheit (Henry) gleich 10^9 absoluten Einheiten ist, so ist $L = 0{,}5$ Henry.

Wickelt man nun auf denselben Kern eine zweite Wickelung mit 100 Windungen, so ist unter der Voraussetzung, daß die magnetische Durchlässigkeit dieselbe geblieben ist,

$$L_2 = 0{,}005 \text{ Henry.}$$

Der Koeffizient der gegenseitigen Induktion ist

$$M = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1000 \cdot 100 \cdot 2000 \cdot 2}{100} = 0{,}05 \text{ Henry}$$

oder

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}005} = 0{,}05 \text{ Henry.}$$

122. Die gesamte magnetische Arbeit zweier Stromkreise.

Haben wir zwei Stromkreise mit den Stromstärken i_1 und i_2, mit den Selbstinduktionen L_1 bzw. L_2 und der gegenseitigen Induktion M, so repräsentiert zunächst jeder eine magnetische Arbeit entsprechend Gl. 85 und beide zusammen eine magnetische Arbeit entsprechend Gl. 84. Die gesamte magnetische Arbeit A, d. h. diejenige, die zur Herstellung des gesamten magnetischen Feldes beider Stromkreise nötig ist, ist also

$$A = \frac{i_1^2 L_1}{2} + \frac{i_2^2 L_2}{2} + i_1 i_2 M.$$

Das gilt unter allen Umständen, wie groß auch die magnetische Streuung ist. Je größer die Streuung ist, d. h. je kleiner die Anzahl der beiden Stromkreisen gemeinsamen Kraftlinien ist, desto kleiner ist M und desto kleiner die gesamte magnetische Arbeit. Besteht gar keine Wirkung zwischen beiden, d. h. ist die Streuung τ oder v unendlich groß, so ist $M = 0$ und das dritte Glied in der obigen Summe verschwindet.[1])

[1]) Vergl. auch § 168.

Achtes Kapitel.

Elektrische Induktion.

---

123. Das Wesen der elektrischen Induktion.

Die Erzeugung einer Potentialdifferenz in irgend einem Leiter durch Induktion findet immer dann statt, wenn dieser Leiter magnetische Kraftlinien schneidet. Ist der Leiter geschlossen, so ist diese Potentialdifferenz oder elektromotorische Kraft die Ursache eines Stromes.

Dieses Gesetz gilt ohne jede Einschränkung; d. h. es ist gleichgültig, ob das Schneiden der Kraftlinien durch Bewegung des Leiters in einem ruhenden magnetischen Felde, oder durch Bewegung der Kraftlinien gegen einen ruhenden Leiter geschieht, und es ist ferner gleichgültig, ob die Kraftlinien von Magneten oder Strömen herrühren.

Es entsteht demnach eine Potentialdifferenz in folgenden Fällen:

1. Bei jeder Bewegung eines Leiters in einem magnetischen Felde, wenn dabei Kraftlinien geschnitten werden (Dynamomaschinen).

2. Beim Entstehen oder Verschwinden eines magnetischen Feldes in der Nähe eines Leiters. Beim Entstehen desselben schießen die Kraftlinien gewissermaßen aus dem Magnete oder dem Stromleiter hinaus und erfüllen den umgebenden Raum. Dabei müssen sie die in ihrem Bereiche befindlichen Leiter schneiden. Beim Verschwinden des magnetischen Feldes schlüpfen die Kraftlinien gewissermaßen wieder in das Eisen oder den Stromleiter zurück und schneiden dabei wieder die in ihrem Bereiche befindlichen Leiter. (Transformatoren, Funkeninduktoren.)

3. Bei jeder Änderung der Stärke eines magnetischen Feldes. Denn bei jeder Zunahme in der Stärke entstehen neue Kraftlinien, und bei der Abnahme verschwinden welche in der eben geschil-

derten Weise und schneiden dabei die in ihrem Bereiche befindlichen Leiter.

Aus all dem folgt, daß die elektromotorische Kraft, bzw. der induzierte Strom nur solange dauert, als die Bewegung oder Veränderung dauert.

124. Größe der induzierten elektromotorischen Kraft.

Wir wissen aus § 76 u. f., daß zwischen einem Stromleiter, der einen Strom J führt, und einem Magnete Kräfte bestehen, die eine Bewegung des einen oder des andern verursachen können, und daß deren Richtung durch die Amperesche Regel bestimmt ist. Findet eine solche Bewegung wirklich statt, wie bei dem in § 77 gegebenen Beispielen, so wird dabei auch Arbeit geleistet. Diese kann unmöglich aus nichts entstehen, sondern muß auf Kosten einer anderen Arbeitsform geleistet werden. Das ist in diesem Falle der elektrische Strom, dessen sekundliche Arbeit (Leistung EJ, wenn E die EMK bedeutet) um einen genau gleich großen Betrag vermindert wird, als die mechanische Arbeit der Bewegung beträgt. Diese Verminderung erscheint als Schwächung des Stromes durch einen während der Bewegung induzierten Strom von entgegengesetzter Richtung.

Ist ursprünglich kein Strom vorhanden, und wird dieselbe Bewegung durch äußere mechanische Kräfte durchgeführt, so wird ein Strom induziert, dessen Arbeit gleich der mechanischen Arbeit der Bewegung ist.

Hat der induzierte Strom während eines Zeitelementes dt die EMK e und die Stromstärke i, so ist seine elektrische Arbeit $e \cdot i \cdot dt$. Die mechanische Arbeit, die zur Durchführung der Bewegung während derselben Zeit notwendig war, ist $\mathfrak{H} \cdot i \cdot dl \cdot ds$, weil $\mathfrak{H} \cdot i \cdot dl$ die Kraft zwischen dem Felde $\mathfrak{H}$ und dem Stromelemente dl ist (wenn die Bewegung senkrecht zu den Kraftlinien erfolgt § 78) und wenn ds das Wegstückchen ist, das während der Zeit dt zurückgelegt wurde.

Diese Arbeiten sind nach dem Satze von der Erhaltung der Arbeit einander gleich; also $e \cdot i \cdot dt = \mathfrak{H} \cdot i \cdot dl \cdot ds$.

Demnach ist die induzierte elektromotorische Kraft

$$e = \mathfrak{H} \cdot dl \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Oder da $\frac{ds}{dt} = v$, wo v die Geschwindigkeit der Bewegung ist, so folgt

$$e = \mathfrak{H} \cdot v \cdot dl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

d. h. die induzierte EMK ist gleich dem Produkte aus der Feldstärke, der Geschwindigkeit und der Länge des Leiters, wenn die Bewegung senkrecht zu den Kraftlinien erfolgt.

Schließt das Leiterstückchen dl mit der Richtung der Kraftlinien einen Winkel α ein (Abb. 91) und erfolgt die Bewegung nicht senkrecht zur Richtung der Kraftlinien sondern in einer um den Winkel β abweichenden Richtung OR, so ist

$$e = \mathfrak{H} \cdot v \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot dl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Dieser Wert ist am größten, wenn $\alpha = 90^0$, $\beta = 0^0$ ist, also wenn das Leiterelement senkrecht zur Richtung der Kraftlinien ist und auch senkrecht zu ihnen bewegt wird. Das ist der zuerst angenommene Fall.

Ist aber $\alpha = 0^0$, oder $\beta = 90^0$, so ist $e = 0$, d. h. es findet keine Induktion statt, wenn das Leiterstückchen ds in der Richtung der Kraftlinien liegt, oder wenn die Bewegung in der Richtung der Kraftlinien geschieht.

Beispiel: Für den Raum eines Laboratoriums ist das magnetische Feld der Erde homogen. Im mittleren Europa ist die Feldstärke $\mathfrak{H} = 0{,}45$ abs. Einh. (ungefähr), d. h. soviel Kraftlinien treffen auf die zu ihrer Richtung senkrechte Flächeneinheit. Wird ein 100 cm langer geradliniger Draht in 1 Sekunde 100 cm weit bewegt, und zwar so, daß er die Kraftlinien senkrecht schneidet, so erhalten die Enden des Drahtes nach Gl. 88 eine Potentialdifferenz $e = 0{,}45 \cdot 100 \cdot 100 = 4500$ abs. Einh., und weil 10^8 abs. Einh. $= 1$ Volt sind, so ist $e = 0{,}000045$ Volt.

Man kann das Induktionsgesetz auch in andere Formen bringen. Da $ds \cdot dl$ die von dem Elemente ds während der Fortbewegung um das Stück dl bestrichene Fläche ist, und weil ferner $\mathfrak{H}$ die Anzahl der Kraftlinien ist, die auf eine zur Richtung der Kraftlinien senkrechte Flächeneinheit treffen, so ist

$$\mathfrak{H} \cdot ds \cdot dl = d\mathfrak{z}$$

beziehungsweise

$$\mathfrak{H} \cdot ds \cdot dl \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta = d\mathfrak{z},$$

wobei $d\mathfrak{z}$ die Anzahl der Kraftlinien bedeutet, die während dieser Bewegung von dem Elemente ds geschnitten wurden. Also

$$e = \frac{d\mathfrak{z}}{dt},$$

das heißt: die induzierte EMK ist gleich den in der Zeiteinheit von dem Leiter senkrecht geschnittenen Kraftlinien.

Handelt es sich um einen Leiter, der eine geschlossene Figur bildet, was man in der Elektrotechnik als eine Windung bezeichnet,

so läßt sich dieses Gesetz noch in anderer Weise aussprechen. Ist $\mathfrak{z}$ die Kraftlinienmenge, welche von der Windung umschlossen wird, und wird ein Stück dl derselben irgendwie bewegt, so nimmt $\mathfrak{z}$ um ebensoviel Kraftlinien zu oder ab, als dieses Leiterstück bei der Bewegung schneidet, also nach dem vorigen um $d\mathfrak{z}$. Mithin ist $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ nichts anderes als die Änderung der Kraftlinienmenge während der Zeit dt. Demnach kann die letzte Gleichung so ausgedrückt werden: die induzierte EMK ist gleich der Änderung der von einer Windung umschlossenen Kraltlinienmenge.

Wird die Kraftlinienmenge $\mathfrak{z}$ nicht von einer, sondern von N Windungen umschlossen, so ist die induzierte EMK

$$e = N\frac{d\mathfrak{z}}{dt}.$$

125. Die Richtung der induzierten EMK. Die Gesetze von Lenz und Fleming.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß bei einer durch elektromagnetische Kräfte eingeleiteten Bewegung die induzierte EMK ein solche Richtung hat, daß sie den bestehenden Strom schwächt. Wenn aber durch äußere Kräfte eine Bewegung gegen die elektromagnetischen Kräfte durchgeführt wird, so leisten jene eine Arbeit, die der des bestehenden Stromes zugute kommt; d. h. die induzierte EMK hat jetzt dieselbe Richtung wie der Strom. In beiden Fällen sucht die induzierte EMK, bzw. der induzierte Strom, die Bewegung, durch die er zustande kommt, zu hindern. Wir müssen daher, wenn es nicht bloß auf den absoluten Wert der induzierten EMK, sondern auch auf ihre Richtung in bezug auf einen schon bestehenden Strom oder auf die Richtung des induzierenden Feldes ankommt, den mathematischen Ausdruck für die induzierte EMK mit negativem Vorzeichen versehen. Die letzte Gleichung lautet dann

$$e = -N\frac{d\mathfrak{z}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

Dieses Gesetz muß natürlich auch auf die Wechselwirkung zweier Ströme anwendbar sein. Haben wir z. B. zwei parallele gleichgerichtete Ströme, so ziehen sie sich an. Geschieht diese Bewegung wirklich, so werden Ströme induziert, die sie zu hindern suchen, also Ströme von entgegengesetzter Richtung, wie die bestehenden. Entfernt man sie aber voneinander, so muß man die

anziehende Kraft überwinden; dabei werden Ströme von derselben Richtung wie die bestehenden induziert, weil dadurch die zu überwindende Anziehung verstärkt wird.

Entfernt man zwei geschlossene Stromkreise, von denen nur einer Strom führt, voneinander, so wird in dem vorher stromlosen ein gleichgerichteter Strom induziert; nähert man sie, so hat der induzierte Strom entgegengesetzte Richtung wie der bestehende.

Dieses Gesetz, wonach die induzierte EMK immer eine solche Richtung hat, daß sie die Bewegung oder Veränderung, durch die sie zustande kommt, zu hindern sucht, wurde von Lenz aufgestellt und führt daher seinen Namen. Dabei entspricht das Verschwinden eines magnetischen Feldes oder das Unterbrechen eines Stromes einem Entfernen bis ins Unendliche, das Entstehen hingegen einer Annäherung aus dem Unendlichen.

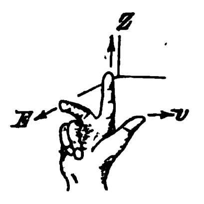


Abb. 155.

Fleming hat eine Regel angegeben, welche aus der Richtung der Kraftlinien und der Bewegung die Richtung der induzierten EMK zu bestimmen gestattet. Sie lautet:

Hält man die drei ersten Finger der rechten Hand (Abb. 155) so, daß sie drei zueinander senkrechte Richtungen andeuten, und zeigt der Daumen in die Richtung der Bewegung v und der Zeigefinger in die Richtung der Kraftlinien Z, so hat die induzierte EMK die Richtung des Mittelfingers.

Bequemer ist folgende Fassung dieser Regel: Man halte die flache rechte Hand so, daß die Kraftlinien auf die innere Handfläche senkrecht auftreffen, und der Daumen in der Bewegungsrichtung zeigt, dann zeigen die Fingerspitzen die Richtung der induzierten EMK an.

Das Gesetz von Lenz läßt sich natürlich auch auf die Induktion im eigenen Stromkreise anwenden. Wird ein Strom vermindert oder ganz unterbrochen, so entsteht in demselben Stromkreise ein anderer Strom (Extrastrom § 183), der die Verminderung oder Unterbrechung zu hindern sucht, also gleiche Richtung hat. Wird der Strom geschlossen oder ein schon bestehender verstärkt, so hat der Extrastrom entgegengesetzte Richtung, weil er das Zustandekommen des Stromes oder seine Verstärkung zu verhindern sucht.

Das muß natürlich auch mit dem mathematischen Grundgesetz (Gl. 90) in Übereinstimmung stehen, wovon man sich durch folgende Überlegung leicht überzeugt. Wenn z. B. ein Strom zunimmt, so wächst auch sein magnetisches Feld, daher ist seine Änderung

$\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ positiv. Da aber in Gl. 90 das negative Zeichen davorsteht, so ist e negativ, d. h. beim Zunehmen eines Stromes wird eine EMK induziert, die ihm entgegenwirkt. Nimmt ein Strom ab, so ist die Änderung seines Feldes $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ negativ. Da aber in Gl. 90 das negative Zeichen davorsteht, so ist e positiv, d. h. die induzierte EMK hat dieselbe Richtung wie der Strom.

126. Die Spannungsgleichung.

Bei der Bestimmung der Größe der induzierten EMK sind wir ausgegangen von dem Fall, wo in dem Stromkreise schon eine EMK E und ein Strom J vorhanden war (§ 124). Bezeichnen wir die induzierte EMK mit e, so kommt diese zu E hinzu. Es ergibt sich dann auch eine andere Stromstärke, die wir mit i bezeichnen. Nach dem Ohmschen Gesetze ist dann

$$i = \frac{E + e}{w}$$

oder

$$E = iw - e.$$

Setzt man Gl. 90 ein, so ist

$$i = \frac{E - N\frac{d\mathfrak{z}}{dt}}{w}$$

oder anders geschrieben

$$E = iw + N\frac{d\mathfrak{z}}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (91)$$

Das ist die Spannungsgleichung für irgend einen geschlossenen Stromkreis, in welchem nebst einer ursprünglichen EMK E eine induzierte EMK auftritt.

127. Richtungswechsel der induzierten EMK.

Aus Gl. 88 geht hervor, daß die Richtung der induzierten EMK von der Richtung der Kraftlinien **und** von der Bewegungsrichtung abhängt. Wenn daher eine von diesen beiden sich ändert, geht die Richtung der induzierten EMK in die entgegengesetzte über; wenn aber beide gleichzeitig sich ändern, findet kein Richtungswechsel statt.

Betrachten wir z. B. ein Drahtrechteck (eine Windung), das um seine Achse O (Abb. 156) in dem von den Polen NS herrührenden magnetischen Feldes mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gedreht wird. Die wagrechten Linien mit den Pfeilen geben die Richtung der Kraftlinien an. Wenden wir darauf das Grundgesetz (§ 124) an, so erkennen wir, daß Induktion nur in den beiden Längsseiten des Rechteckes stattfindet, da die kurzen Seiten während der Drehung von den Kraftlinien nicht geschnitten werden. Aus dem Gesetz von Fleming erkennen wir, daß bei einer Drehung im Sinne des Uhrzeigers in den beiden Längsseiten entgegengesetzt gerichtete EMKe (in bezug auf den Raum) induziert werden, die aber in bezug auf das geschlossene Rechteck in demselben Sinne wirken, also sich addieren. Diese Richtung bleibt während einer halben Drehung. Während der zweiten halben Drehung aber bewegt sich jene Seite, die vorher von oben nach unten ging, von unten nach oben. Da die Richtung der Kraftlinien ungeändert geblieben ist, muß die induzierte EMK während dieses Überganges ihre Richtung ändern.

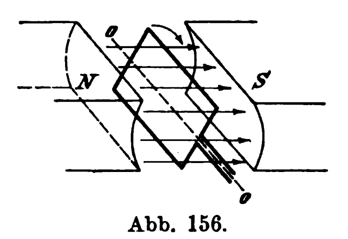


Abb. 156.

Geht man von der anderen Form des Induktionsgesetzes aus (Gl. 90), wonach die EMK gleich ist der Änderung der Kraftlinien, welche von der Windung umschlossen werden, so muß ein Richtungswechsel dort eintreten, wo die Änderung der Kraftlinienzahl $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ von positiven zu negativen Werten übergeht, also Null ist. Das ist der Fall, wenn die Windung die größtmögliche Kraftlinienmenge umschließt.

Man erhält also durch Drehung einer Windung eine EMK, welche ihre Richtung während einer ganzen Umdrehung zweimal ändert, und zwar gerade in jenen Augenblicken, wo die Windung die größtmögliche Kraftlinienmenge umschließt. Dagegen ist die EMK in jenen Augenblicken am größten, wo die Windung keine Kraftlinien umschließt, weil da die Änderung der Kraftlinienmenge am größten ist, oder von jeder Seite der Windung die meisten Kraftlinien in der Zeiteinheit geschnitten werden. Es entsteht also an den Enden der Windung eine Wechselspannung, und wenn der Stromkreis geschlossen wird, ein Wechselstrom.

Neuntes Kapitel.

Der einfache Wechselstrom.

128. Die induzierte EMK als einfache periodische Funktion.

Wir haben im vorigen gesehen, daß bei der Drehung eines Drahtrechteckes in einem homogenen Felde eine EMK induziert wird, die während jeder ganzen Umdrehung zweimal das Vorzeichen wechselt. Ist der Stromkreis geschlossen, so muß auch der entstehende Strom zweimal sein Vorzeichen wechseln. Es ist nun unsere Aufgabe die Gesetze eines solchen Wechselstromes aufzustellen. Wir gehen dabei von dem einfachsten Fall aus, wo nämlich in dem Stromkreise keine andere als die induzierte EMK vorhanden ist, wie in dem eben betrachteten Falle.

Abb. 157 stellt einen Querschnitt durch Abb. 156 senkrecht zur Drehungsachse O dar. AB ist der Querschnitt der um diese Achse gedrehten Stromfläche. Die horizontalen Linien mit den Pfeilen bedeuten die Kraftlinien des homogenen Feldes. Bei der Stellung AB umschließt der rechteckige Stromleiter die größte Kraftlinienmenge, die wir mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnen. Ist das Rechteck um den Winkel α gedreht, so daß es die Stellung OC hat, so ist die Kraftlinienmenge, die jetzt von ihm umschlossen wird:

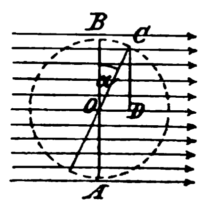


Abb. 157.

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Z} \cos \alpha.$$

Das gilt für jeden beliebigen Wert des Winkels α.

Die bei der Drehung induzierte EMK ist nach Gl. 90

$$e = -N \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -N \frac{d(\mathfrak{Z} \cos \alpha)}{dt} = N\mathfrak{Z} \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}.$$

Geschieht die Drehung mit gleichmäßiger Geschwindigkeit, so ist α proportional der Zeit t, also

$$\alpha = \omega t.$$

Daraus folgt $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$.

ω ist also die Winkelgeschwindigkeit. Und es ergibt sich weiter

$$e = \omega N \mathfrak{Z} \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

Setzt man

$$\omega N \mathfrak{Z} = \mathfrak{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

so ist

$$e = \mathfrak{E} \sin \alpha = \mathfrak{E} \sin \omega t$$

$$\text{für } \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder für } t = \frac{\pi}{2\omega} \quad \text{ist} \quad e = \mathfrak{E};$$

$\mathfrak{E}$ ist also der **größte** Wert, den die EMK erreichen kann. Man bezeichnet ihn als **Scheitelwert** der EMK, weil er dem **Scheitelpunkt** der als Kurve aufgezeichneten EMK entspricht. Macht man den Radius OC des Kreises in Abb. 157 gleich $\mathfrak{E}$, so ist

$$OD = \mathfrak{E} \sin \alpha = e.$$

Die Strecke OD stellt also den jeweiligen Wert von e vor. Läßt man daher OB eine ganze Umdrehung ausführen, und trägt die Größe des Drehungswinkels auf der Abszissenachse (Abb. 158) auf und die entsprechenden Werte $OD = e$ als die Ordinaten, so erhält man eine Sinuskurve als graphische Darstellung der EMK während einer ganzen Umdrehung entsprechend der Gl. 92. Dabei wird zweimal $e = 0$, nämlich für $\alpha = o$ und $\alpha = \pi$. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist $e = \mathfrak{E}$; für $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ist $e = -\mathfrak{E}$.

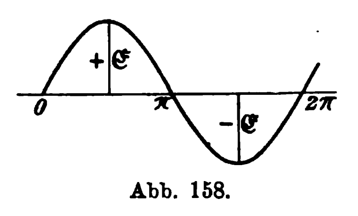


Abb. 158.

Ist eine ganze Drehung um $\alpha = 2\pi$ vollendet, und setzt man sie dann noch weiter fort, so wiederholt sich dasselbe. Zwischen o und 2π liegt also eine ganze Periode. Die Zeit, die dazu notwendig ist, erhält man aus $2\pi = \omega t$. Man nennt sie die **Dauer einer Periode** oder **Schwingungsdauer** und bezeichnet sie mit τ; es ist also:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

Setzt man

$$\frac{1}{\tau} = \nu,$$

so ist ν die Anzahl der Perioden in der Zeiteinheit, und man nennt sie Periodenzahl oder Schwingungszahl oder Frequenz.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\omega = 2\pi\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Da ν die Periodenzahl in 1 Sekunde bedeutet, so ist ω die Periodenzahl in 2π Sekunden.

Setzt man diese Werte für ω ein, so kann man auch schreiben:

$$e = \mathfrak{E} \sin \frac{2\pi}{\tau} t = \mathfrak{E} \sin 2\pi\nu t.$$

Die Abszissen der Abb. 158 kann man im Zeitmaß ausdrücken, wenn man sie um das ωfache verkleinert, weil $t = \frac{\alpha}{\omega}$ ist.

Aus der Kurve oder der Gleichung für e erkennt man, daß e von 0 bis π positive, von π bis 2π negative Werte hat; d. h. die EMK wechselt bei $\alpha = \pi$ und $\alpha = 2\pi$, also zweimal während einer Periode und 2νmal während einer Zeiteinheit (Sekunde) ihre Richtung. Ebenso oft geht das Stromrechteck (Abb. 156) an den Magnetpolen, die das Feld erzeugen, vorüber; man nennt daher 2ν die Polwechselzahl.

Wollen wir den Verlauf der von dem Drahtrechteck (AB) in Abb. 157 umschlossenen Kraftlinienmenge $\mathfrak{z}$ durch eine Kurve darstellen, und zwar über derselben Abszissenachse wie e in Abb. 158, so haben wir die zu den einzelnen Werten von α gehörigen Werte von DC' als Ordinaten aufzutragen, und erhalten so die Abb. 159. Man ersieht aus ihr, daß $\mathfrak{z}$ denselben Verlauf nimmt wie e, nur mit dem Unterschied, daß es mit dem Scheitelwerte $\mathfrak{Z}$ beginnt, während e mit Null beginnt. Den Scheitelwert $\mathfrak{E}$ erreicht die EMK erst bei $\frac{\pi}{2}$, also um eine Viertelperiode später als $\mathfrak{z}$. Die induzierte EMK ist also um eine Viertelperiode oder 90^0 verspätet oder verzögert gegenüber den sie erzeugenden Kraftlinien.

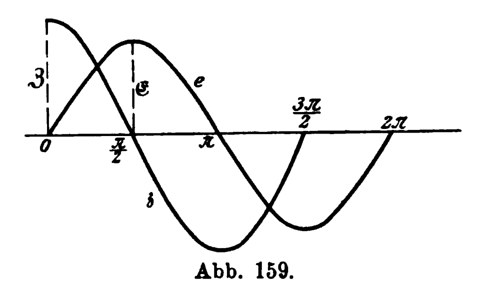


Abb. 159.

Man erkennt dies auch aus den obigen Gleichungen für $\mathfrak{z}$ und e, wenn man e durch dieselbe Funktion ausdrückt wie $\mathfrak{z}$, nämlich:

$$e = \mathfrak{E} \sin \alpha = \mathfrak{E} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Vergleicht man damit die Gleichung für die Kraftlinienmenge

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Z} \cos \alpha,$$

so erkennt man, daß $\mathfrak{z}$ für $\alpha = 0$ seinen Scheitelwert erreicht, e aber erst für $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also um eine Viertelperiode später; oder während $\mathfrak{z}$ für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ Null wird, ist dies bei e erst für $\alpha = \pi$ der Fall.

Es folgt dies endlich auch unmittelbar aus den Induktionsgesetzen; wir fanden, daß die induzierte EMK gleich ist der Änderung der Kraftlinienmenge, die von dem Drahtrechteck umschlossen wird, nämlich $e = -N\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$. Wo diese Änderung am größten ist, dort ist also auch e am größten. Das ist dort der Fall, wo die Kurve für $\mathfrak{z}$ am steilsten ist, also bei $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$; immer, wo sie durch Null geht. An diesen Stellen muß also die induzierte EMK ihren Scheitelwert $\mathfrak{E}$ erreichen. Und zwar den positiven Scheitelwert, wenn $\mathfrak{z}$ abnimmt; das ist z. B. bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Hingegen den negativen Scheitelwert wenn $\mathfrak{z}$ zunimmt; das ist z. B. bei $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Dort aber, wo die Änderung von $\mathfrak{z}$ Null ist, dort muß auch e Null sein; das ist bei jenen Abszissenwerten der Fall, wo $\mathfrak{z}$ den größten Wert erreicht, denn hier ist $\mathfrak{z}$ während einer unendlich kleinen Zeit konstant.

Man erkennt aus der vorstehenden Erörterung, daß in den mathematischen Ausdrücken für e und $\mathfrak{z}$ der Faktor vor der trigonometrischen Funktion immer den größten Wert oder Scheitelwert, und der Faktor ω immer die 2πfache Periodenzahl darstellt, und daß jede einfache periodische Funktion, gleichzeitig ob sie als sin oder cos dargestellt ist, durch diese beiden Faktoren vollständig bestimmt ist. Demnach bedeutet auch bei einem Wechselstrom, dessen Verlauf durch $i = \mathfrak{J} \sin \omega t$ gegeben ist, $\mathfrak{J}$ den größten Wert oder Scheitelwert der Stromstärke.

Die Scheitelwerte werden im folgenden immer mit großen deutschen Buchstaben ($\mathfrak{E}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{J}$), die veränderlichen Augenblickswerte mit kleinen Buchstaben (e, $\mathfrak{z}$, i) bezeichnet.

Wir sind zu den einfachen periodischen Funktionen dadurch gekommen, daß wir das Feld, in dem das Drahtrechteck gedreht wird (Abb. 157), als homogen vorausgesetzt haben. Ist das nicht der Fall, so lassen sich e und $\mathfrak{z}$ nur durch zusammengesetzte

periodische Funktionen darstellen. Im folgenden setzen wir aber, solange nichts anderes bestimmt wird, nur einfache periodische Funktionen voraus.

129. Die Elektrizitätsmenge eines veränderlichen Stromes.

Die von einem konstanten Strome J während der Zeit t gelieferte Elektrizitätsmenge ist $Q = Jt$. Diese Grundgleichung darf bei einem veränderlichen Strome nur für ein unendlich kleines Zeitteilchen dt, innerhalb dessen die Stromstärke i als konstant angesehen werden kann, angewendet werden. Die während dieser Zeit dt vom Strome gelieferte Elektrizitätsmenge dQ ist also

$$dQ = i \cdot dt \quad \ldots \ldots \quad (96)$$

Dann ist die während einer Zeit t gelieferte Menge Q gleich der Summe aller dieser, also

$$Q = \Sigma\, dQ = \Sigma\, i \cdot dt;$$

oder wenn man die Summierung durch eine Integration ersetzt

$$Q = \int_0^t i \cdot dt \quad \ldots \ldots \quad (97)$$

Ist i ein Wechselstrom von der Form $i = \mathfrak{J} \sin \omega t$ und durch die Abb. 160 dargestellt, wobei die Zeiten als Abszissen aufgetragen sind, so ist $i \cdot dt$ der Flächeninhalt des schmalen schraffierten Rechteckes mit der Höhe i und der Grundlinie dt. Die während einer halben Periode gelieferte Elektrizitätsmenge ist demnach durch die von der halben Kurve und der Abszissenachse eingeschlossene Fläche dargestellt. Ihr Betrag ist

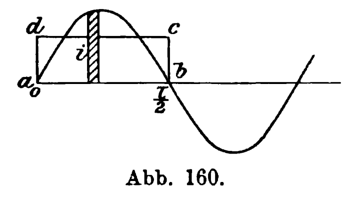


Abb. 160.

$$Q = \int_0^{\frac{\tau}{2}} i\, dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{J} \sin \omega t\, dt.$$

Führen wir für ω die Gl. 94 ein, so ist

$$Q = \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{J} \sin \frac{2\pi}{\tau} t\, dt = -\, \mathfrak{J} \frac{\tau}{2\pi} \left[\cos \frac{2\pi}{\tau}\, t\right]_0^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= -\, \mathfrak{J} \frac{\tau}{2\pi} \Big[-1 - 1\Big] = \mathfrak{J} \frac{\tau}{\pi} \quad \ldots \quad (98)$$

Die während der nächsten halben Periode gelieferte Menge ist natürlich ebenso groß, aber negativ, also $Q = -\mathfrak{J}\frac{\tau}{\pi}$.

Die gesamte, während einer ganzen Periode gelieferte Elektrizitätsmenge ist demnach Null.

130. Der arithmetische Mittelwert.

Durch den Scheitelwert $\mathfrak{J}$ wird zwar ein Wechselstrom seiner Größe nach charakterisiert, aber man kann auf ihn nicht die für einen konstanten Strom geltenden Gesetze anwenden, weil er nur einen Augenblick lang besteht. Man braucht einen Mittelwert, für den die in § 41 festgesetzte Grundgleichung $Q = Jt$ gilt, also einen Mittelwert, der mit der Dauer einer halben Periode multipliziert, die während dieser Zeit gelieferte Elektrizitätsmenge Q gibt. Bezeichnet man diesen Mittelwert mit J_{mi}, so ist zu setzen:

$$Q = \frac{\tau}{2} J_{mi} \quad \dots \dots \dots \quad (99)$$

Da nach dem vorigen $Q = \frac{\tau}{\pi}\mathfrak{J}$ ist, so folgt

$$J_{mi} = \frac{2}{\pi}\mathfrak{J} = 0{,}637\,\mathfrak{J} \quad \dots \dots \quad (100)$$

Hat das Rechteck *abcd* (Abb. 160) denselben Flächeninhalt wie die von der halben Sinuswelle und der Achse eingeschlossene Fläche, so ist J_{mi} nichts anderes als die Höhe *ad* dieses Rechteckes. J_{mi} ist also der arithmetische Mittelwert eines Wechselstromes.

Dasselbe gilt natürlich auch für eine EMK von der Form $e = \mathfrak{E} \sin \omega t$. Nämlich $E_{mi} = \frac{2}{\pi}\mathfrak{E}$.

Für eine auf der negativen Seite liegende halbe Periode ergibt sich natürlich derselbe Mittelwert, aber mit negativem Vorzeichen. Würde man also diesen Mittelwert für eine ganze Periode bilden, so würde man Null erhalten.

Ist der Strom oder die EMK durch eine Cosinus-Funktion dargestellt, z. B. $i = \mathfrak{J} \cos \omega t$, so muß der Mittelwert J_{mi} zwischen den Grenzen $\frac{\tau}{4}$ und $\frac{3\tau}{4}$ gebildet werden. Würde man zwischen den Grenzen o und $\frac{\tau}{2}$ integrieren, wie bei einer Sinus-Funktion, so würde man Null erhalten, weil der Strom in der ersten und in der zweiten Viertelperiode entgegengesetztes Vorzeichen hat. Der

arithmetische Mittelwert muß überhaupt immer zwischen zwei Hauptnullpunkten gebildet werden, wie auch immer die Wellenform beschaffen sein mag.

131. Der quadratische Mittelwert.

Der im vorhergehenden Kapitel bestimmte arithmetische Mittelwert hat für die Elektrotechnik so gut wie gar keine Wichtigkeit; denn die gelieferte Elektrizitätsmenge hat nur für elektrolytische Prozesse Bedeutung. Für alle praktischen Anwendungen der Wechselströme kommt vielmehr der Mittelwert aus der Summe der Quadrate in Betracht.

So ist z. B. die während einer unendlich kleinen Zeit dt entwickelte, in Wärme umgesetzte Arbeit $i^2 w \cdot dt$ und die während einer halben Periode entwickelte Wärmearbeit A:

$$A = w \int_0^{\frac{\tau}{2}} i^2 \cdot dt \quad \ldots \ldots \quad (101)$$

Auch die Meßinstrumente für Wechselströme können nur quadratische Mittelwerte angeben. Denn jene Meßinstrumente, welche von dem einfachen Werte des Stromes abhängen, müßten bei jedem Richtungswechsel des Stromes nach entgegengesetzten Seiten ausschlagen. Der Zeiger würde also beständig zwischen positiven und negativen Ausschlägen hin und her schwanken, wenn er überhaupt so rasch nachfolgen könnte. Da er dies nicht kann, so gibt ein solches Instrument bei Wechselstrom überhaupt keinen Ausschlag. Bei jenen Instrumenten aber, die vom Richtungswechsel des Stromes unabhängig sind, und nur solche können aus dem angeführten Grunde bei Wechselströmen verwendet werden, müssen die Angaben proportional dem Quadrate des Stromes oder der Spannung sein, weil nur die im Quadrate vorkommenden Werte immer positiv sind, gleichgültig, ob die Größe selbst positiv oder negativ ist.

Berechnen wir nun die obige Arbeit unter der Annahme, daß der Strom $i = \mathfrak{J} \sin \omega t$ ist, so erhalten wir:

$$A = w \mathfrak{J}^2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin^2 \omega t = \frac{w \mathfrak{J}^2}{2} \int_0^{\frac{\tau}{2}} (1 - \cos 2 \omega t)\, dt$$

$$= \frac{w \mathfrak{J}^2}{2} \left| t - \frac{\sin 2 \omega t}{2 \omega} \right|_0^{\frac{\tau}{2}}.$$

Und weil $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ (nach Gl. 94) ist, so ergibt sich:

$$A = \frac{w\,\mathfrak{J}^2}{2}\,\frac{\tau}{2}.$$

Um daraus die mittlere Wärme-Arbeit während einer Zeiteinheit, das ist die Wärme-Leistung P, zu finden, hat man durch die Zeit $\frac{\tau}{2}$ zu dividieren. Es ist also:

$$P = \frac{w\,\mathfrak{J}^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

Die Wärme-Arbeit während irgend einer Zeit t ist dann:

$$A = \frac{w\,\mathfrak{J}^2}{2}\,t.$$

Setzt man $\frac{\mathfrak{J}^2}{2} = J^2$, so gilt dasselbe Gesetz wie für einen konstanten Gleichstrom (§ 52).

Das ist:

$$P = wJ^2 \qquad \text{und} \qquad A = wJ^2 t.$$

Dieser Wert:

$$J = \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}} = \frac{\mathfrak{J}}{1{,}414}$$

ist also nichts anderes als der quadratische Mittelwert, nämlich:

$$J = \sqrt{\frac{1}{\frac{\tau}{2}} \int_0^{\frac{\tau}{2}} i^2\, dt}.$$

Da er für die Leistung (Effekt) eines Wechselstromes maßgebend ist, wird er gewöhnlich als effektiver Wert bezeichnet.

Dasselbe gilt natürlich auf für eine EMK oder Spannung von der Form $e = \mathfrak{E} \sin \omega t$:

$$E = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{2}}.$$

Wir werden im folgenden immer die effektiven oder quadratischen Mittelwerte mit großen lateinischen Buchstaben (J, E) zum Unterschied von den Scheitelwerten ($\mathfrak{J}$, $\mathfrak{E}$) und den arithmetischen Mittelwerten (J_{mi}, E_{mi}) bezeichnen.

Den Faktor $\sqrt{2} = 1{,}414$ nennt man den Scheitelfaktor σ der Sinuskurve. Denn es ist jener Faktor, durch den man den Scheitel-

wert dividieren muß, um den effektiven Wert zu erhalten. Es ist also $\sigma = \frac{\mathfrak{E}}{E}$. Bei anderen Wellenformen hat der Scheitelfaktor natürlich einen anderen Zahlenwert, und zwar ist er um so größer, je spitzer die Wellenform ist. (Vgl. § 209.)

Führt man in den obigen Ausdruck für die Wärmeleistung das Ohmsche Gesetz ein, so ist:

$$P = w\frac{E^2}{w^2} = \frac{E^2}{w}.$$

132. Elektromotorische Kraft der Selbstinduktion.

Das allgemeine Gesetz für die Induzierung einer EMK in einem Stromkreis (Gl. 90) gilt natürlich auch dann, wenn die Kraftlinien nicht von einem fremden System, sondern von dem Strome i des eigenen Stromkreises herrühren: Schickt man z. B. einen Strom i durch eine Spule von N Windungen (Abb. 161), so erzeugt er ein magnetisches Feld, dessen Kraftlinienmenge $\mathfrak{z}$ in jedem Augenblick bestimmt ist durch

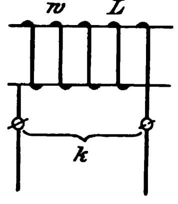


Abb. 161.

$$\mathfrak{z} = \frac{4\pi i N}{\mathfrak{w}},$$

wenn i in absoluten Einheiten ausgedrückt wird.

Ändert sich die Stromstärke, so verhält sich jede Windung allen übrigen gegenüber wie ein fremder Stromkreis. Jede Windung induziert in allen übrigen eine EMK, welche bestimmt ist durch

$$e = -N\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -\frac{4\pi N^2}{\mathfrak{w}}\frac{di}{dt}.$$

Nach § 120 ist

$$\frac{4\pi N^2}{\mathfrak{w}} = L,$$

also

$$e = -L\frac{di}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

Da diese EMK vom Strome i selbst in seinem eigenen Stromkreis induziert wird, so nennt man sie EMK der Selbstinduktion oder induktive Spannung oder Induktionsspannung. Man erkennt jetzt auch, warum L als Koeffizient der Selbstinduktion bezeichnet wird.

Die letzte Gleichung folgt auch unmittebar aus § 119, wo wir gesehen haben, daß iL die vom Strome i erzeugte Kraftlinienmenge

bedeutet. Da nun die induzierte EMK gleich der Änderung der Kraftlinienmenge (negativ genommen) ist, so folgt ganz allgemein

$$e = -\frac{d(iL)}{dt}.$$

Ist i konstant, L aber veränderlich (indem z. B. die Gestalt des Stromkreises oder die magnetische Durchlässigkeit des Mediums geändert wird), so ist

$$e = -i\frac{dL}{dt}.$$

Ist L konstant, i aber veränderlich, so ist

$$e = -L\frac{di}{dt}.$$

Betrachtet man nicht den ganzen geschlossenen Stromkreis, sondern nur den Teil, der die Spule (Abb. 161) bildet, und bezeichnet mit k die zwischen den Enden der Spule herrschende Klemmenspannung, so geht die Spannungsgleichung (§ 126) über in

$$k = iw - e \quad \ldots\ldots \quad (104)$$

und nach Einsetzung der letzten Gleichung

$$k = iw + L\frac{di}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (105)$$

Diese Gleichung besagt folgendes: Wird ein konstanter Strom (Gleichstrom) i durch eine Spule mit dem Widerstande w geschickt, so entsteht an den Enden der Spule eine Spannung $k = iw$. Wird aber ein Wechselstrom von derselben Stärke durch dieselbe Spule geschickt, so ist die Klemmenspannung k um $L\frac{di}{dt}$ größer. Oder: Um einen konstanten Strom von der Stärke i durch diese Spule hindurchzuschicken, ist eine Klemmenspannung $k = iw$ erforderlich. Um einen Wechselstrom von derselben Stärke durch dieselbe Spule hindurchzuschicken, ist eine um $L\frac{di}{dt}$ größere Klemmenspannung erforderlich.

In § 128 (Gl. 93) haben wir bereits die wichtige Beziehung zwischen Kraftlinienmenge und EMK abgeleitet. Setzt man die Definition von ω (Gl. 95) ein, so ist

$$\mathfrak{E} = 2\pi\nu N\mathfrak{Z}.$$

Dividieren wir beide Seiten der letzten Gleichung durch den Scheitelfaktor der Sinuslinie $\sqrt{2}$, so gehen die Scheitelwerte über in die effektiven Werte

$$E = 2\pi\nu NZ.$$

In dieser Form ist die Gleichung wenig gebräuchlich, weil es sich in der Elektrotechnik fast immer um Spulen mit Eisenkernen handelt, und die darin auftretenden Verluste durch Hysterese von Wichtigkeit sind. Für diese ist aber nicht der quadratische Mittelwert Z, sondern (nach § 94) die größte Kraftlinienmenge, das ist der Scheitelwert $\mathfrak{Z}$, maßgebend. Man drückt daher bloß die EMK durch den effektiven Wert $E = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{2}}$ aus und behält für das magnetische Feld den Scheitelwert bei. Dann ist:

$$E = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \nu N \mathfrak{Z} = 4{,}44 \nu N \mathfrak{Z}.$$

Dabei gelten E und $\mathfrak{Z}$ in absoluten Einheiten. In der Praxis drückt man aber E in Volt aus, während das magnetische Feld in absoluten Einheiten (Kraftlinien ausgedrückt wird. Da 1 Volt gleich 10^8 absoluten Einheiten ist, so geht die Gleichung über in

$$E \cdot 10^8 = 4{,}44 \nu N \mathfrak{Z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

Im vorhergehenden haben wir die Abhängigkeit der EMK von dem magnetischen Felde festgestellt. Wir brauchen nun noch die Abhängigkeit der EMK von dem Strome.

Die Gleichung 86 (§ 119) gilt ganz allgemein für die Selbstinduktion eines Stromkreises, wenn $\mathfrak{z}$ und i einander entsprechende Werte sind. Sie gilt also auch für die Scheitelwerte; also

$$L = \mathfrak{Z} \frac{N}{\mathfrak{J}}$$

oders anders geschrieben

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{J} \frac{L}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

Will man $\mathfrak{Z}$ in absoluten Einheiten, L und $\mathfrak{J}$ aber in praktischen Einheiten (Henry und Ampere) ausdrücken, so ist

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{J} \frac{L}{N} \cdot 10^8,$$

weil 1 Henry $= 10^9$ abs. Einh. und 1 Ampere $= 10^{-1}$ abs. Einh. ist.

Soll die Stromstärke durch den effektiven Wert J ausgedrückt werden, so hat hat man mit dem Scheitelfaktor $\sqrt{2}$ zu multiplizieren (§ 131) und erhält

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{2}\, J \frac{L}{N} \cdot 10^8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Aus Gl. 93 und 107 folgt

$$\mathfrak{E} = \omega L \mathfrak{J}.$$

Dividiert man beiderseits durch den Scheitelfaktor der Sinuswelle, so erhält man die effektiven Werte, also

$$E = \omega L J = 2\pi\nu L J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Dasselbe ergibt sich, wenn man vom Strome $i = \mathfrak{J} \sin \omega t$ ausgeht, aus der Grundgleichung

$$e = -L\frac{di}{dt} = -L\frac{d}{dt}(\mathfrak{J} \sin \omega t) = -\omega L \mathfrak{J} \cos \omega t.$$

Da der Faktor von der periodischen Funktion den Scheitelwert dieser Funktion darstellt, so ist

$$\omega L \mathfrak{J} = \mathfrak{E}.$$

Man kann auch schreiben

$$e = \mathfrak{E} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

d. h. die EMK der Selbstinduktion ist gegen den Strom um eine Viertelperiode oder 90° verspätet oder verzögert.

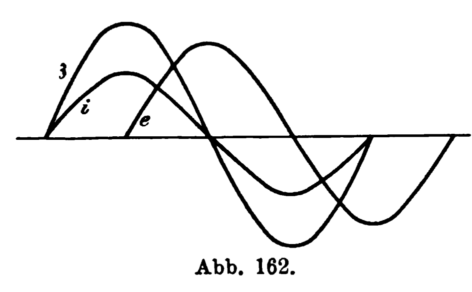


Abb. 162.

Da nach § 128 diese EMK auch gegenüber dem magnetischen Felde um 90° verzögert ist, so folgt, daß Strom und Feld in der Phase übereinstimmen müssen (Abb. 162), was übrigens auch aus dem Grundgesetz $\mathfrak{z} = \frac{4\pi i N}{\mathfrak{w}}$ folgt, weil dieses außer $\mathfrak{z}$ und i kein von der Zeit abhängiges Glied enthält.

Handelt es sich nicht um eine Spule, sondern um einen linearen, geradlinigen oder krummlinigen Leiter, so gilt alles vorstehende so wie für eine einzige Windung. $\mathfrak{Z}$ bedeutet dann die Anzahl der in sich geschlossenen Kraftlinien, welche den Leiter umgeben (Abb. 76), und zwar zwischen jenen zwei Punkten, zwischen denen die EMK der Selbstinduktion den Wert $\mathfrak{E}$ hat, oder zwischen denen die Selbstinduktion den Wert L hat. An der Anzahl der Kraftlinien ändert sich ja nichts, wenn dieses Leiterstück zu einer Windung zusammengebogen, oder wenn eine Windung zu einem geradlinigen Leiterstück auseinandergebogen wird.

133. Das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom.

Im vorhergehenden haben wir die Beziehung zwischen der EMK[1]) Kraftlinienmenge und Strom festgestellt. Wir wollen nun die Beziehung zwischen Klemmenspannung und Stromstärke für einen Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion (Abb. 161) ableiten. Nach Gl. 105 ist

$$k = iw + L\frac{di}{dt}.$$

Wir setzen voraus, daß Klemmenspannung und Strom sinusförmig verlaufen, also

$$k = \mathfrak{K} \sin \omega t.$$

Vom Strome i können wir nicht voraussetzen, daß er mit der Klemmenspannung in gleicher Phase ist, weil das letzte Glied der vorletzten Gleichung um 90^0 dem Strome voreilt. Der Strom muß also gegen die Klemmenspannung um einen Winkel ψ in der Phase verschoben sein, der zwischen 0^0 und 90^0 liegt, also

$$i = \mathfrak{J} \sin (\omega t + \psi).$$

Setzt man die letzten Ausdrücke in die Gleichung für k ein, so ergibt sich:

$$\mathfrak{K} \sin \omega t = w\mathfrak{J} \sin (\omega t + \psi) + \omega L \mathfrak{J} \cos (\omega t + \psi)$$

$$\mathfrak{K} \sin \omega t = \mathfrak{J} (w \sin \omega t \cos \psi + w \cos \omega t \sin \varphi + \omega L \cos \omega t \cos \psi - \omega L \sin \omega t \sin \psi).$$

Diese Gleichung muß zu jeder beliebigen Zeit gelten, also auch zur Zeit $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

Setzt man zunächst $t = 0$, so ergibt sich:

$$0 = \mathfrak{J} (w \sin \psi + \omega L \cos \psi).$$

Setzt man $t = \frac{\pi}{2\omega}$, so ergibt sich:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{J} (w \cos \psi - \omega L \sin \psi).$$

Quadriert man die letzten Gleichungen und addiert sie dann, so ergibt sich:

$$\mathfrak{K}^2 = \mathfrak{J}^2 (w^2 + \omega^2 L^2).$$

Dividiert man beiderseits durch das Quadrat des Scheitelfaktors, $(\sqrt{2})^2$, so erhält man dieselbe Gleichung für die effektiven Werte:

---

[1]) Wir werden im folgenden statt EMK der Selbstinduktion oder induzierter EMK einfach EMK sagen.

$$K^2 = J^2 (w^2 + \omega^2 L^2)$$

oder:

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

Aus der ersten Bedingungsgleichung, die wir aus $t = 0$ erhalten haben, folgt sofort:

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\omega L}{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

Da ω, L und w nur positive Werte annehmen können, so kann der ganze Ausdruck nur dadurch negativ werden, daß der Winkel ψ negativ ist. Wir können also in der Stromgleichung einen negativen Winkel φ einführen, wenn wir

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

setzen. Dann ist, wenn wir gleichzeitig den Wert für $\mathfrak{J}$ einsetzen,

$$i = \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

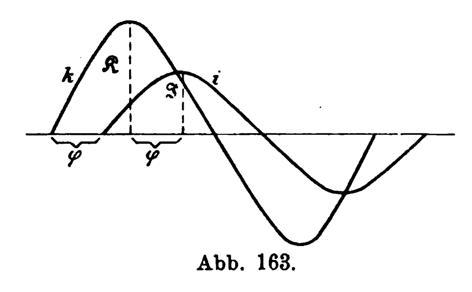


Abb. 163.

Trägt man k und i als Wellenzüge auf, so erhält man Abb. 163. Der Strom ist der Spannung gegenüber um den Winkel φ in der Phase verspätet (er eilt der Spannung nach), denn für $\omega t = 0$ ist auch $k = 0$. Dagegen ist i erst bei $\omega t = \varphi$ Null; und um ebensoviel später erreicht der Strom seinen Scheitelwert $\mathfrak{J}$ als die Spannung ihren Scheitelwert $\mathfrak{K}$.

Gemäß Gl. 105 ist k die Summe aus iw und $L\frac{di}{dt}$. Abb. 164 bringt das zum Ausdruck: Jede Ordinate der Welle k ist die algebraische Summe aus den zugehörigen Ordinaten der Wellen iw und $L\frac{di}{dt}$. Die Welle von $L\frac{di}{dt}$ ist gegen die von iw und 90^0 verschoben, denn wenn $i = \mathfrak{J} \sin \omega t$ ist, so ist

$$\frac{di}{dt} = \omega \mathfrak{J} \cos \omega t = \omega \mathfrak{J} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Nach Gl. 104 ist k aber auch gleich der Differenz von $i\omega$ und e, was in Abb. 164 ebenfalls zum Ausdruck kommt, weil $e = -L\frac{di}{dt}$ ist.

Ist $L = 0$, d. h. verläuft der Wechselstrom in einem Stromkreis, der keine Selbstinduktion hat, so ist $\varphi = 0$. Es besteht also keine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom. Dieser Fall ist praktisch unmöglich, weil eben jeder Strom auch in einem geraden Leiter ein magnetisches Feld und daher auch eine gewisse Selbstinduktion hat. Am nächsten kommt dieser Bedingung ein bifilar gespannter oder gewickelter Draht, dessen Leitungswiderstand groß ist.

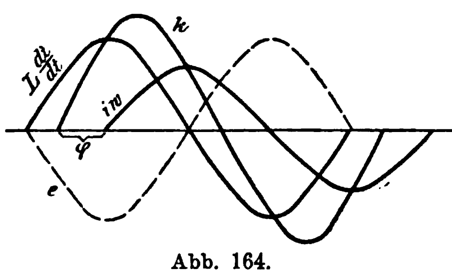


Abb. 164.

Die Selbstinduktion verursacht aber nicht nur eine Phasenverschiebung, sondern auch eine Verkleinerung der Stromstärke, wie aus Gl. 110 hervorgeht. Ist ω oder L Null, so ist $J = \frac{K}{w}$. Das ist das Ohmsche Gesetz, wie es für Gleichströme gilt (§ 42). Überhaupt hat die Gl. 110 dieselbe Form wie das Ohmsche Gesetz, nur daß an Stelle von w der kompliziertere Ausdruck $\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}$ getreten ist. Man bezeichnet daher diesen Ausdruck als scheinbaren oder Wechselstromwiderstand. Er ist — graphisch dargestellt — die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes (Abb. 165), dessen Katheten w und ωL sind. Das Produkt ωL hat dieselben physikalischen und mathematischen Eigenschaften (dieselbe Dimension) wie w. Man bezeichnet es daher als induktiven Widerstand. Demnach ist die Tangente des Phasenverschiebungswinkels φ gleich dem Verhältnis des induktiven zum Ohmschen Widerstande, und der scheinbare Widerstand ist die geometrische Summe aus beiden.

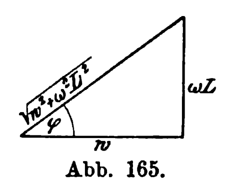


Abb. 165.

Je größer der induktive Widerstand gegenüber dem Ohmschen ist, desto größer ist die Phasenverschiebung; ist er unendlich groß gegenüber dem Ohmschen, so ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \infty, \text{ also } \varphi = 90^0 \text{ und } J = \frac{K}{\omega L}.$$

Dieser Fall ist praktisch ebensowenig möglich wie der, daß $L = 0$

ist. Man kann ihm aber sehr nahe kommen, wenn sowohl die Periodenzahl ν (mithin auch ω), als auch L sehr groß ist.

Aus dem Widerstandsdreieck (Abb. 165) ergibt sich sofort

$$w = \cos\varphi \sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}.$$

Führt man dies in Gl. 110 ein, so erhält man:

$$J = \frac{K \cos\varphi}{w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (114)$$

Beispiel. Eine Spule, deren Ohmscher Widerstand $w = 20$ und deren Selbstinduktion $L = 0{,}5$ Henry ist, sei an eine Wechselstromquelle von 100 V. und 48 Perioden (ν) angeschlossen. Dann ist $\omega = 2\pi 48 = 300$; der induktive Widerstand ist $\omega L = 150$; der scheinbare Widerstand ist

$$\sqrt{w^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{400 + 22500} = 151.$$

Der scheinbare Widerstand unterscheidet sich also in diesem Falle nur sehr wenig vom induktiven, weil das Quadrat des Ohmschen Widerstandes klein ist gegen das des induktiven. Die Stromstärke ist $J = \frac{100}{151} = 0{,}66$ A. Die Phasenverschiebung ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{150}{20} = 7{,}5$; $\varphi = 82^\circ 25'$. Würde die Spule an Gleichstrom von derselben Spannung angeschlossen, so wäre der Strom

$$J = \frac{K}{w} = \frac{100}{20} = 5 \text{ A}.$$

134. Arbeit und Leistung eines Wechselstromes.

Ist $k = \mathfrak{K} \sin \omega t$ die Klemmenspannung irgend eines Wechselstromkreises, so ist nach dem Vorstehenden der Strom darzustellen durch $i = \mathfrak{J} \sin(\omega t - \varphi)$. Die in diesem Stromkreise während des unendlich kleinen Zeitraumes dt geleistete elektrische Arbeit dA ist nach § 52

$$dA = k\, i\, dt.$$

Um die Arbeit während einer halben Periode zu finden, haben wir die obigen Ausdrücke für k und i einzusetzen und von 0 bis $\frac{\tau}{2}$ zu integrieren; also

$$A = \int_0^{\frac{\tau}{2}} k\, i\, dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{K} \sin \omega t \cdot \mathfrak{J} \sin(\omega t - \varphi)\, dt.$$

Durch Anwendung einer bekannten trigonometrischen Formel[1]) ergibt sich

[1]) $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$.

$$A = \mathfrak{K}\,\mathfrak{J}\int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{2}\cos\varphi\,dt - \mathfrak{K}\,\mathfrak{J}\int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{2}\cos(2\omega t - \varphi)\,dt.$$

Das ist

$$A = \frac{\mathfrak{K}\,\mathfrak{J}}{2}\cos\varphi\Big[\,t\,\Big]_0^{\frac{\tau}{2}} - \frac{\mathfrak{K}\,\mathfrak{J}}{2\cdot 2\,\omega}\Big[\sin 2\omega t\Big]_0^{\frac{\tau}{2}}$$

Das letzte Glied wird nach Einsetzung der Grenzen null; daher ist

$$A = \frac{\mathfrak{K}\,\mathfrak{J}}{2}\cos\varphi\cdot\frac{\tau}{2}.$$

Daraus ergibt sich die Arbeit in einer Zeiteinheit, das ist die Leistung P, wenn man durch $\frac{\tau}{2}$ dividiert.

Also

$$P = \frac{\mathfrak{K}\,\mathfrak{J}}{2}\cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad (115)$$

Dividiert man $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{J}$, jedes durch den Scheitelfaktor der Sinuswelle $\sqrt{2}$, so erhält man die effektiven Werte K und J (§ 131) und es ist

$$P = K J \cos\varphi \quad \ldots\ldots \quad (116)$$

Und die Arbeit während einer Zeit t ist

$$A = K J t \cos\varphi,$$

wenn t ein Vielfaches einer halben Periode ist, weil in der obigen Ableitung das zweite Glied nur für eine halbe Periode null wird.

Gegenüber der Leistung und Arbeit eines konstanten, gleichgerichteten Stromes (§ 52) kommt also bei Wechselstrom noch der Faktor $\cos\varphi$ hinzu. Man bezeichnet daher $\cos\varphi$ als Leistungsfaktor. Die Leistung und Arbeit ist um so kleiner, je größer die Phasenverschiebung φ ist, weil $\cos\varphi$ mit zunehmendem φ abnimmt. Die folgenden Abbildungen werden dies erläutern. Die erste (Abb. 166) stellt einen Wechselstrom ohne Phasenverschiebung dar. Die Arbeit ist in jedem Augenblicke durch das Produkt aus den gleichzeitigen Werten von k und i gegeben. Die ganze Arbeit während einer Periode ist daher gleich der schraffierten Fläche.

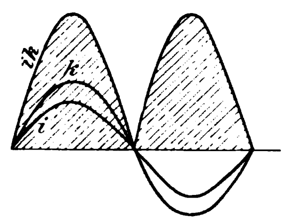


Abb. 166.

Betrachten wir nun einen Strom, der gegenüber seiner Spannung um 45° verzögert ist (Abb. 167). Man sieht, daß das Produkt ki, wenn es positiv ist, durch die schraffierten Flächen über der Abszissenachse und, wenn es negativ ist, durch die schraffierten Flächen unter derselben dargestellt wird. Im ersten Falle ist die Arbeit positiv, im zweiten negativ. Die gesamte Arbeit ist gleich der algebraischen Summe dieser, also kleiner wie im vorigen Falle.

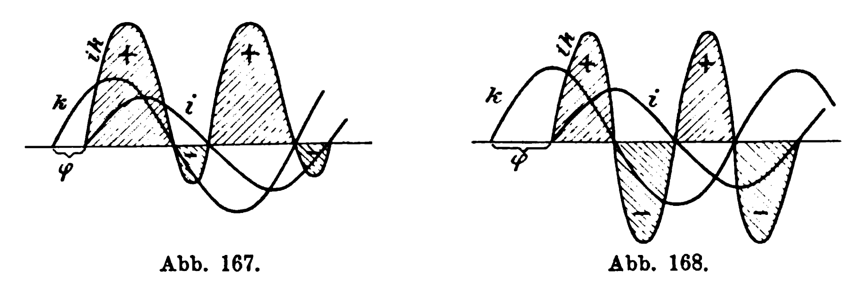


Abb. 167. Abb. 168.

Nehmen wir nun an, ein Strom wäre um 90° gegenüber der Spannung verzögert (Abb. 168). Dieser Fall ist zwar nicht möglich, aber man kann ihm sehr nahe kommen, wenn $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{w}$ sehr groß ist. In diesem Falle sind die positiven und negativen Flächen gleich groß, also die Arbeit während einer halben Periode gleich Null.[1]

Besteht die von einem Wechselstrom geleistete Arbeit nur aus Stromwärme, d. h. sind keine sekundären Ströme und keine magnetischen Verluste (Hysterese) vorhanden, so folgt Gl. 116 auch aus dem in § 131 für die Wärmeleistung erhaltenen Ausdruck

$$P = w J^2,$$

wenn man J^2 in $J \cdot J$ zerlegt und für ein J die Gl. 114 einführt. Es ist dann

$$P = K J \cos \varphi.$$

Für diesen Fall folgt aus der vorletzten Gleichung

$$w = \frac{P}{J^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

[1]) Positive und negative Arbeit ist nicht wie bei Kräften als Richtung zu verstehen, da die Arbeit keine Richtung hat, sondern positive Arbeit ist die von den Kräften des Systems geleistete, negative Arbeit hingegen die gegen die Kräfte des Systems geleistete. Bei einem Motor z. B. äußert sich dies darin, daß er, solange das Produkt ki negativ ist, nicht als Motor, sondern als Dynamo wirkt und auf Kosten der vorher erhaltenen Bewegungsenergie Strom erzeugt.

d. h. man kann den Ohmschen Widerstand aus einer Messung der Leistung und der Stromstärke ermitteln, aber nicht wie bei Gleichstrom aus einer Messung der Spannung und Stromstärke.

135. Das Spannungsdiagramm.

In § 133 haben wir zwei Formen für das auf effektive Werte bezogene Ohmsche Gesetz bei Wechselstrom gefunden, nämlich

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}}$$

oder

$$J = \frac{K \cos \varphi}{w}.$$

Die letzte Form des Ausdruckes für J bringt den physikalischen Vorgang besser zum Ausdruck als die andere, die den scheinbaren Widerstand enthält. Denn in Wahrheit erleidet der Widerstand keine Veränderung, und auch das Ohmsche Gesetz muß in jedem Augenblicke für gleichzeitige Werte Geltung haben. Der Einfluß der Selbstinduktion ist vielmehr der, daß sie eine EMK verursacht, welche der Klemmenspannung in jedem Augenblicke entgegenwirkt, sie also schwächt. Dies kommt zum sichtbaren Ausdruck, wenn man die Spannungsgleichung (105) in der Form

$$iw = k - L\frac{di}{dt}$$

schreibt. Die rechte Seite dieser Gleichung stellt die resultierende Spannung dar, auf die das Ohmsche Gesetz in seiner wirklichen Form anzuwenden ist. Der effektive Wert, auf den das Ohmsche Gesetz zur Anwendung kommt, ist daher auch nicht K, sondern $K \cos \varphi$, wie die obige Gleichung zeigt.

Quadriert man die erste der obigen Gleichungen, so erhält man

$$K^2 = w^2 J^2 + \omega^2 L^2 J^2$$

als Beziehung zwischen den effektiven Werten der Spannungen, denn wJ ist der dem Ohmschen Widerstand entsprechende Spannungsabfall, den wir mit E_w bezeichnen wollen, und $\omega L J$ ist nach § 132 die EMK der Selbstinduktion E. Man hat also

$$K^2 = E_w^2 + E^2.$$

Demnach ist K die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten E_w und E sind (Abb. 169). Der Winkel zwischen K und E_w ist der Phasenverschiebungswinkel φ, der auch im Wider-

standsdreieck (Abb. 165) vorkommt. Multipliziert man jede Seite des letzteren mit J, so geht es in das Spannungsdreieck (Abb. 169) über. Aus dem letzteren ergibt sich

$$E = K \sin \varphi$$

$$E_w = K \cos \varphi.$$

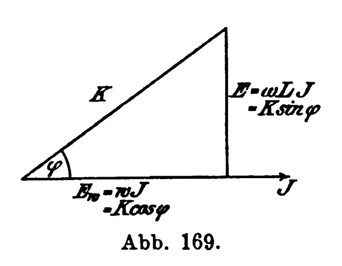


Abb. 169.

Im vorigen Paragraph haben wir für die Leistung eines Wechselstromes den Ausdruck

$$P = JK \cos \varphi$$

erhalten. Führen wir E_w ein, so ist

$$P = JE_w.$$

Demnach ist an der Leistung und Arbeit eines Wechselstromes nur die Komponente E_w der Spannung beteiligt, weshalb sie häufig auch als elektromotorische Nutzkraft bezeichnet wird, während die andere Komponente E keinen Anteil an der Leistung hat.

Will man den Strom J in das Spannungsdiagramm einzeichnen, so muß er mit E_w in der Richtung zusammenfallen, weil die Phasenverschiebung φ zwischen K und J dieselbe ist, wie zwischen K und E_w. Man kommt so zu der Regel, daß das Produkt der in gleicher Phase liegenden Größen gleich der Leistung ist, während die Größen, die eine Phasenverschiebung von 90^0 gegeneinander haben, wie hier J und $K \sin \varphi$, keine Leistung geben.

136. Das Stromdiagramm. Wattstrom und wattloser Strom.

Zerlegt man den Strom J in zwei zu einander senkrechte Komponenten nach dem Phasenwinkel φ (Abb. 170), so ist die eine $J \sin \varphi$, die andere $J \cos \varphi$. Dann erscheint die Leistung $KJ \cos \varphi$ als Produkt der Klemmenspannung und der dem Winkel φ anliegenden Stromkomponente. Da die Leistung nach dem praktischen Maßsystem in Watt gemessen wird, so bezeichnet man diese Komponente als Wattkomponente, oder Wattstrom. Dagegen hat die andere Komponente $J \sin \varphi$ keinen Anteil an der Leistung, weshalb man sie als wattlose Komponente oder wattlosen Strom bezeichnet.

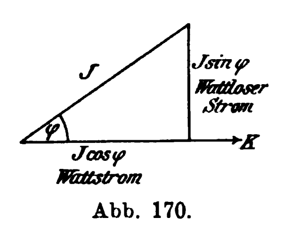


Abb. 170.

Will man die Klemmenspannung in dieses Stromdiagramm einzeichnen, so muß sie mit der Wattkomponente in der Richtung

zusammenfallen, weil die Phasenverschiebung zwischen K und J gleich φ ist. Man kommt so wieder zu derselben Regel wie im vorigen Paragraph, daß das Produkt der in gleicher Phase liegenden Größen gleich der Leistung ist, während die Größen, die eine Phasenverschiebung von 90^0 gegeneinander haben, wie hier K und $J \sin\varphi$, keine Leistung geben.

137. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Es ist zu beachten, daß die beiden letzten Paragraphen gegenüber den vorhergehenden keine neuen Tatsachen enthalten, sondern nur zwei andere Arten, den Einfluß der Selbstinduktion darzustellen. Wir haben also drei Arten der Darstellung:

Erstens: Strom und Spannung werden als effektive Werte, wie sie von Wechselstrommeßinstrumenten angegeben werden, betrachtet. Dann lautet das Ohmsche Gesetz für sie

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}}$$

und die Leistung ist gleich dem Produkt aus Strom, Spannung und Leistungsfaktor ($P = JK \cos\varphi$).

Zweitens: Die Spannung wird in zwei Komponenten, nämlich $K \sin\varphi$ und die elektromotorische Nutzkraft $K \cos\varphi$ zerlegt, während der Strom unverändert bleibt. Dann lautet das Ohmsche Gesetz

$$J = \frac{K \cos\varphi}{w}$$

und die Leistung ist gleich dem Produkt aus Strom und elektromotorischer Nutzkraft.

Drittens: Der Strom wird in zwei Komponenten zerlegt, nämlich den wattlosen Strom $J \sin\varphi$ und den Wattstrom $J \cos\varphi$, während die Spannung unverändert bleibt. Dann ist die Leistung gleich dem Produkt aus Spannung und Wattstrom.

Falsch wäre es, die elektromotorische Nutzkraft und den Wattstrom gleichzeitig zur Darstellung der Erscheinungen zu verwenden.

Beispiel. Eine Spule, deren Ohmscher Widerstand $w = 30$ ist, wird an eine Klemmenspannung von 75 V. angeschlossen, und dabei wurde ein Strom von 1,5 A. gemessen. Dann ist der scheinbare Widerstand der Spule

$$\sqrt{w^2 + (\omega L)^2} = \frac{K}{J} = \frac{75}{1,5} = 50 \text{ Ohm.}$$

Mithin ist der induktive Widerstand

$$\omega L = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{2500 - 900} = \sqrt{1600} = 40.$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich aus

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{w} = \frac{40}{30} = 1,33.$$

$$\varphi = 53^{\circ}\,7',$$

also ist der Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0,6$.

Ist die Periodenzahl $\nu = 48$, so ist $\omega = 300$ und der Koeffizient der Selbstinduktion

$$L = \frac{40}{300} = 0,133 \text{ Henry}.$$

Die Leistung des Stromes ist

$$P = KJ\cos\varphi = 75\cdot 1,5\cdot 0,6 = 67,5 \text{ Watt}.$$

Da in diesem Stromkreis nur Wärmearbeit geleistet wird, so muß sich dieselbe ergeben aus

$$wJ^2 = 30\cdot 1,5^2 = 30\cdot 2,25 = 67,5 \text{ Watt}.$$

Besteht der Stromkreis aus einer Spule, deren Windungszahl $N = 500$ ist, so kann ihre Kraftlinienmenge aus der EMK berechnet werden. Diese ist gleich dem Produkt aus induktivem Widerstand und Stromstärke (Gl. 109)

$$E = \omega L J = 40\cdot 1,5 = 60$$

und daraus (nach Gl. 106)

$$\mathfrak{Z} = \frac{E\cdot 10^8}{4,44\cdot\nu N} = \frac{60\cdot 10^8}{4,44\cdot 48\cdot 500} = 56\,300.$$

Will man nicht erst den induktiven Widerstand ausrechnen, so ergibt sich die EMK ohne weiteres aus $K^2 = E_w{}^2 + E^2$. Da $E_w = wJ = 30\cdot 1,5 = 45$ ist, so ist

$$E = \sqrt{K^2 - E_w{}^2} = \sqrt{75^2 - 45^2} = \sqrt{5625 - 2025} = \sqrt{3600} = 60.$$

Der Wert für $\mathfrak{Z}$ ergibt sich auch aus Gl. 108, nämlich

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{2}\,\frac{L}{N}\,J\cdot 10^8 = 1,41\,\frac{0,133}{500}\,1,5\cdot 10^8 = 56\,300.$$

Die Wattkomponente des Stromes ist

$$J\cos\varphi = 1,5\cdot 0,6 = 0,9 \text{ A.}$$

und die wattlose Komponente

$$J\sin\varphi = 1,5\cdot 0,8 = 1,2 \text{ A.}$$

138. Drosselspulen.

Spulen (Solenoide) mit oder ohne Eisenkern, deren induktiver Widerstand neben dem Ohmschen nicht vernachlässigt werden kann, bezeichnet man als Drosselspulen. Der Name ist vom Drosselventil hergenommen, weil der induktive Widerstand den Widerstand des Stromkreises vergrößert, ohne den Verlust durch Stromwärme zu vergrößern. Während man also bei Gleichstrom einen gewissen

Spannungsabfall wJ nur dadurch erzeugen kann, daß man durch Einschaltung eines Widerstandes w auch die entsprechende Stromwärme wJ^2 mit in Kauf nimmt, ist man bei Wechselstrom in der Lage, einen beliebigen Spannungsabfall $J\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}$ zu erzielen, ohne eine größere Stromwärme als wJ^2 in Kauf nehmen zu müssen.

Bei den in der Praxis angewendeten Drosselspulen liegt der Fall fast immer so, daß der Ohmsche Widerstand klein ist gegenüber dem induktiven. Es ist von Wichtigkeit, sich für diesen Fall das unterschiedliche Verhalten bei Gleichstrom und Wechselstrom klar zu machen. Für Gleichstrom haben wir nur ein Grundgesetz, aus dem wir die Kraftlinienmenge erhalten können, nämlich

$$\mathfrak{Z} = \frac{0{,}4\pi \mathfrak{J} N}{\mathfrak{w}}.$$

Setzen wir konstante Klemmenspannung an der Spule voraus, so nimmt unter sonst gleichen Verhältnissen, also insbesondere bei konstantem Ohmschen Widerstand die Kraftlinienmenge mit der Windungszahl N zu. Bei Wechselstrom haben wir außerdem noch folgende Beziehung

$$\mathfrak{Z} = \frac{E}{4{,}44\nu N} \cdot 10^8,$$

wenn E die EMK der Selbstinduktion bedeutet. Da wir vorausgesetzt haben, daß der Ohmsche Widerstand klein ist gegenüber dem induktiven, so können wir näherungsweise die Klemmenspannung statt der EMK setzen. Es folgt dann aus dieser Gleichung, daß die Kraftlinienmenge mit zunehmender Windungszahl abnimmt; also entgegengesetzt wie bei Gleichstrom. Andererseits muß aber auch das erste Grundgesetz für jeden Augenblick gelten. Der anscheinende Widerspruch klärt sich dadurch auf, daß durch die Vermehrung der Windungen trotz konstantem Ohmschen Widerstand die Selbstinduktion wächst, und daher die Stromstärke abnimmt. Um die Stromstärke konstant zu halten wie bei Gleichstrom, müßte die Klemmenspannung entsprechend der Vergrößerung der Selbstinduktion vergrößert werden, weil sie bei Wechselstrom nicht nur den Ohmschen Spannungsabfall, sondern auch die EMK kompensieren muß.

Hat die Drosselspule im Bereich ihres magnetischen Feldes einen ferromagnetischen Körper (z. B. einen Eisenkern), bei dessen wechselnder Magnetisierung Verluste eintreten (Wirbelströme und Hysterese), so gelten dafür die Gesetze eines einzelnen Wechselstromes nur näherungsweise. Strenge genommen gelten dann die Gesetze der gegenseitigen Induktion (vgl. § 164).

139. Graphische Darstellung der Wechselstromgrößen durch Vektoren.

Alle in der Physik vorkommenden Größen lassen sich in zwei Gruppen einteilen. Die der einen Gruppe sind durch die zahlenmäßige Angabe ihrer Größe vollständig bestimmt und können daher bedingungslos algebraisch addiert oder subtrahiert werden; hierher gehören alle Arbeitsgrößen. Treten z. B. in demselben Körper zwei verschiedene Wärmequellen auf (z. B. Wirbelströme und Hysterese in einem Eisenkern), so ist die gesamte Wärme gleich ihrer Summe. Die der anderen Gruppe haben außer ihrer Größe auch noch eine gewisse Richtung, und sie sind daher nur dann vollständig bestimmt, wenn Größe und Richtung angegeben sind. Man nennt sie daher Vektorgrößen oder Vektoren. Hierher gehören z. B. alle Kräfte. Bei den Vektorgrößen kann eine algebraische Addition oder Subtraktion nur stattfinden, wenn sie gleiche Richtung haben. Ist dies nicht der Fall, so ist ihre gesamte Wirkung eine resultierende, die gleich der Diagonale R (Abb. 171) des aus beiden Größen F_1 und F_2 gebildeten Parallelogramms. Die Richtung der beiden Größen ist durch den Neigungswinkel α_1 bzw. α_2 gegen eine feste Gerade X gegeben. Durch den entsprechenden Winkel β ist dann die Richtung der Resultierenden bestimmt. Zur Konstruktion des Parallelogrammes braucht man natürlich nur den Winkel zwischen den beiden Größen $\alpha_2 - \alpha_1$.

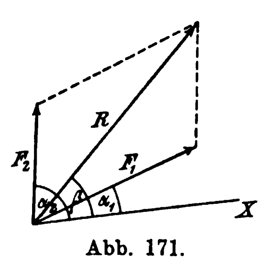


Abb. 171.

Genau dasselbe gilt für die Scheitelwerte und die effektiven Werte der Wechselstromgrößen (Strom, Spannung, Kraftlinienmenge), wenn man an Stelle der Richtungswinkel die Phasenwinkel setzt. Wir haben zwei solche Fälle im Spannungsdiagramm und im Stromdiagramm gehabt.

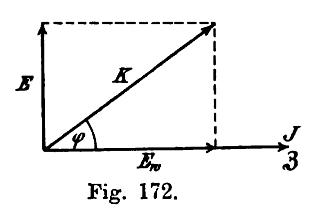


Fig. 172.

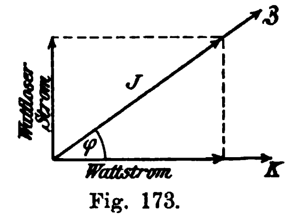


Fig. 173.

Im ersten (Abb. 169) ist die Klemmenspannung nichts anderes als die Resultierende von E_w und E, die einen Phasenwinkel von 90^0 miteinander einschließen, wie Abb. 172 zeigt. Jene Figur ist die Hälfte von dieser. Sollen Stromstärke J und magnetisches

Feld $\mathfrak{Z}$ in dieses Diagramm eingezeichnet werden, so ergibt sich ihre Lage daraus, daß Strom und Feld mit der elektromotorischen Nutzkraft E_w in der Phase zusammenfallen.

Ebenso ist das Stromdreieck Abb. 170 nichts anderes als die Hälfte der Abb. 173, wonach der gesamte Strom J die Resultierende aus dem Wattstrom und dem wattlosen Strom ist. Will man die Klemmenspannung K und das Feld $\mathfrak{Z}$ einzeichnen, so ergibt sich ihre Lage daraus, daß die Klemmenspannung mit dem Wattstrom und das magnetische Feld mit dem Strom J zusammenfällt.

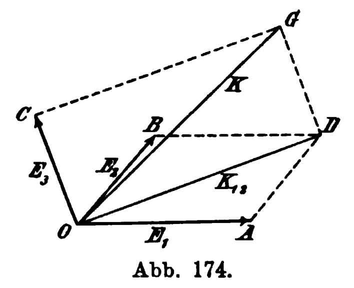


Abb. 174.

Wirken in einem Stromkreis drei Spannungen E_1, E_2, E_3 von verschiedener Phase (Abb. 174), so ergibt sich die resultierende Spannung K in derselben Weise, wie die Resultierende von drei Kräften. Man hat zunächst die Resultierende K_{12} von zweien zu bilden und dann die Resultierende K aus dieser und der dritten Spannung.

Betrachtet man die geschlossene Figur $OADG$, so sieht man, daß ihre Seiten aus den drei Spannungen und ihrer Resultierenden bestehen. Man kann also bei der Konstruktion auch so verfahren, daß man alle Komponenten der Lage und Größe nach derart aneinanderreiht, daß der Anfang eines Vektors an das Ende des vorhergehenden stößt. Die Linie, welche die Figur schließt, ist dann die Resultierende.

Das Vorstehende gilt natürlich, wie schon bemerkt, nur für Scheitelwerte und effektive Werte der Wechselstromgrößen. Für Augenblickswerte gilt, daß die gleichzeitig auftretenden Werte einfach algebraisch zu addieren sind.

140. Scheinbarer Widerstand bei Hintereinanderschaltung.

Befinden sich in einem Stromkreise (Abb. 175) zwei Leiterstücke mit den Widerständen w_1, w_2 und den Selbstinduktionen L_1, L_2 in Hintereinanderschaltung und bedeuten U_1, U_2, U_3 die Potentialwerte an den Endpunkten, so ist der gesamte Widerstand zwischen den Punkten U_1 und U_3 gleich $w_1 + w_2 = w$ und die gesamte Selbstinduktion gleich $L_1 + L_2 = L$. Dann ist nach Gl. 110

Abb. 175.

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{K}{\sqrt{(w_1 + w_2)^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2}} \qquad (118)$$

wenn K den effektiven Wert der Potentialdifferenz $U_1 - U_3$ (Spannung) bedeutet.

Die Phasenverschiebung zwischen J und K ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{w} = \frac{\omega(L_1 + L_2)}{w_1 + w_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Betrachtet man aber die beiden Leiterstücke für sich und bezeichnet mit K_1 bzw. K_2 die Potentialdifferenzen $U_1 - U_2$ bzw. $U_2 - U_3$, so gilt für das eine Leiterstück

$$J = \frac{K_1}{\sqrt{w_1^2 + \omega^2 L_1^2}}$$

und für das andere

$$J = \frac{K_2}{\sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}}.$$

Die Phasenverschiebung zwischen J und K_1 ist

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\omega L_1}{w_1}$$

und zwischen J und K_2

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\omega L_2}{w_2}.$$

Vergleicht man die vorstehenden drei Ausdrücke für J untereinander, so sieht man, daß der gesamte scheinbare Widerstand nicht gleich ist der Summe aus den scheinbaren Widerständen beider Leiterstücke, sondern daß er aus der Summe der Ohmschen Widerstände und der Summe der Selbstinduktionskoeffizienten so gebildet wird, wie bei einem einzelnen Leiterstück.

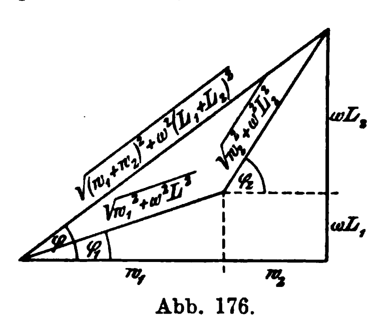


Abb. 176.

Graphisch ist dieser Fall durch das Widerstandsdreieck (Abb. 176) dargestellt. Bei näherer Überlegung ist dies selbstverständlich, denn jeder Widerstand und jede Selbstinduktion ist eine Summe aus hintereinandergeschalteten Leiterelementen, von denen jedes Widerstand und Selbstinduktion besitzt, wobei die Summe der Widersände und die Summe der Selbstinduktionen für sich gebildet wird, und nicht die Summe der scheinbaren Widerstände aller Elemente.

Aus der Vergleichung der Phasenverschiebungen ersieht man, daß zwischen dem Strome und den drei Klemmenspannungen K,

K_1, K_2 verschiedene Phasenverschiebungen bestehen. Da aber die Stromstärke überall dieselbe ist, so folgt daraus, daß die Summe der effektiven Klemmenspannungen $K_1 + K_2$ nicht gleich K sein kann, obgleich für die Augenblickswerte die Bedingung $k_1 + k_2 = k$ gilt. Die graphische Darstellung dieser Verhältnisse zeigt Abb. 177. Ist OJ der Vektor des Stromes, so ist K_1 unter dem Winkel φ_1 in der Richtung des Uhrzeigers einzutragen, weil die Spannung dem Strome voreilt. In gleicher Weise ist K_2 mit dem Winkel φ_2 einzutragen. Die Resultierende aus beiden gibt Größe und Phasenverschiebung der ganzen Klemmenspannung.

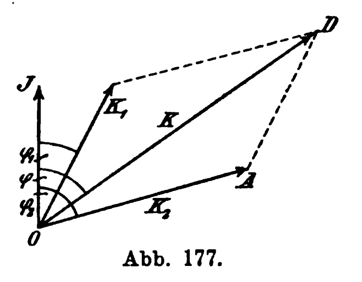


Abb. 177.

Auch hier sieht man, daß die drei Spannungen, nämlich K_1, K_2 und die Resultierende K eine geschlossene Figur OAD bilden.

Nur in einem Falle ist $K = K_1 + K_2$, nämlich wenn

$$\frac{L_1}{w_1} = \frac{L_2}{w_2},$$

denn dann ist $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Ebenso wenn $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$, denn dann sind alle Phasenverschiebungen null wie bei Gleichstrom.

141. Die Verzweigung eines veränderlichen Stromes.

Teilt sich ein veränderlicher Strom in zwei Zweigströme (Abb. 178) mit den Augenblickswerten i_1 und i_2 bzw. den effektiven Werten J_1 und J_2, so ist die Verteilung der letzteren eine andere, als die der ersteren.

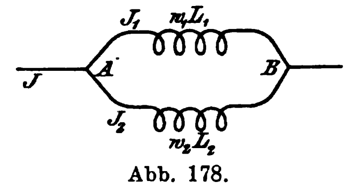


Abb. 178.

Bezeichnet man die Potentialdifferenz zwischen den Punkten AB mit k bzw. K, so ist

$$J_1 = \frac{K}{\sqrt{w_1^2 + \omega_2 L_1^2}} \qquad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{w_1}$$

$$J_2 = \frac{K}{\sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}} \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L_2}{w_2}.$$

Daraus folgt:

$$J_1 : J_2 = \sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2} : \sqrt{w_1^2 + \omega^2 L_1^2} \quad . \quad (120)$$

d. h. die effektiven Stromstärken verhalten sich umgekehrt wie die scheinbaren Widerstände.

Der Phasenverschiebungswinkel β zwischen den beiden Zweigströmen ist

$$\beta = \varphi_1 - \varphi_2$$

oder:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = \omega \frac{w_2 L_1 - w_1 L_2}{w_1 w_2 + \omega^2 L_1 L_2} \qquad (121)$$

Da φ_1 und φ_2 Phasenverspätungen bedeuten, so ist β dann auch eine Phasenverspätung, wenn φ_1 größer ist als φ_2. Dann ist also J_1 gegen J_2 verspätet. Ist aber β negativ, so ist J_2 gegen J_1 verspätet. Ist $\frac{L_1}{w_1} = \frac{L_2}{w_2}$, so ist $\varphi_1 = \varphi_2$; d. h. die Phasenverschiebungen in beiden Zweigen sind einander gleich, und daher auch $\beta = 0$.

Anders lautet dies Verhältnis für die Augenblickswerte. Nach § 132 müssen für die Zweige folgende Gleichungen gelten:

$$k = i_1 w_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$k = i_2 w_2 + L_2 \frac{di_2}{dt},$$

daraus folgt:

$$i_1 w_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = i_2 w_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

als Bedingungsgleichung für das Verhältnis der beiden Zweigströme in jedem Augenblick. Außerdem muß in jedem Augenblick das erste Kirchhoffsche Gesetz $i = i_1 + i_2$ gelten, weil an den Verzweigungspunkten AB weder ein Verlust noch eine Anhäufung von Elektrizität eintreten kann.

Sind die beiden Zweige ohne Selbstinduktion, also $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, so lautet die erste Bedingungsgleichung $i_1 w_2 = i_2 w_1$, also wie bei Gleichstrom.

Integriert man die Gl. 122 von 0 bis t:

$$w_1 \int_0^t i_1 \, dt + L_1 \int_0^t \frac{di_1}{dt} dt = w_2 \int_0^t i_2 \, dt + L_2 \int_0^t \frac{di_2}{dt} dt$$

und sind die während einer gewissen Zeit durch die Zweigströme gelieferten Elektrizitätsmengen Q_1 und Q_2 gemäß Gl. 97, so ist

$$w_1 Q_1 + [L_1 i_1]_0^t = w_2 Q_2 + [L_2 i_2]_0^t.$$

Bezieht sich diese Gleichung auf eine oszillatorische Entladung (§ 189), so ist die gesamte Ladung $Q = Q_1 + Q_2$. Ist zur Zeit t schon die ganze Entladung vorüber, so ist jetzt ebenso wie zur Zeit Null die Stromstärke in beiden Zweigen Null, und die Gleichung geht über in $w_1 Q_1 = w_2 Q_2$.

Dasselbe gilt für einen Wechselstrom, wenn t ein Vielfaches von einer halben Periode ist und zwischen i_1 und i_2 keine Phasenverschiebung besteht; denn dann haben beide Ströme am Anfang und Ende der Zeit t gleiche Werte; das ist also nach dem obigen dann der Fall, wenn

$$\frac{L_1}{w_1} = \frac{L_2}{w_2}.$$

142. Der scheinbare Widerstand einer Stromverzweigung.

Der gesamte Strom, der von einer zwischen den Punkten AB (Abb. 178) herrschenden Spannung $k = \mathfrak{K} \sin \omega t$ durch eine Stromverzweigung getrieben wird, ist

$$i = \frac{\mathfrak{K}}{W_s} \sin(\omega t - \varphi),$$

wenn W_s den gesamten scheinbaren Widerstand der Verzweigung bedeutet. Es ist dies jener scheinbare Widerstand, den ein einfacher Stromleiter haben müßte, wenn er die beiden Zweige ersetzen soll. φ ist die Phasenverschiebung des gesamten Stromes $\mathfrak{J}$ gegen die Spannung $\mathfrak{K}$.

Es gelten nach dem vorigen Paragraphen folgende Gleichungen:

$$k = i_1 w_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

$$k = i_2 w_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad \ldots \ldots \quad \text{(II)}$$

$$i = i_1 + i_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(III)}$$

Daraus haben wir eine Gleichung zu bilden, die bloß i enthält.

Differentiert man die letzte nach t, so ist

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \quad \ldots \ldots \quad \text{(IV)}$$

Setzt man III und IV in II ein, so wird

$$k = i w_2 - i_1 w_2 + L_2 \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di_1}{dt} \quad \ldots \quad \text{(V)}$$

Eliminiert man aus dieser und I zuerst i_1 und dann $\frac{di_1}{dt}$, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{di_1}{dt}(w_1 L_2 - w_2 L_1) = -k(w_1 + w_2) + w_1 w_2 i + w_1 L_2 \frac{di}{dt},$$

$$i_1 (w_1 L_2 - w_2 L_1) = k(L_1 + L_2) - w_2 L_1 i - L_1 L_2 \frac{di}{dt}.$$

Differenziert man die letzte nach t, so folgt aus dieser und der vorletzten:

$$L_1 L_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + (w_1 L_2 + w_2 L_1)\frac{di}{dt} + w_1 w_2 i = (w_1 + w_2) k + (L_1 + L_2)\frac{dk}{dt}.$$

Setzt man in diese die Funktionen i und k und ihre Differentialquotienten ein, so erhält man eine Gleichung, mit der man so verfährt wie in § 133, indem man $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2\omega}$ setzt. So erhält man zwei Gleichungen, aus welchen sich ergibt:

$$W_s = \sqrt{\frac{(w_1^2 + \omega^2 L_1^2)(w_2^2 + \omega^2 L_2^2)}{(w_1 + w_2)^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2}} \quad . \quad . \quad \text{(VI)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L_1 (w_2^2 + \omega^2 L_2^2) + \omega L_2 (w_1^2 + \omega^2 L_1^2)}{w_1 (w_2^2 + \omega^2 L_2^2) + w_2 (w_1^2 + \omega^2 L_1^2)} \quad . \quad \text{(VII)}$$

Die effektive Stromstärke ist also

$$J = \frac{K}{\sqrt{\frac{(w_1^2 + \omega^2 L_1^2)(w_2^2 + \omega^2 L_2^2)}{(w_1 + w_2)^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2}}}$$

Diese Ausdrücke kann man auch in dieselbe Form bringen, wie für einen einfachen Leiter, nämlich:

$$W_s = \sqrt{R^2 + \omega^2 O^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VIII)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega O}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IX)}$$

Dabei bedeutet also R den Ohmschen Widerstand und O den Koeffizienten der Selbstinduktion, den ein einfacher Leiter haben muß, wenn er die Stromverzweigung ersetzen soll. Man kann also R als äquivalenten Widerstand und O als äquivalente Selbstinduktion bezeichnen.

Und zwar ist:

$$R = \frac{A}{A^2 + \omega^2 B^2}, \qquad O = \frac{B}{A^2 + \omega^2 B^2} \quad . \quad \text{(X)}$$

Dabei ist: $A = \frac{w_1}{w_1^2 + \omega^2 L_1^2} + \frac{w_2}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2},$

$$B = \frac{L_1}{w_1^2 + \omega^2 L_1^2} + \frac{L_2}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}.$$

Wie man aus den Gl. VIII — X ersieht, lassen sich W_s und $\operatorname{tg}\varphi$ auch in folgende, für die Berechnung einfachere Form bringen:

$$W_s = \frac{1}{\sqrt{A^2 + \omega^2 B^2}}, \quad \ldots\ldots \quad (123a)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega B}{A} \quad \ldots\ldots \quad (123b)$$

Sind die beiden Zweige gleich ($w_1 = w_2 = w$, $L_1 = L_2 = L$), so ist

$$R = \frac{w}{2}, \qquad O = \frac{L}{2},$$

$$W_s = \frac{1}{2}\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{w}.$$

Die graphische Darstellung der Stromverhältnisse zeigt Abb. 179. Ist OK der Vektor der Spannungsdifferenz zwischen den Verzweigungspunkten AB, so ist J_1 unter dem Winkel φ_1 und J_2 unter dem Winkel φ_2 einzutragen. Die Resultierende J aus diesen beiden gibt Größe und Phasenverschiebung des gesamten Stromes. Dieses Stromdiagramm ist ähnlich dem Spannungsdiagramm bei Hintereinanderschaltung (Abb. 177). Das kommt daher, weil sich bei diesem Ströme einer gemeinsamen Spannung, bei jenem aber Spannungen eines gemeinsamen Stromes zusammensetzen. Und wie dort die drei Spannungen, so bilden hier die Zweigströme und der gesamte Strom eine geschlossene Figur OAD.

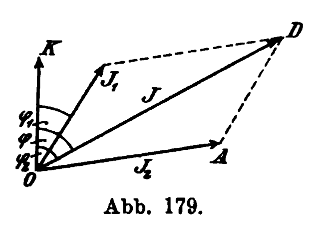


Abb. 179.

Abb. 180 zeigt das Spannungsdiagramm einer Stromverzweigung. $AB = K$ ist die beiden Zweigen gemeinsame Spannung, also die Hypotenuse des für jeden Zweig aus dem Spannungsabfall $E_w = wJ$ und der EMK der Selbstinduktion $E = \omega LJ$ gebildeten rechtwinkligen Dreieckes. Die rechten Winkel derselben müssen

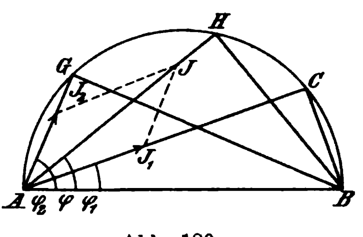


Abb. 180.

Peripheriewinkel des über AB beschriebenen Halbkreises sein. Die Ströme J_1 und J_2 müssen natürlich mit den entsprechenden Katheten E_w zusammenfallen. Konstruiert man daraus die gesamte Stromstärke J, so muß ihr Schnittpunkt mit dem Halbkreis ein rechtwinkliges Dreieck bezeichnen, dessen Katheten $AH = RJ$ und $BH = \omega OJ$ sind.

Die Gleichungen VIII bis X gelten ohne weiteres auch für beliebig viele Stromzweige. Die Ausdrücke für A und B sind dann aus der Summe aller Stromzweige zu bilden, nämlich:

$$A = \sum \frac{w}{w^2 + \omega^2 L^2} \qquad B = \sum \frac{L}{w^2 + \omega^2 L^2}.$$

143. Stromverzweigung in Hintereinanderschaltung mit Widerstand und Selbstinduktion.

Befindet sich eine Stromverzweigung in Hintereinanderschaltung mit einem Stromleiterstück vom Widerstande w und der Selbstinduktion L (Abb. 181), so ergibt sich der gesamte scheinbare Widerstand W_s und die Phasenverschiebung φ des Stromes J gegen die äußere Spannung mit Hilfe der Gl. 125 und 126 und nach § 140 wie folgt

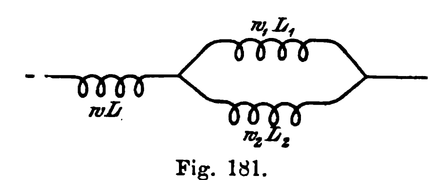


Fig. 181.

$$W_s = \sqrt{(w + R)^2 + \omega^2 (L + O)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega(L + O)}{w + R}.$$

Mit Hilfe dieser und der Gleichungen in den beiden vorhergehenden Paragraphen lassen sich dann die beiden Zweigströme, ihre Phasenverschiebung gegen einander, gegen den Gesamtstrom, gegen die Klemmenspannung, sowie gegen die Spannung zwischen den beiden Verzweigungspunkten berechnen.

Zehntes Kapitel.

Gegenseitige Induktion zweier Stromkreise.

144. Das Verhältnis der elektromotorischen Kräfte.

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt die Erscheinungen untersucht, die in einer von Wechselstrom durchflossenen Spule statthaben. Bringt man über oder neben dieser Spule eine zweite an, welche das von der ersten Spule erzeugte magnetische Feld $\mathfrak{z} = \mathfrak{Z} \sin \omega t$ umschließt, so wird in jeder Windung sowohl der ersten wie der zweiten Spule eine EMK induziert, welche nach § 125 gleich $-\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ ist. Diese Anordnung findet sich beim Transformator, Induktionsmotor, Funkeninduktor u. dgl.; man bezeichnet sie als „Transformator" im weitesten Sinne. Hat die erste Spule, die an die Stromquelle angeschlossen ist, und die man daher als primäre bezeichnet, N_1 Windungen, die zweite, die man als sekundäre bezeichnet, N_2 Windungen, so ist die primäre EMK

$$e_1 = - N_1 \frac{d\mathfrak{z}}{dt}$$

und die sekundäre EMK

$$e_2 = - N_2 \frac{d\mathfrak{z}}{dt}$$

Daraus folgt ohne weiteres, daß sich die EMKe so verhalten wie die Windungszahlen. Das gilt nicht nur für die gleichzeitigen Augenblickswerte, sondern auch für die Scheitelwerte und die effektiven Werte weil ja nach Gl. 93

$$\mathfrak{E}_1 = \omega N_1 \mathfrak{Z}$$

$$\mathfrak{E}_2 = \omega N_2 \mathfrak{Z}$$

also
$$\frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{E}_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{N_2}{N_1} = ü \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

Man nennt dieses Verhältnis $ü$ das Übersetzungsverhältnis.

Es ist zu beachten, daß das Verhältnis der EMKe nur dann gleich dem Verhältnis der Windungszahlen $ü$ ist, wenn beide Spulen dieselbe Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$ umschließen, d. h. wenn keine magnetische Streuung auftritt. Praktisch ist das mit sehr großer Annäherung zu erreichen, wenn beide Spulen über einen und denselben Eisenkern gewickelt sind, wie z. B. in Abb. 182a, wo die Spulen übereinander, und in Abb. 182b, wo die Spulen nebeneinander angeordnet sind. Beide Anordnungen werden bei den eigentlichen Transformatoren und Funkeninduktoren angewendet, während bei den Induktionsmotoren die primäre und sekundäre Wickelung auf verschiedenen Eisenkörpern (Ständer und Läufer) sitzen.

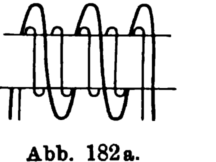


Abb. 182a.

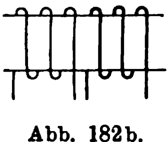


Abb. 182b.

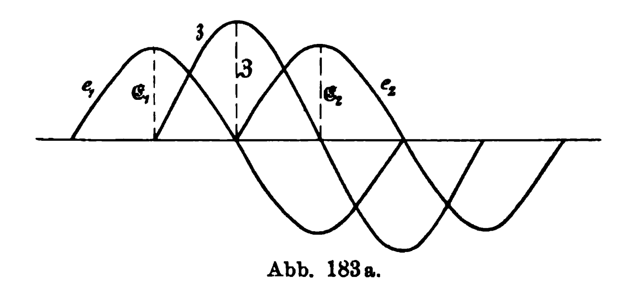


Abb. 183a.

Will man die beiden EMKe und das magnetische Feld durch ihre Wellenlinien darstellen, so hat man in Abb. 159 nur noch die sekundäre EMK e_2 einzuzeichnen, und zwar in gleicher Phase mit e, weil beide von demselben Differentialquotienten $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ bestimmt werden. Da man aber bei der Untersuchung von Transformatoren immer von der Klemmenspannung der Stromquelle, an welche die primäre Wickelung angeschlossen ist, ausgeht, so geht man auch bei der primären EMK von der entgegengesetzt gerichteten aus, d. h. von jener Komponente der Klemmenspannung, welche der in der Spule induzierten EMK das Gleichgewicht zu halten hat. Diese erscheint also um

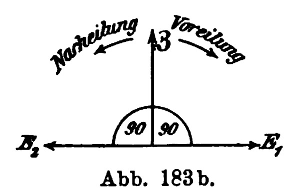


Abb. 183b.

180^0 in der Phase gegen die sekundäre EMK verschoben, so daß sich die Abb. 183a ergibt. Zeichnet man die Scheitelwerte oder die effektiven Werte als Vektoren im Sinne des § 139 auf, so erhält man die Abb. 183. Man sieht, daß bei dieser Darstellung die Phase des magnetischen Feldes $\mathfrak{Z}$ gerade in der Mitte zwischen den beiden EMK liegt, so daß die primäre EMK dem magnetischen Felde um 90^0 voreilt und die sekundäre EMK dem Felde um 90^0 nacheilt. Voreilende Vektoren werden im folgenden immer im Sinne der Uhrzeigerdrehung, nacheilende oder verspätete Vektoren im entgegengesetzten Drehungssinne eingezeichnet.

145. Die primäre und sekundäre Spannungsgleichung.

Gehen wir von der primären Klemmenspannung:

$$k_1 = \mathfrak{K}_1 \sin \omega t$$

aus, so müssen wir den primären Strom durch:

$$i_1 = \mathfrak{J}_1 \sin (\omega t - \varphi_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

darstellen, denn nach § 133 hat ein Wechselstrom gegen seine Klemmenspannung eine Phasenverschiebung, die wir hier mit φ_1 bezeichnen. Da die sekundäre EMK um 180^0 gegen die primäre verspätet ist, so muß bei geschlossenem sekundären Stromkreis der sekundäre Strom gegen die primäre Klemmenspannung auch eine Phasenverspätung haben, deren Winkel wir mit ψ bezeichnen. Es ist also

$$i_2 = \mathfrak{J}_2 \sin (\omega t - \psi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

Jeder der beiden Ströme erzeugt ein magnetisches Feld. Ihre Augenblickswerte sind (nach § 105)

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{4\pi i_1 N_1}{\mathfrak{w}_1},$$

$$\mathfrak{z}_2 = \frac{4\pi i_2 N_2}{\mathfrak{w}_2},$$

wenn i_1 und i_2 in absoluten Einheiten ausgedrückt werden.

Lagern sich beide Felder vollständig übereinander, d. h. wird jedes der beiden von beiden Wickelungen vollständig umschlossen, so sind die magnetischen Widerstände einander gleich: $\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}$, und sie geben zusammen ein gemeinsames Feld $\mathfrak{z}$, das in jedem Augenblicke gleich der Summe beider ist, nämlich:

$$\mathfrak{z} = \frac{4\pi i_1 N_1}{\mathfrak{w}} + \frac{4\pi i_2 N_2}{\mathfrak{w}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

Nun ist nach dem vorigen Paragraphen die primäre EMK

$$-e_1 = N_1 \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{4\pi N_1^2}{\mathfrak{w}} \frac{di_1}{dt} + \frac{4\pi N_1 N_2}{\mathfrak{w}} \frac{di_2}{dt}.$$

Und die sekundäre EMK

$$-e_2 = N_2 \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \frac{4\pi N_2^2}{\mathfrak{w}} \frac{di_2}{dt} + \frac{4\pi N_1 N_2}{\mathfrak{w}} \frac{di_1}{dt}.$$

Den Ausdruck $\frac{4\pi N^2}{\mathfrak{w}}$ kennen wir bereits aus § 120. Es ist der Koeffizient der Selbstinduktion. Entsprechend den beiden Wickelungen setzen wir hier

$$\frac{4\pi N_1^2}{\mathfrak{w}} = L_1$$

$$\frac{4\pi N_2^2}{\mathfrak{w}} = L_{2i}.$$

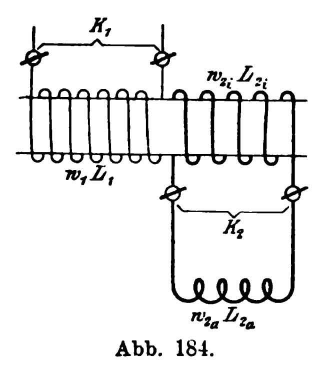


Abb. 184.

Der Index i beim letzten Zeichen bedeutet, daß sich dieser Koeffizient nur auf die N_2 Windungen, also auf den innerhalb des Transformators liegenden Teil des sekundären Stromkreises, der mit dem gemeinsamen Felde $\mathfrak{z}$ verkettet ist, bezieht. Davon zu unterscheiden ist die Selbstinduktion L_{2a} im äußeren Teil des sekundären Stromkreises (Abb. 184). Ebenso muß man unterscheiden zwischen dem inneren Widerstande w_{2i} und dem äußeren w_{2a}. Demnach ist die gesamte Selbstinduktion

$$L_2 = L_{2i} + L_{2a} \quad \ldots \ldots \quad (127a)$$

und der gesamte Widerstand

$$w_2 = w_{2i} + w_{2a} \quad \ldots \ldots \quad (127b)$$

Den sowohl in e_1 als auch e_2 vorkommenden Faktor kennen wir bereits aus § 118. Wir haben ihn dort mit M bezeichnet.

$$\frac{4\pi N_1 N_2}{\mathfrak{w}} = M.$$

Er hat eine ähnliche Bedeutung wie der Koeffizient der Selbstinduktion. Während dieser, mit dem Differentialquotienten des Stromes multipliziert, die im eigenen Stromkreis induzierte EMK

gibt, ist $M\frac{di_2}{dt}$ jener Teil der EMK, welcher von dem sekundären Strom im primären Stromkreis, und $M\frac{di_1}{dt}$ derjenige, der vom primären Strom im sekundären Stromkreis induziert wird. Man sieht jetzt ein, warum M als Koeffizient der gegenseitigen Induktion bezeichnet wird.

Aus den drei letzten Gleichungen ersieht man, daß

$$M^2 = L_1 L_{2i} \quad \ldots \ldots \quad (128a)$$

ist. Das gilt aber nur unter der eingangs gemachten Voraussetzung, daß alle Kraftlinien von sämtlichen Windungen beider Wickelungen umschlossen werden, d. h. daß keine magnetische Streuung besteht. Ist dies nicht der Fall, sondern bildet das gemeinsame magnetische Feld nur einen Teil aller Kraftlinien, so ist

$$M^2 < L_1 L_{2i} \quad \ldots \ldots \quad (128b)$$

Führen wir diese Koeffizienten ein, so ist

$$-e_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (129a)$$

$$-e_2 = L_{2i}\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (129b)$$

Diese Gleichungen stehen mit dem allgemeinen Grundgesetz, wonach die induzierte EMK gleich der Änderung der Kraftlinienmenge nach der Zeit ist (§ 124), in Übereinstimmung, denn nach § 119 ist $i_1 L_1$ die vom Strome i_1 selbst herrührende Kraftlinienmenge. $i_2 M$ ist nach § 117 jene Kraftlinienmenge, welche vom Strome i_2 ausgeht und den primären Stromkreis durchsetzt. Die gesamte vom primären Stromkreis umschlossene Kraftlinienmenge ist also $i_1 L_1 + i_2 M$. Der negative Differentialquotient nach der Zeit gibt den vorstehenden Ausdruck für die primäre EMK e_1. In gleicher Weise ergibt sich für die gesamte vom sekundären Stromkreis umschlossene Kraftlinienmenge $i_2 L_{2i} + i_1 M$. Der negative Differentialquotient gibt den vorstehenden Ausdruck für die sekundäre EMK e_2.

Setzt man die obigen Gleichungen in die allgemeine Spannungsgleichung eines Wechselstromkreises (Gl. 104) ein, so ist für den primären Stromkreis

$$k_1 = i_1 w_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \quad \ldots \quad (130a)$$

und für den sekundären

$$k_2 = i_2 w_{2i} + L_{2i}\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \quad \ldots \quad (130b)$$

Nach Gl. 105 ist entsprechend der Abb. 184 die sekundäre Klemmenspannung

$$k_2 = -i_2 w_{2a} - L_{2a} \frac{d i_2}{dt}.$$

Die beiden Glieder auf der rechten Seite müssen entsprechend der Abb. 183 negativ gesetzt werden, wenn ihre Richtungen mit der im inneren Teile des sekundären Kreises wirkenden Spannung übereinstimmen sollen, im Gegensatz zu Gl. 105 für einen einzelnen Stromkreis, wo die Klemmenspannung eine von außen aufgedrückte ist.

Setzen wir das in Gleichung 130b ein, so ist

$$-i_2 w_{2a} - L_{2a} \frac{d i_2}{dt} = i_2 w_{2i} + L_{2i} \frac{d i_2}{dt} + M \frac{d i_1}{dt}.$$

Daraus folgt mit Hilfe der Gleichungen 127

$$o = i_2 w_2 + L_2 \frac{d i_2}{dt} + M \frac{d i_1}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

Diese Gleichung besagt, daß die Summe aller Spannungen im geschlossenen sekundären Stromkreis null ist, wie nicht anders zu erwarten war, da diesem Stromkreis keine Spannung von außen zugeführt wird.

Ist der sekundäre Stromkreis offen, so ist $i_2 = 0$. Für diesen Fall (Leerlauf eines Transformators) folgt aus Gl. 129b

$$-e_2 = M \frac{d i_1}{dt} \quad \text{und aus Gl. 130b} \quad k_2 = M \frac{d i_1}{dt} = -e_2.$$

Das heißt bei offenem sekundären Kreis ist die sekundäre Klemmenspannung gleich der sekundären EMK. Bei einem normalen Transformator unterscheidet sich in diesem Falle auch die primäre Klemmenspannung nur sehr wenig von der primären EMK, so daß bei Leerlauf auch das Verhältnis der Klemmenspannungen gleich dem Verhältnis der Windungszahlen (Übersetzungsverhältnis $\mathfrak{a}$) (§ 144) gesetzt werden kann (vgl. § 147).

146. Der primäre Strom.

Setzt man in Gl. 130a die Funktionen für k_1, i_1, i_2 wie im Eingang des vorigen Paragraphen ein und löst die Differentialgleichung nach derselben Methode auf wie in § 133, so erhält man

$$i_1 = \mathfrak{J}_1 \sin(\omega t - \varphi_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

dabei ist

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{K}_1}{\sqrt{\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133a)$$

oder, wenn man beiderseits durch den Scheitelfaktor $\sqrt{2}$ dividiert

$$J_1 = \frac{K_1}{\sqrt{\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2}} \quad \ldots \ldots \quad (133b)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega \lambda}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (134)$$

hierin bedeutet

$$\varrho = w_1 + \frac{\omega^2 M^2}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2} w_2 \quad \ldots \ldots \quad (135a)$$

$$\lambda = L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2} L_2 \quad \ldots \quad (135b)$$

Vergleicht man die Ausdrücke für J_1 und φ_1 mit den Gl. 110 und 112 für einen einzelnen Stromkreis (Drosselspule), so sieht man, daß sie dieselbe Form haben, daß aber an Stelle des Ohmschen Widerstandes die Größe ϱ und an Stelle der Selbstinduktion die Größe λ getreten ist. Daher bezeichnet man ϱ als **äquivalenten Widerstand** und λ als **äquivalente Selbstinduktion** und dementsprechend den Ausdruck $\omega\lambda$ als **äquivalenten induktiven Widerstand** und den Ausdruck $\sqrt{\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2}$ als **äquivalenten scheinbaren Widerstand**.

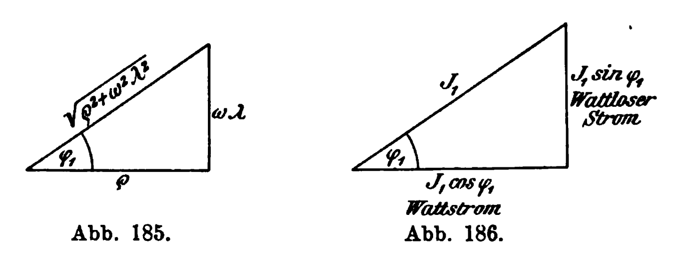


Abb. 185. Abb. 186.

Den letzteren kann man ebenso wie in § 133 als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten ϱ und $\omega\lambda$ (Abb. 185) darstellen. Ferner kann man ebenso wie in Abb. 170 den Strom J_1 als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Winkel φ_1 darstellen (Abb. 186), dessen eine Kathete der Wattstrom $J_1 \cos \varphi_1$ und dessen andere Kathete der wattlose Strom $J_1 \sin \varphi_1$ ist.

Betrachten wir die Ausdrücke für ϱ und λ näher, so sehen wir zunächst, daß ϱ **größer** ist als w_1 und λ **kleiner** als L_1. **Der sekundäre Strom wirkt also auf den Widerstand scheinbar vergrößernd und auf die Selbstinduktion scheinbar verkleinernd.** Setzen wir Apparate (Transformatoren, Induktionsmotoren u. dgl.) voraus, die an eine Spannung von konstanter Frequenz angeschlossen sind, so ist $\omega\ (= 2\pi\nu)$, w_2, L_1 und M

konstant. Die wirksamen Größen ϱ und λ sind dann nur vom sekundären Widerstande w_2 und der sekundären Selbstinduktion L_2 abhängig.

Ist w_2 oder L_2 unendlich groß, d. h. ist der sekundäre Strom Null (Leerlauf), so ist $\varrho = w_1$ und $\lambda = L_1$. Mithin ist

$$J_1 = \frac{K_1}{\sqrt{w_1^2 + \omega^2 L_1^2}} \qquad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{w_1}.$$

In diesem Falle ist also der primäre Strom so wie in einem einzelnen Stromkreis (Drosselspule), was von vornherein nicht anders zu erwarten war.

Ist aber ein sekundärer Strom vorhanden, so sieht man zunächst aus Gl. 134, daß die Phasenverschiebung des primären Stromes gegen die Klemmenspannung umso kleiner ist, je größer der sekundäre Strom ist, und zwar aus zwei Gründen, da λ im Zähler, ϱ aber im Nenner steht, und jenes abnimmt, dieses hingegen zunimmt.

Da durch den sekundären Strom der äquivalente Widerstand größer, die äquivalente Selbstinduktion hingegen kleiner wird, und der äquivalente scheinbare Widerstand beide enthält, so kann man von vornherein nicht entscheiden, ob durch den sekundären Strom der primäre vergrößert oder verkleinert wird, d. h. ob der äquivalente scheinbare Widerstand $\sqrt{\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2}$ kleiner oder größer ist als der gewöhnliche scheinbare Widerstand $\sqrt{w_1^2 + \omega^2 L_1^2}$. Um dies zu entscheiden bilden wir den Unterschied beider und bringen ihn in folgende Form

$$(\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2) - (w_1^2 + \omega^2 L_1^2) = \frac{2\omega^2 M^2 w_1}{w_2 + \frac{\omega^2 L_2^2}{w_2}} - \frac{\omega^4 M^2 (2 L_1 L_2 - M^2)}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2};$$

Ist $w_2 = 0$, so ist auch das erste Glied auf der rechten Seite Null, und daher der ganze Ausdruck negativ, da $(L_1 L_2 - M^2)$ immer positiv oder höchstens gleich Null sein kann (Gl. 128). Der äquivalente scheinbare Widerstand ist also in diesem Falle kleiner. Ist w_2 unendlich groß, d. h. ist der sekundäre Stromkreis unterbrochen, so daß kein Strom zustande kommt, so ist die rechte Seite Null, d. h. der äquivalente scheinbare Widerstand ist gleich dem scheinbaren, wie nicht anders zu erwarten war. Zwischen diesen beiden Grenzen liegen alle anderen möglichen Fälle. Der äquivalente scheinbare Widerstand ist also immer kleiner als der scheinbare bei offenem sekundären Kreis. Durch den sekundären Strom wird der primäre vergrößert.

Man kann demnach einen Transformator als eine selbst-

regulierende Drosselspule auffassen. Ändert sich der sekundäre Strom, so ändert sich im gleichen Sinne der äquivalente scheinbare Widerstand und daher auch der primäre Strom.

Die folgende Zahlentafel gibt einen zahlenmäßigen Begriff vom äquivalenten Widerstand, Selbstinduktion und scheinbaren Widerstand eines Transformators unter dem Einfluß des sekundären Stromes bei verschiedenem Ohmschen Widerstand und Selbstinduktion des äußeren sekundären Stromkreises.

Die gegebenen Werte der primären Wickelung sind:

$$w_1 = 8, \qquad L_1 = 4$$

der sekundären Wickelung:

$$w_{2i} = 0{,}02, \qquad L_{2i} = 0{,}01.$$

Da wir von magnetischer Streuung absehen, so ist

$$M = \sqrt{L_1 L_{2i}} = \sqrt{4 \cdot 0{,}01} = 0{,}2.$$

Ferner sei $\omega = 300$ (das entspricht einer Periodenzahl von $\nu = 48$). Das Übersetzungsverhältnis ist: $\ddot{u} = 20$.

Die letzten Reihen enthalten noch die primäre Stromstärke bei 2200 V primärer Klemmenspannung nach Gl. 133 und die sekundäre Stromstärke nach Gl. 140 oder 139 in den folgenden Paragraphen.

	w_{2a}	L_{2a}	w_2	L_2	ϱ	λ	$\sqrt{\varrho^2 + \omega^2\lambda^2}$	J_1	φ_1	J_2	φ_2
	der sekundären Wickelung		des ganzen sekundären Kreises								
I	∞	0	∞	0,01	8	4	1200	1,83	89°40′	0	0
II	100	0	100,02	0,01	44	3,99	1200	1,83	88°	1,1	0
III	20	0	20,02	0,01	184	3,9	1187	1,85	81°	5,5	0
IV	5	0	5,02	0,01	508	3,0	1033	2,13	60°	22	0
V	2	0	2,02	0,01	558	1,25	676	3,3	34°	55	0
VI	1	0	1,02	0,01	374	0,42	395	5,57	18°	106	0
VII	0,2	0	0,22	0,01	96	0,02	96	23	3°30′	459	0
VIII	0,1	0	0,12	0,01	56	0,005	56	39	1°30′	780	0
IX	0	0	0,02	0,01	16	0	16	137	0°	2740	0
X	1	3	1,02	3,01	8	4	1200	1,83	89°40′	0,12	89°56′
XI	1	0,1	1,02	0,11	12	3,56	1160	1,9	89°20′	3,45	88°
XII	1	0,01	1,02	0,02	108	2,1	640	3,4	80°	34	71°30′
XIII	1	0,001	1,02	0,011	316	0,7	380	5,79	33°	101	16°
XIV	1	0,0001	1,02	0,0101	368	0,45	390	5,64	20°	106	1°44′
XV	1	0	1,02	0,01	374	0,42	395	5,57	19°	106	0

Aus diesen Zahlen erkennt man, daß zwar ϱ für alle endlichen Werte von w_2 größer ist als w_1, daß es aber ein Maximum hat. Das folgt auch schon daraus, daß sowohl für $w_2 = \infty$, als auch für $w_2 = 0$ $\varrho = w_1$ wird.

Eine weitere Eigentümlichkeit zeigen die letzten Werte, nämlich die, daß trotz abnehmender Selbstinduktion (bei konstantem Ohmschen Widerstand) der äquivalente scheinbare Widerstand um ein geringes (von 380 auf 395) zunimmt und der primäre Strom dementsprechend abnimmt. Die Phasenverschiebungswinkel φ_1 und φ_2 sind aus den Gl. 134 bzw. 137 berechnet.

Setzt man Gl. 134 in 133 ein, so ist

$$J_1 = \frac{K_1}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} = \frac{K_1}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}}.$$

Da der zweite Bruch nach einer bekannten trigonometrischen Formel gleich den Cosinus ist, so ist

$$J_1 = \frac{K_1 \cos \varphi_1}{\varrho}.$$

Das ist dieselbe Gleichung wie Gl. 114 (S. 212) für einen einzelnen Wechselstromkreis, nur daß der äquivalente Widerstand ϱ an Stelle des Ohmschen Widerstandes steht.

Multipliziert man diese Gleichung mit J_1, so ist

$$J_1^2 = \frac{J_1 K_1 \cos \varphi_1}{\varrho}.$$

Der Zähler ist aber nichts anderes als die Leistung P des primären Stromes; also

$$\varrho = \frac{P}{J_1^2}.$$

Das ist dieselbe Gleichung wie Gl. 117 (S. 214) für den Ohmschen Widerstand eines einzelnen Wechselstromkreises. ϱ spielt also auch hinsichtlich der Leistung dieselbe Rolle wie der Ohmsche Widerstand bei einem einzelnen Stromkreis (Drosselspule).

Diese Gleichung dient zur experimentellen Bestimmung des äquivalenten Widerstandes ϱ. Hat man diesen, so ergibt sich der äquivalente induktive Widerstand $\omega\lambda$ aus Gl. 133b

$$\omega\lambda = \sqrt{\left(\frac{K_1}{J_1}\right)^2 - \varrho^2}.$$

Hierzu ist also auch noch die Kenntnis der Klemmenspannung K_1 erforderlich.

Beispiel: Bei einer gewissen Belastung sind auf der primären Seite eines Transformators folgende Werte gemessen worden

$$K_1 = 1000 \qquad J_1 = 4 \qquad P = 3200$$

mithin

$$\varrho = \frac{3200}{16} = 200$$

$$\omega\lambda = \sqrt{\left(\frac{1000}{4}\right)^2 - 200^2} = \sqrt{62500 - 40000}$$

$$= \sqrt{22500} = 150.$$

Bei einer Periodenzahl $\nu = 50$ ist $\omega = 314$, also $\lambda = 0{,}48$ Henry.

Das Verhältnis $\omega\lambda : \varrho$ muß gemäß Gl. 134 gleich der trigonometrischen Tangente des Phasenverschiebungswinkels φ_1 sein.

147. Strom und Klemmenspannung des sekundären Kreises.

Für den sekundären Strom und seine Beziehung zur sekundären Klemmenspannung gilt natürlich dieselbe Beziehung wie für einen einzelnen Stromkreis, da sein äußerer Teil von den Vorgängen im inneren Teil des Transformators nicht berührt wird. Es ist also:

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\mathfrak{K}_2}{\sqrt{w_{2a}^2 + \omega^2 L_{2a}^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L_{2a}}{w_{2a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

wenn φ_2 die Phasenverschiebung zwischen dem sekundären Strom und seiner Klemmenspannung bedeutet. Diese ist nicht zu verwechseln mit der Phasenverschiebung zwischen dem sekundären Strom und seiner EMK. Nennen wir sie δ, so ist:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\omega L_{2a}}{w_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

weil dafür der gesamte sekundäre Widerstand w_2 in Betracht kommt.

Für die sekundäre Stromstärke ergibt sich auf folgende Weise eine Beziehung zur primären Klemmenspannung.

Nach § 145 ist die vom primären Strom im sekundären Stromkreise induzierte EMK gleich $M\frac{di_1}{dt}$. Führt man die Differentiation der Gl. 132 aus, so erhält man für den Scheitelwert $\mathfrak{E}_M$ dieser EMK den Wert

$$\mathfrak{E}_M = \frac{\omega M \mathfrak{K}_1}{\sqrt{\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2}}.$$

Diese EMK wirkt nicht nur auf den äußeren Teil des sekundären Stromkreises wie die sekundäre Klemmenspannung $\mathfrak{K}_2$, sondern auf den gesamten sekundären Stromkreis mit dem Widerstand w_2 und der Selbstinduktion L_2. Es ist daher (nach § 133) der Scheitelwert der sekundären Stromstärke

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\omega M \mathfrak{K}_1}{\sqrt{\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2} \cdot \sqrt{w_2{}^2 + \omega^2 L_2^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

Die Phasenverschiebung ζ zwischen dieser EMK $M \frac{di_1}{dt}$ und dem sekundären Strome ist dementsprechend

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\omega L_2}{w_2}.$$

Aus Gl. 136 und 139 folgt

$$\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1 \frac{\omega M}{\sqrt{\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2}} \cdot \frac{\sqrt{w_{2a}^2 + \omega^2 L_{2a}^2}}{\sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}} \quad . \quad . \quad (139\text{a})$$

als Beziehung zwischen der primären und sekundären Klemmenspannung. Ist der sekundäre Stromkreis offen (Leerlauf), d. h. ist

$$w_{2a} = w_2 = \infty,$$

so ist (nach § 146) $\varrho = w_1, \quad \lambda = L_1$

mithin
$$\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1 \frac{\omega M}{\sqrt{w_1^2 + \omega^2 L_1^2}}.$$

Ist $w_1{}^2$ verschwindend klein gegen $\omega^2 L_1^2$, wie das bei Transformatoren und Induktionsmotoren in der Regel der Fall ist, so ist

$$\frac{\mathfrak{K}_2}{\mathfrak{K}_1} = \frac{M}{L_1}.$$

Besteht keine magnetische Streuung, so ist nach Gl. 128a

$$\frac{\mathfrak{K}_2}{\mathfrak{K}_1} = \frac{\sqrt{L_{2i}}}{\sqrt{L_1}} = \frac{N_2}{N_1} = ü.$$

Das Verhältnis der Klemmenspannungen ist also in diesem Falle gleich dem Übersetzungsverhältnis, ebenso wie das Verhältnis der EMKe (§ 144).

Alle vorstehenden, durch die Scheitelwerte ausgedrückten Beziehungen zwischen Stromstärken und Spannungen gelten ohne weiteres auch für die entsprechenden effektiven Werte, da man nur beiderseits durch den Scheitelfaktor der Sinuswelle $\sqrt{2}$ zu dividieren braucht, um die effektiven Werte zu erhalten.

148. Das Verhältnis zwischen primärem und sekundärem Strom.

Gehen wir vom primären Strom

$$i_1 = \mathfrak{J}_1 \sin \omega t$$

aus, und bezeichnen wir die Phasenverschiebung zwischen primärem und sekundärem Strom mit χ, so müssen wir den sekundären durch

$$i_2 = \mathfrak{J}_2 \sin (\omega t - \chi)$$

darstellen.

Setzt man diese Funktionen in Gl. 131 ein, so ist

$$o = w_2 \mathfrak{J}_2 \sin (\omega t - \chi) + \omega L_2 \mathfrak{J}_2 \cos (\omega t - \chi) + \omega M \mathfrak{J}_1 \cos \omega t.$$

Diese Gleichung muß zu jeder beliebigen Zeit gelten, also auch für $\omega t = 0$ und für $\omega t = 90$. Setzt man zuerst $\omega t = 0$, so ergibt sich

$$\omega M \mathfrak{J}_1 = w_2 \mathfrak{J}_2 \sin \chi - \omega L_2 \mathfrak{J}_2 \cos \chi.$$

Setzt man $\omega t = 90$, so ergibt sich

$$o = w_2 \mathfrak{J}_2 \cos \chi + \omega L_2 \mathfrak{J}_2 \sin \chi.$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser beiden Gleichungen erhält man

$$\omega^2 M^2 \mathfrak{J}_1^2 = \mathfrak{J}_2^2 (w_2^2 + \omega^2 L_2^2)$$

und daraus

$$\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} = \frac{\omega M}{\sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}} \quad \ldots \ldots \quad (140)$$

Diese Beziehung folgt übrigens auch aus den Gl. 133a u. 139. Ferner erhält man aus der zweiten der obigen Gleichungen sofort

$$\operatorname{tg} \chi = -\frac{w_2}{\omega L_2}.$$

Man erkennt, daß bei konstantem ω und M, also bei konstanter Periodenzahl und gegebener Wickelung, für das Verhältnis der Stromstärken und für die Phasenverschiebung zwischen beiden nur w_2 und L_2, also nur der sekundäre Strom maßgebend ist. Daraus folgt wiederum, wie im vorigen Kapitel, daß sich ein Transformator so verhält wie eine selbstregulierende Drosselspule.

Den Ausdruck für die Phasenverschiebung kann man in andere Form bringen, ähnlich wie bei einem einzelnen Stromkreis.

Setzt man nämlich

$$\frac{\omega L_2}{w_2} = \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots \ldots \quad (141)$$

so ist
$$\operatorname{tg}\chi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}(90 + \alpha),$$
es ist also
$$\chi = 90 + \alpha \quad \ldots \ldots \quad (142)$$
wobei die trig. Tangente von α bestimmt ist durch das Verhältnis des gesamten induktiven Widerstandes zum Ohmschen Widerstand. Der sekundäre Strom hat also gegen den primären eine Phasenverzögerung, deren Winkel stets größer ist als 90^0.

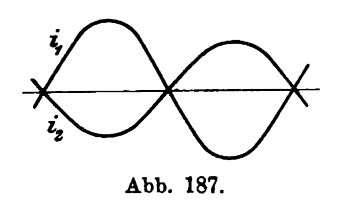


Abb. 187.

Ist w_2 verschwindend klein gegen ωL_2, so ist $\operatorname{tg}\alpha$ unendlich, also α gleich 90^0, und χ gleich 180^0. Dann ist $i_2 = -\mathfrak{J}_2 \sin \omega t$, d. h. die beiden Ströme sind dann in jedem Augenblick entgegengesetzt gerichtet (Abb. 187), und das Verhältnis der Scheitelwerte geht über in
$$\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} = \frac{M}{L_2} \quad \ldots \ldots \quad (143)$$
also
$$i_2 = -i_1 \frac{M}{L_2} \quad \ldots \ldots \quad (143\text{a})$$

Ist außer w_2 auch der äußere induktive Widerstand ωL_{2a} klein gegen den inneren induktiven Widerstand, so ist
$$L_{2i} = L_2$$
also
$$\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} = \frac{M}{L_{2i}} \quad \ldots \ldots \quad (144)$$

Das Vorstehende gilt unabhängig davon, ob magnetische Streuung vorhanden ist oder nicht. Besteht keine Streuung, so ergibt sich weiter mit Hilfe der Gl. 128a
$$\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_{2i}}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{ü} \quad \ldots \quad (145)$$

d. h. die Stromstärken verhalten sich umgekehrt wie die Windungszahlen. Das trifft genau zu, wenn der Transformator kurzgeschlossen ist. Aber auch bei einem Transformator, der voll belastet ist, trifft dies sehr angenähert zu. Man vergleiche hierzu die Werte in der Zahlentafel auf S. 237. Bei den Belastungen VII bis IX findet man Gl. 145, bei X bis XII Gl. 143 erfüllt. Dieser Satz bildet ein Gegenstück zu dem im vorigen Paragraphen, wo-

nach sich die Klemmenspannungen bei Leerlauf so verhalten, wie die Windungszahlen.

Die vorstehenden Beziehungen gelten natürlich auch für die effektiven Werte.

149. Der Spannungsabfall in der primären und sekundären Wickelung.

Nach der allgemeinen Spannungsgleichung eines Wechselstromkreises $k = iw - e$ ist der Augenblickswert der Klemmenspannung gleich der algebraischen Summe aus dem Spannungsabfall iw und der EMK. Der effektive Wert der primären Klemmenspannung ergibt sich als Resultierende aus den effektiven Werten des Spannungsabfall $w_1 J_1$ und der EMK E_1. In Abb. 188 ist diese Konstruktion ausgeführt. Den Ausgang bildet die Abb. 183b mit den beiden EMKen. Da der primäre Strom J_1 gegen die Klemmenspannung in der Phase verspätet ist, muß er auch gegen die EMK verspätet sein. Der Spannungsabfall $w_1 J_1$ muß in gleicher Richtung wie J_1 aufgetragen werden, da w_1 eine Konstante ist.

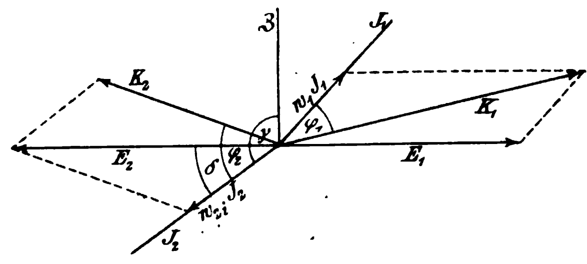


Abb. 188.

Während in der primären Wickelung die Klemmenspannung das ursprünglich Gegebene ist — denn hier ist die Stromquelle angeschlossen — ist in der sekundären Wickelung die EMK E_2 das Gegebene und zerlegt sich in zwei Komponenten, den Spannungsabfall $w_2 J_2$ und die Klemmenspannung K_2. Zwischen K_2 und J_2 besteht die Phasenverschiebung φ_2 (Gl. 137).

Gegenüber einem einzelnen Stromkreis (Drosselspule) zeigt sich also der Unterschied, daß dort (Abb. 169) das Spannungsdiagramm ein rechtwinkliges Dreieck ist, während es hier sowohl für die primäre wie die sekundäre Wickelung ein stumpfwinkliges ist. Daher ist zur genauen Ermittelung der EMKe eines Transformators die Messung der Klemmenspannung, des Stromes, des Widerstandes

und der Phasenverschiebung zwischen Strom und Klemmenspannung in der betreffenden Wickelung erforderlich.

Ist der induktive Widerstand im äußeren Teil der sekundären Wickelung verschwindend klein gegenüber dem Ohmschen, so ist $\varphi_2 = 0$ und $\delta = 0$ (Gl. 138). Es haben also E_2, K_2 und J_2 gleiche Phase, die Abb. 188 geht über in Abb. 189, und es ist

$$K_2 = E_2 - w_{2i} J_2 .$$

Abb. 189.

Bei der praktischen Anwendung von Transformatoren liegt der Fall in der Regel so, daß die primäre Klemmenspannung konstant ist. Die primäre EMK ist dann um so kleiner, je größer der Spannungsabfall ist und ebenso in weiterer Folge das magnetische Feld $\mathfrak{Z}$ und die sekundäre EMK. In der sekundären Wickelung ist aber die Klemmenspannung kleiner als die EMK. Auf die sekundäre Klemmenspannung hat also sowohl der primäre als auch der sekundäre Spannungsabfall Einfluß. Das Verhältnis der Klemmenspannungen weicht daher um so mehr von dem Verhältnis der Windungszahlen (Übersetzungsverhältnis) ab, je größer die Strombelastung des Transformators ist.

150. Das magnetische Feld zweier Stromkreise mit gegenseitiger Induktion.

Bei einem einzelnen Wechselstrom ist sein magnetisches Feld in gleicher Phase mit dem Strom, denn es wird ja von diesem unmittelbar erzeugt und in dem Grundgesetz $\mathfrak{z} = \frac{4\pi i N}{\mathfrak{w}}$ kommen außer $\mathfrak{z}$ und i keine von der Zeit abhängigen Größen vor. Ist aber ein zweiter geschlossener Stromkreis vorhanden, in welchem durch gegenseitige Induktion ein sekundärer Strom erzeugt wird, so hat dieser auch ein magnetisches Feld, das mit ihm in gleicher Phase ist. Wo sich die beiden Felder übereinanderlagern, also insbesondere in den Raum innerhalb der beiden Wickelungen, entsteht ein resultierendes, beiden Stromkreisen gemeinsames Feld, das weder mit dem einen noch mit dem anderen Strom in der Phase übereinstimmt, sondern zwischen beiden liegt. Wir wollen nun die Beziehung zwischen dem gemeinsamen Felde und den beiden Strömen

feststellen und gehen der einfacheren mathematischen Behandlung wegen nicht wie im vorigen Paragraphen vom primären, sondern vom sekundären Strome

$$i_2 = \mathfrak{J}_2 \sin \omega t$$

aus. Aus § 148 wissen wir, daß der primäre Strom dem sekundären um den Winkel χ voreilt. Wir müssen ihn also durch

$$i_1 = \mathfrak{J}_1 \sin (\omega t + \chi)$$

darstellen.

Das resultierende, beiden Stromkreisen gemeinsame Feld $\mathfrak{z}$ eilt nach Abb. 188 dem sekundären Strome um den Winkel γ vor. Wir müssen also schreiben

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Z} \sin (\omega t + \gamma).$$

Lagern sich die beiden, vom primären und sekundären Strome erzeugten Felder vollständig übereinander, d. h. ist keine magnetische Streuung vorhanden, so gilt die Gl. 126. Nach dieser ist

$$\frac{4\pi i_1 N_1}{\mathfrak{w}} = \mathfrak{z} - \frac{4\pi i_2 N_2}{\mathfrak{w}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

Führt man die obigen Funktionen ein, so ist

$$\frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}} \sin (\omega t + \chi) = \mathfrak{Z} \sin (\omega t + \gamma) - \frac{4\pi \mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}} \sin \omega t$$

Da diese Gleichung zu jeder beliebigen Zeit gelten muß, also auch für $\omega t = 0$ und $\omega t = 90^0$, so erhält man durch Einsetzen dieser Werte die beiden folgenden Gleichungen

$$\frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}} \sin \chi = \mathfrak{Z} \sin \gamma,$$

$$\frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}} \cos \chi = \mathfrak{Z} \cos \gamma - \frac{4\pi \mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}}.$$

Quadriert man diese und addiert sie dann, so ergibt sich

$$\left(\frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}}\right)^2 = \mathfrak{Z}^2 - 2\,\mathfrak{Z}\,\frac{4\pi \mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}} \cos \gamma + \left(\frac{4\pi \mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}}\right)^2 \quad (147)$$

Diese Gleichung stellt ein stumpfwinkliges Dreieck dar (Abb. 190), wo $\frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}}$ die dem Winkel γ gegenüberliegende Seite, $\mathfrak{Z}$ und $\frac{4\pi \mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}}$ die beiden anderen Seiten sind. Zeichnet man das Diagramm so, daß $\mathfrak{Z}$ als Resultierende der beiden ursprünglichen magnetischen Felder erscheint, wie es tatsächlich den physikalischen Verhältnissen entspricht, so erhält man Abb. 191, in welcher auch die entsprechenden Phasenwinkel eingezeichnet sind.

In der Wirklichkeit läßt sich natürlich nur das resultierende Feld $\mathfrak{Z}$ konstatieren oder messen, während die beiden ursprünglichen Felder seine Komponenten bilden. Man bezeichnet daher die letzteren auch als „fiktive“ Felder.

Abb. 190.

Ist die EMK (primär oder sekundär) konstant, so ist auch das resultierende, wirklich vorhandene Feld $\mathfrak{Z}$ konstant, weil die Gl. 93 unter allen Umständen gilt, wie groß auch der primäre und sekundäre Strom sein mag. Das erklärt sich daraus, daß die beiden Ströme um so mehr einander entgegenwirken, je größer sie sind, und zwar so, daß die Diagonale $\mathfrak{Z}$ (Abb. 191) immer dieselbe bleibt wie groß auch die Seiten des Parallelogramms werden mögen.

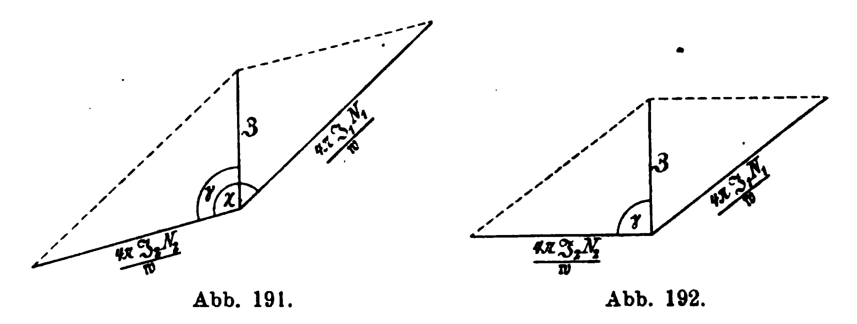


Abb. 191. Abb. 192.

Wird nicht die EMK sondern die Klemmenspannung konstant gehalten, so kann das Feld $\mathfrak{Z}$ bei wachsender Stromstärke nicht konstant bleiben, weil mit der Stromstärke der Spannungsabfall in der primären Wickelung zunimmt, die EMK infolgedessen abnimmt. Das Feld $\mathfrak{Z}$ hängt aber von dieser, nicht von der Klemmenspannung ab.

Ist der induktive Widerstand des äußeren sekundären Stromkreises klein gegenüber dem Ohmschen, so fallen Strom und EMK im sekundären Kreise zusammen (Abb. 189), γ ist 90^0, und das letzte Diagramm geht über in das der Abb. 192. Dieser Fall trifft zu für Transformatoren mit induktionsfreier Belastung (in der Zahlentafel auf S. 237 I bis IX).

Aus den Abb. 191 und 192 erkennt man, daß das resultierende Feld $\mathfrak{Z}$ immer kleiner ist als das Feld $\frac{4\pi\mathfrak{J}_1 N_1}{w}$, wie es besteht, wenn kein sekundärer Strom vorhanden ist, sondern $\mathfrak{J}_1$ allein. Der sekundäre Strom wirkt also hinsichtlich des magnetischen Feldes schwächend. Der Grund liegt darin, daß die Phasenverschiebung χ zwischen den beiden Strömen immer größer als 90^0 ist.

151. Der Magnetisierungsstrom.

Die Gl. 146, bzw. die beiden letzten Diagramme, kann man durch $\frac{4\pi}{\mathfrak{w}}$ dividieren und erhält so die Abb. 193, welche das Diagramm der Amperewindungen darstellt. Die Resultierende *OC* ist gleich $\frac{\mathfrak{Z}}{\frac{4\pi}{\mathfrak{w}}}$ und bedeutet die resultierenden Amperewindungen. Diese wären erforderlich, wenn dasselbe Feld $\mathfrak{Z}$ durch eine einzelne Wickelung, wie bei einer Drosselspule, erzeugt werden sollte. Macht man den sekundären Strom immer kleiner, so rückt der Punkt *B* immer näher an *O*, und *A* immer näher an *C* heran. Ist der sekundäre Strom Null, so fällt *OA* mit *OC* zusammen, und der Strom, der jetzt hineingeht, erzeugt allein das magnetische Feld $\mathfrak{Z}$ wie bei einer Drosselspule; dann ist

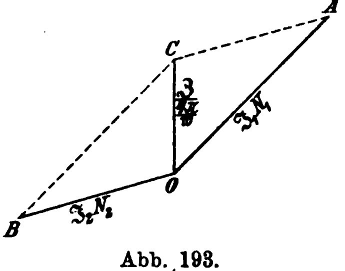


Abb. 193.

$$\mathfrak{J}_m N_1 = \frac{\mathfrak{Z}}{\frac{0{,}4\pi}{\mathfrak{w}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (148)$$

wenn die Stromstärke in Ampere ausgedrückt wird.

Daher ist $\mathfrak{J}_m$ der Magnetisierungsstrom; er ist konstant, wie groß auch $\mathfrak{J}_1$ oder $\mathfrak{J}_2$ sein mögen, solange $\mathfrak{Z}$, d. h. solange die EMK konstant ist.

Über den Magnetisierungsstrom einer Spule mit Eisenkern vgl. § 164.

152. Das Transformatorproblem mit Berücksichtigung der magnetischen Streuung.

In den vorhergehenden Paragraphen wurde vorausgesetzt, daß die gesamten vom primären und sekundären Strom herrührenden Kraftlinien von beiden Wickelungen umschlossen werden und sich zum gemeinsamen Felde $\mathfrak{Z}$ vereinigen. Dieser Fall kommt aber genau genommen in der Praxis nicht vor, sondern es ist immer eine gewisse mit der Stromstärke zunehmende magnetische Streuung vorhanden, die dadurch entsteht, daß die von den beiden Wickelungen erzeugten Kraftlinien sich teilweise stauen, wie dies in § 109 und 110 näher ausgeführt wurde. Infolgedessen geht nur ein Teil der von jeder Wickelung erzeugten Kraftlinien durch die andere

Wickelung, während die übrigen vor ihr ausbiegen und durch die Luft verlaufen.

Unter sonst gleichen Verhältnissen ist die Stauung um so größer, je größer die Phasenverschiebung zwischen den beiden Strömen ist. Bei 180° Phasenverschiebung ist sie am größten. Ist die Phasenverschiebung null, so besteht keine magnetische Stauung, sondern die MMKe addieren sich.

Abb. 194 zeigt den Verlauf der Kraftlinien schematisch, wenn jede Wickelung auf einem besonderen Eisenkörper sitzt, wie dies bei den Induktionsmotoren der Fall ist, und wobei die magnetische Streuung besonders ausgeprägt ist. Am geringsten ist die Streuung bei jenen Transformatoren, wo beide Wickelungen übereinander liegen, oder wo beide in viele Abteilungen zerteilt sind, die abwechselnd dicht nebeneinander liegen. Befinden sich aber zwischen diesen Abteilungen größere Zwischenräume, so ist die Streuung stark und kann durch Eisenfeilspäne sichtbar gemacht werden wie in Abb. 195, wo sich eine sekundäre Spule zwischen zwei primären befindet, die alle über einen Eisenkern geschoben sind. Man sieht, daß jede Spule ein Streufeld hat, das in ihrer unmittelbaren Nähe so aussieht, als ob jede Spule für sich allein vorhanden wäre. Die Kraftlinien des gemeinsamen, im Eisenkern verlaufenden Feldes sind natürlich nicht sichtbar.

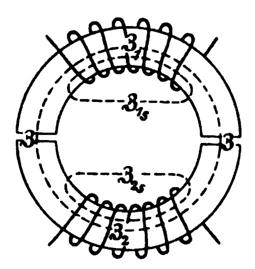


Abb. 194a. Schematische Darstellung der Scheitelwerte der Felder.

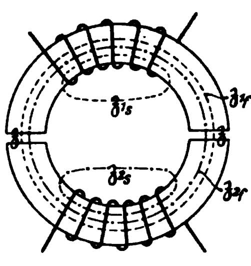


Abb. 194b. Schematische Darstellung der Augenblickswerte der Feldkomponenten.

In der schematischen Darstellung Abb. 194a sind die Scheitelwerte der magnetischen Felder eingeschrieben, weil nur diese durch Eisenfeilspäne sichtbar gemacht werden können. Bei der mathematischen Behandlung muß man aber von den Augenblickswerten ausgehen, weil nur diese algebraisch addiert werden können. Von diesen kann man dann zu den durch Vektoren dargestellten Scheitelwerten und effektiven Werten übergehen.

Daher sind in Abb. 194b die verschiedenen Komponenten als Augenblickswerte eingezeichnet. Durch die gestrichelten Linien sind die beiden Kraftlinienbündel angedeutet, welche von der primären Wickelung erzeugt werden, nämlich das Bündel $\mathfrak{z}_{1f}$, welches durch die sekundäre Wickelung verläuft, und das Bündel $\mathfrak{z}_{1s}$, welches nicht durch die sekundäre Wickelung verläuft, also das primäre

Streufeld. Durch die strichpunktierten Linien sind jene beiden Kraftlinienbündel angedeutet, welche von der sekundären Wickelung erzeugt werden, nämlich das Bündel $\mathfrak{z}_{2f}$, welches durch die primäre Wickelung verläuft, und das Bündel $\mathfrak{z}_{2s}$, welches nicht durch die primäre Wickelung verläuft, also das sekundäre Streufeld.

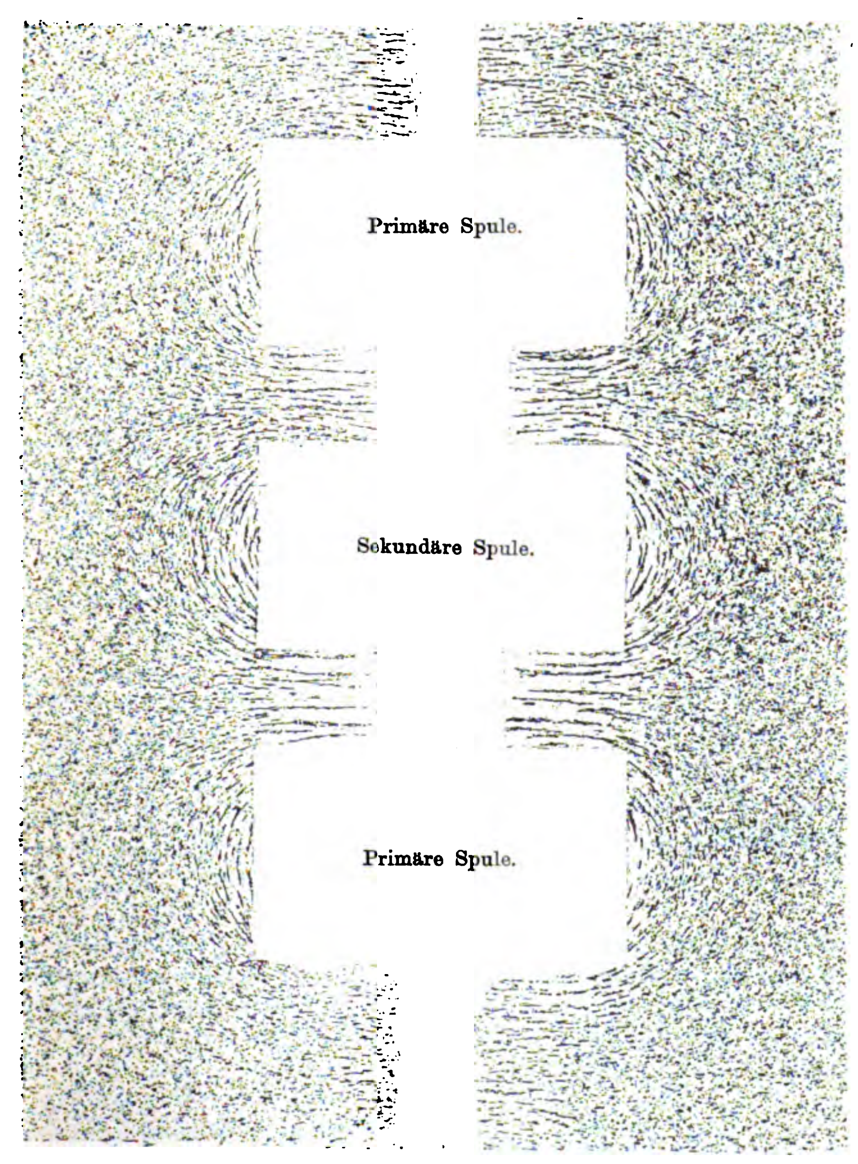


Abb. 195. Kraftlinienstauung zwischen primären und sekundären Spulen.

Die beiden Feldkomponenten $\mathfrak{z}_{1f}$ und $\mathfrak{z}_{2f}$ durchlaufen denselben Weg; ist der magnetische Widerstand dieses Weges $\mathfrak{w}$, so ist

$$\mathfrak{z}_{1f} = \frac{4\pi i_1 N_1}{\mathfrak{w}} \qquad \mathfrak{z}_{2f} = \frac{4\pi i_2 N_2}{\mathfrak{w}} \quad \ldots \quad (149)$$

Ist $\mathfrak{w}_{1s}$, $\mathfrak{w}_{2s}$ der magnetische Widerstand des primären, bzw. sekundären Streufeldes, so ist

$$\mathfrak{z}_{1s} = \frac{4\pi i_1 N_1}{\mathfrak{w}_{1s}} \qquad \mathfrak{z}_{2s} = \frac{4\pi i_2 N_2}{\mathfrak{w}_{2s}} \quad \ldots \quad (150)$$

Ist $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ der magnetische Widerstand des ganzen primären, bzw. sekundären Feldes, so ist (nach § 108)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{w}_1} &= \frac{1}{\mathfrak{w}_{1s}} + \frac{1}{\mathfrak{w}} \\ \frac{1}{\mathfrak{w}_2} &= \frac{1}{\mathfrak{w}_{2s}} + \frac{1}{\mathfrak{w}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (151)$$

Bezeichnet $\mathfrak{z}$ das von beiden Wickelungen umschlossene Kraftlinienbündel, also das beiden gemeinsame Feld, so ist nach Abb. 194b

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{1f} + \mathfrak{z}_{2f} \quad \ldots\ldots \quad (152)$$

Bezeichnet $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ das von der primären, bzw. sekundären Wickelung umschlossene Feld, so ist nach Abb. 194b

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_{1s} + \mathfrak{z}_{1f} + \mathfrak{z}_{2f} = \mathfrak{z}_{1s} + \mathfrak{z} \quad \ldots \quad (153)$$

$$\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_{2s} + \mathfrak{z}_{1f} + \mathfrak{z}_{2f} = \mathfrak{z}_{2s} + \mathfrak{z} \quad \ldots \quad (154)$$

Aus Gl. 152 und 149 folgt

$$\mathfrak{z} = \frac{4\pi i_1 N_1}{\mathfrak{w}} + \frac{4\pi i_2 N_2}{\mathfrak{w}} \quad \ldots\ldots \quad (155)$$

Das ist dieselbe Gleichung wie Gl. 146 für einen Transformator ohne Streuung. Aus ihr haben wir dort die Gl. 147 und das Diagramm Abb. 191 als Beziehung zwischen den Scheitelwerten des gemeinsamen Feldes $\mathfrak{Z}$ und der fiktiven Felder

$$\frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}} \qquad \text{und} \qquad \frac{4\pi \mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}}$$

erhalten. Sie gelten also auch, wenn magnetische Streuung vorhanden ist, und wir brauchen die Abb. 191 nur durch die Streufelder zu ergänzen. Da diese für sich allein bestehen, so gelten die Gl. 150 auch für die Scheitelwerte, nämlich

$$\mathfrak{Z}_{1s} = \frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}_{1s}} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{Z}_{2s} = \frac{4\pi \mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}_{2s}} \quad . \quad (156)$$

Und weil zwischen einem Strome und dem von ihm allein erzeugten Felde keine Phasenverschiebung besteht, so sind diese Streu-

felder in der Richtung OA und OB aufzutragen (Abb. 196). Bildet man nun die Resultierende aus $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_{1s}$, so erhält man das von der primären Wickelung umschlossene[1]) Feld $\mathfrak{Z}_1$. In gleicher Weise ergibt die Resultierende aus $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_{2s}$ das sekundäre Feld $\mathfrak{Z}_2$.

Die Felder $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_{1s}$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_{2s}$ und $\mathfrak{Z}$ sind wirklich vorhanden, während

$$\frac{4\pi\mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}} \quad \text{und} \quad \frac{4\pi\mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}}$$

nur Komponenten von $\mathfrak{Z}$ oder fiktive Felder sind; sie bezeichnen den Anteil, den der primäre bzw. sekundäre Strom an der Erzeugung des gemeinsamen Feldes $\mathfrak{Z}$ hat.

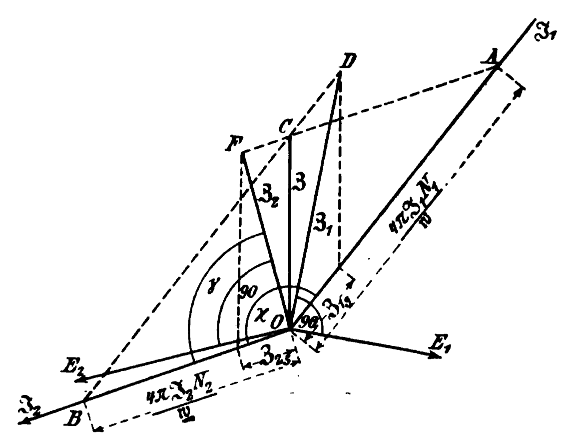


Abb. 196.

Dem primären Felde entspricht die primäre EMK

$$\mathfrak{E}_1 = \omega N_1 \mathfrak{Z}_1,$$

welche (nach § 144) ihrem Felde um 90° voreilt. Sie ist also in der Richtung OE_1 einzutragen.[2]) Dem sekundären Felde entspricht die sekundäre EMK

$$\mathfrak{E}_2 = \omega N_2 \mathfrak{Z}_2,$$

[1]) Man hat zu unterscheiden zwischen dem von einer Wickelung erzeugten und dem von ihr umschlossenen Felde. „Primäres" oder „sekundäres Feld" bedeutet immer das von der betreffenden Wickelung umschlossene Feld $\mathfrak{Z}_1$ bzw. $\mathfrak{Z}_2$, nicht das von ihr erzeugte Feld

$$\frac{4\pi\mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{4\pi\mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}_2},$$

die wie die folgenden nur Komponenten oder fiktive Felder sind.

[2]) In diesen Diagrammen sind die Spannungen und Ströme gleich als effektive Werte eingetragen.

welche ihrem Felde um 90⁰ nacheilt; sie ist also in der Richtung OE_2 einzutragen. Man sieht, daß jetzt die beiden EMKe nicht mehr genau entgegengesetzt gerichtet sind wie in dem Falle, wo keine magnetische Streuung vorhanden ist (Abb. 188), sondern daß hier die sekundäre EMK der primären um einen Winkel nacheilt, der größer ist als 180⁰, oder was dasselbe ist, ihr um einen Winkel voreilt, der kleiner ist als 180⁰.

Die primäre und sekundäre EMK kann man auch auf andere Weise und zwar sowohl ihrer Lage und Größe nach erhalten, wenn man die Spannungen, welche von den Streufeldern induziert werden, benutzt; man bezeichnet sie als S t r e u s p a n n u n g e n. Dem primären Streufelde entspricht eine Streuspannung

$$\mathfrak{E}_{1s} = \omega N_1 \mathfrak{Z}_{1s},$$

die ihrem Felde um 90⁰ voreilt. Sie ist also senkrecht zu $\mathfrak{Z}_{1s}$ (Abb. 197) einzutragen. Die dem gemeinsamen Felde $\mathfrak{Z}$ entsprechende EMK ist senkrecht zu diesem einzutragen; sie ist

$$OP = \omega N_1 \mathfrak{Z}.$$

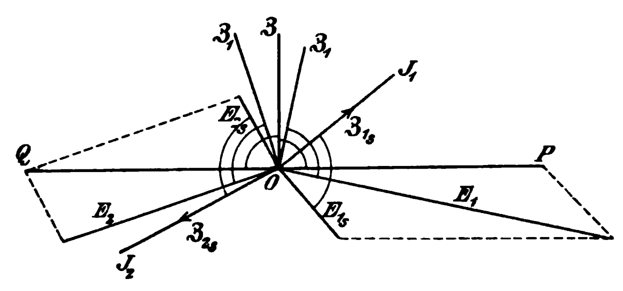


Abb. 197.

Die Resultierende aus diesen beiden gibt die primäre EMK $\mathfrak{E}_1$.

In der sekundären Wickelung hingegen ist die vom gemeinsamen Felde $\mathfrak{Z}$ induzierte EMK die gegebene; sie ist

$$OQ = \omega N_2 \mathfrak{Z},$$

also senkrecht zu $\mathfrak{Z}$ einzuzeichnen. Sie zerlegt sich in zwei Komponenten. Die eine ist die sekundäre Streuspannung

$$\mathfrak{E}_{2s} = \omega N_2 \mathfrak{Z}_{2s},$$

die ihrem Felde (wie in der primären Wickelung) um 90⁰ voreilt; sie ist also senkrecht zu $\mathfrak{Z}_{2s}$ einzutragen. Die andere Komponente ist die dem sekundären Felde $\mathfrak{Z}_2$ entsprechende sekundäre EMK E_2, die man dadurch erhält, daß man das Parallelogramm, dessen Diagonale OQ ist, vervollständigt.

Zieht man in Abb. 196 von D aus eine Parallele zu CA, so erhält man Abb. 198. Dann ist

$$AG = CD = \mathfrak{Z}_{1s}$$

und

$$OG = OA + AG,$$

was mit Gl. 151 übereinstimmt.

$$OG = \frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}} + \frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}_{1s}} = 4\pi \mathfrak{J}_1 N_1 \left(\frac{1}{\mathfrak{w}} + \frac{1}{\mathfrak{w}_{1s}}\right)$$

und infolge Gl. 151

$$OG = \frac{4\pi \mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}_1}.$$

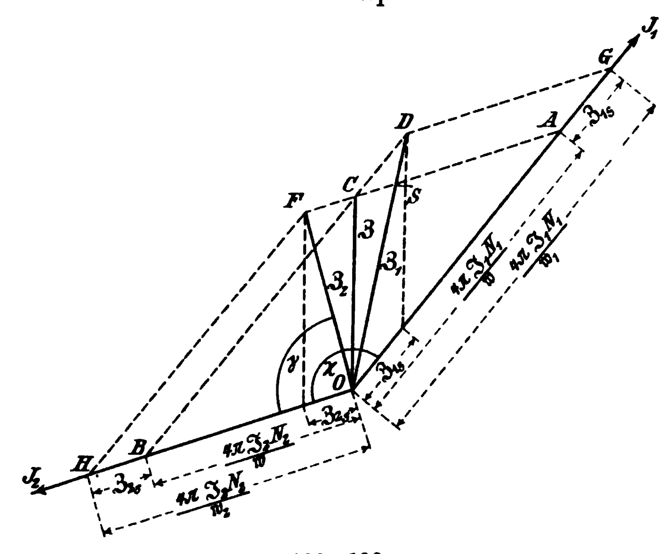


Abb. 198.

Da ferner

$$OB = \frac{4\pi \mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}}$$

ist, so ergibt sich aus diesem Diagramm das primäre Feld $\mathfrak{Z}_1$ als Resultierende aus dem gesamten von der primären Wickelung herrührenden Felde und dem fiktiven sekundären Felde.

Zieht man von F aus eine Parallele zu CB, so findet man in gleicher Weise

$$OH = \frac{4\pi \mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}_2}$$

und das sekundäre Feld $\mathfrak{Z}_2$ erscheint als Resultierende aus den gesamten von der sekundären Wickelung erzeugten Kraftlinien und dem fiktiven primären Felde.

In § 151 haben wir als Magnetisierungsstrom eines Transformators ohne Streuung denjenigen Strom bezeichnet, der erforderlich ist, um das Feld $\mathfrak{Z}$ durch die primäre Wickelung allein zu erzeugen. Hier ist unter Magnetisierungsstrom jener Strom zu verstehen, der erforderlich ist, um das primäre Feld $\mathfrak{Z}_1$ zu erzeugen, weil eben hier noch das primäre Streufeld hinzukommt. Daraus folgt aber auch schon, daß der Magnetisierungsstrom nur konstant ist, wenn die primäre EMK konstant ist, während er bei konstanter Klemmenspannung sich verändert. (Vgl. § 155 über den Magnetisierungsstrom bei Kurzschluß.)

153. Die Streufaktoren und Selbstinduktionskoeffizienten bei einem Transformator mit Streuung.

Entsprechend der primären und sekundären Streuung ist zwischen primären und sekundären Streufaktoren zu unterscheiden. Nach den Definitionen in § 110 ist der Streufaktor τ gleich dem Verhältnis der Streulinien zu den nützlichen Kraftlinien. Hier, wo zwischen primärem und sekundärem Streufeld zu unterscheiden ist, müssen als nützliche Kraftlinien die fiktiven Felder eingesetzt werden, weil sie die Bestandteile des gemeinsamen, also nützlichen Feldes darstellen. Es ist also, bezogen auf Abb. 198

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{GA}{AO} = \frac{4\pi\mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}_{1s}} : \frac{4\pi\mathfrak{J}_1 N_1}{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}_{1s}} \\ \tau_2 &= \frac{HB}{BO} = \frac{4\pi\mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}_{2s}} : \frac{4\pi\mathfrak{J}_2 N_2}{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}_{2s}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (157)$$

Der Streufaktor v ist nach § 110 gleich dem Verhältnis der gesamten Kraftlinien zu den nützlichen. Mithin ist

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{GO}{AO} = \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}_1} \\ v_2 &= \frac{HO}{BO} = \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}_2} \end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (158)$$

Aus diesen und den Gleichungen 151 folgt

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \mathfrak{w}\left(\frac{1}{\mathfrak{w}} + \frac{1}{\mathfrak{w}_{1s}}\right) = 1 + \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}_{1s}} = 1 + \tau_1 \\ v_2 &= \mathfrak{w}\left(\frac{1}{\mathfrak{w}} + \frac{1}{\mathfrak{w}_{2s}}\right) = 1 + \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}_{2s}} = 1 + \tau_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (159)$$

als Beziehung zwischen den Streufaktoren v und τ.

Entsprechend den verschiedenen magnetischen Feldern haben wir folgende Selbstinduktionskoeffizienten zu unterscheiden:

Erstens, entsprechend den Feldkomponenten OG und OH (Abb. 198)

$$L_1 = \frac{4\pi N_1^2}{\mathfrak{w}_1} \qquad L_{2i} = \frac{4\pi N_2^2}{\mathfrak{w}_2} \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

Zweitens, entsprechend den Streufeldern $\mathfrak{Z}_{1s}$ und $\mathfrak{Z}_{2s}$ (Gl. 156)

$$L_{1s} = \frac{4\pi N_1^2}{\mathfrak{w}_{1s}} \qquad L_{2s} = \frac{4\pi N_2^2}{\mathfrak{w}_{2s}} \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

Drittens, entsprechend den fiktiven Feldern OA und OB

$$L_{1f} = \frac{4\pi N_1^2}{\mathfrak{w}} \qquad L_{2f} = \frac{4\pi N_2^2}{\mathfrak{w}} \quad . \quad . \quad . \quad (162)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 151 ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} L_{1f} &= 4\pi N_1^2 \left(\frac{1}{\mathfrak{w}_1} - \frac{1}{\mathfrak{w}_{1s}}\right) = L_1 - L_{1s} \\ L_{2f} &= 4\pi N_2^2 \left(\frac{1}{\mathfrak{w}_2} - \frac{1}{\mathfrak{w}_{2s}}\right) = L_{2i} - L_{2s} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (163)$$

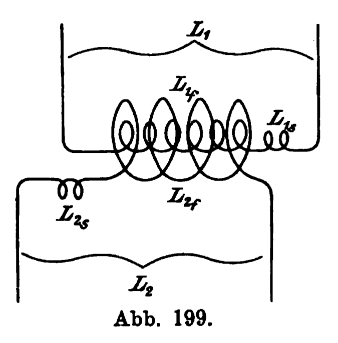


Abb. 199.

An der Erzeugung des gemeinsamen Feldes $\mathfrak{Z}$ sind nach Gl. 155 nur die den fiktiven Feldern entsprechenden Koeffizienten L_{1f} und L_{2f} beteiligt, nicht aber die den Streufeldern entsprechenden Koeffizienten L_{1s} und L_{2s}. In Abb. 199 ist dies schematisch dargestellt. Die Streufelder verhalten sich demnach hinsichtlich der beiden Stromkreise so wie Drosselspulen, die den Wickelungen eines streuungslosen Transformators vorgeschaltet sind, und dessen Koeffizient der gegenseitigen Induktion M entsprechend dem gemeinsamen Felde bestimmt ist durch

$$M = \frac{4\pi N_1 N_2}{\mathfrak{w}}.$$

Aus diesen und den letzten Ausdrücken folgt

$$M^2 = \frac{(4\pi)^2 N_1^2 N_2^2}{\mathfrak{w}^2} = L_{1f} L_{2f}$$

$$M^2 = (L_1 - L_{1s})(L_{2i} - L_{2s}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (164)$$

Behn-Eschenburg hat diese Beziehung in folgender Weise ausgedrückt

$$M^2 = L_1 L_{2i} - \delta L_1 L_{2i}$$

$$M^2 = (1 - \delta) L_1 L_{2i} \quad \ldots\ldots \quad (165)$$

δ ist demnach ein Streufaktor, welcher die primäre und sekundäre Streuung in Gesamtheit zum Ausdruck bringt. Seine Beziehung zu den anderen Streufaktoren ergibt sich auf folgende Weise

$$1 - \delta = \frac{M^2}{L_1 L_{2i}} = \frac{\mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2}{\mathfrak{w}^2} = \frac{1}{v_1 v_2}$$

$$\delta = 1 - \frac{1}{v_1 v_2} \quad \ldots\ldots \quad (166)$$

Aus den Gl. 159 folgt

$$v_1 v_2 = (1 + \tau_1)(1 + \tau_2) = 1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2.$$

Setzt man

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2 = \tau_g \quad \ldots\ldots \quad (167)$$

so ist

$$v_1 v_2 = 1 + \tau_g \quad \ldots\ldots \quad (167a)$$

Der Faktor τ_g ist demnach auch ein solcher, welcher die gesamte Streuung zum Ausdruck bringt.

Aus Gl. 166 und 167a folgt

$$\delta = 1 - \frac{1}{1 + \tau_g} = \frac{\tau_g}{1 + \tau_g}.$$

In der Funkentelegraphie ist der **Kupplungsfaktor** $\varkappa$ üblich. Er ist definiert durch

$$\varkappa^2 = \frac{M^2}{L_1 L_{2i}} \quad \ldots\ldots \quad (168)$$

$\varkappa$ ist also proportional den Kraftlinien, welche von **beiden** Stromkreisen umschlossen werden. Werden sämtliche Kraftlinien von beiden Stromkreisen umschlossen, so ist $\varkappa = 1$, aber $\delta = 0$, d. h. die magnetische Kupplung zwischen den beiden Stromkreisen ist am stärksten, die Streuung hingegen am kleinsten. Sind die beiden Stromkreise ganz unabhängig voneinander, so ist $M = 0$ und daher $\varkappa = 0$, aber $\delta = 1$. Aus den vorstehenden Gleichungen folgt

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa^2 = 1 - \delta \\ \text{oder} \quad \delta = 1 - \varkappa^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (168a)$$

d. h. je größer die magnetische Streuung ist, desto kleiner ist die magnetische Kupplung.

154. Strom und Klemmenspannung bei magnetischer Streuung.

Will man den Einfluß der magnetischen Streuung oder der magnetischen Kupplung in den Formeln für Strom und Spannung zum Ausdruck bringen, so hat man für M den Wert $\sqrt{(1-\delta) L_1 L_{2i}}$ oder $\varkappa \sqrt{L_1 L_{2i}}$ einzusetzen.

Man erhält so aus den Gl. 135

$$\varrho = w_1 + \frac{\omega^2 \varkappa^2 L_1 L_{2i}}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2} w_2$$

$$\lambda = L_1 - \frac{\omega^2 \varkappa^2 L_1 L_{2i}}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2} L_2,$$

d. h. der äquivalente Widerstand und die äquivalente Selbstinduktion nähern sich um so mehr ihren wirklichen Werten w_1 bzw. L_1, je kleiner die magnetische Kupplung, oder je größer die Streuung ist. Die Gl. 139a und 140 (in effektiven Werten angeschrieben) gehen über in

$$K_2 = K_1 \frac{\omega \varkappa \sqrt{L_1 L_{2i}}}{\sqrt{\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2}} \cdot \frac{\sqrt{w_{2a}^2 + \omega^2 L_{2a}^2}}{\sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}}$$

$$J_2 = J_1 \frac{\omega \varkappa \sqrt{L_1 L_{2i}}}{\sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}},$$

d. h. die sekundäre Klemmenspannung und der sekundäre Strom werden um so kleiner, je kleiner die magnetische Kupplung, oder je größer die Streuung ist.

Bei Leerlauf ergibt sich für das Verhältnis der Klemmenspannungen aus § 147

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\varkappa \sqrt{L_{2i}}}{\sqrt{L_1}} = \frac{\varkappa N_2}{N_1} = \varkappa ü.$$

Sind die beiden Stromkreise gar nicht magnetisch gekuppelt, sondern ganz unabhängig voneinander, d. h. ist $\varkappa = 0$, so ist

$$\varrho = w_1 \qquad \lambda = L_1$$

$$J_1 = \frac{K_1}{\sqrt{w_1^2 + \omega^2 L_1^2}} \qquad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{w_1}$$

$$K_2 = 0 \qquad J_2 = 0,$$

wie nicht anders zu erwarten war.

Um die Klemmenspannungen eines Transformators mit magnetischer Streuung in graphischer Darstellung zu finden, haben wir genau so zu verfahren wie in Abb. 188, d. h. wir haben die

Resultierende aus der primären EMK E_1, welche senkrecht zu $\mathfrak{Z}_1$ ist (Abb. 200) und dem primären Ohmschen Spannungsabfall $w_1 J_1$ zu bilden. Der letztere ist in gleicher Phase wie der Strom; wir haben ihn also in derselben Richtung aufzutragen und erhalten als Resultierende K_1. Im sekundären Kreise ist wiederum zu beachten, daß Klemmenspannung K_2 und Ohmscher Spannungsabfall $w_2 J_2$ Komponenten der gegebenen EMK E_2 sind. Der Spannungsabfall liegt in der Richtung des Stromes J_2 und dazu ergibt sich als zweite Komponente die Klemmenspannung K_2.

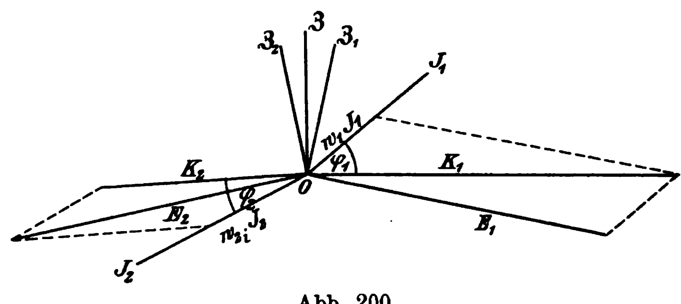


Abb. 200.

Da E_1 als Resultierende der primären Streuspannung E_{1s} Abb. 197) und der dem gemeinsamen Felde $\mathfrak{Z}$ entsprechenden EMK OP erscheint, so kann die primäre Klemmenspannung als Resultierende dreier Komponenten aufgefaßt werden, nämlich der beiden eben genannten und des Spannungsabfalles. Diese Auffassung entspricht der Abb. 199, wo das Streufeld als eine einem streuungslosen Transformator vorgeschaltete Drosselspule erscheint. Ebenso können im sekundären Kreise Klemmenspannung, Streuspannung und Spannungsabfall als Komponenten der ursprünglich gegebenen, dem gemeinsamen Felde entsprechenden EMK OQ in Abb. 197 betrachtet werden.

Ist ein Transformator induktionsfrei belastet, so besteht die äußere Selbstinduktion bloß aus der des Streufeldes, das wie eine vorgeschaltete Drosselspule wirkt. Dann ist also die äußere Selbstinduktion nur gering, also auch die Phasenverschiebungen zwischen Klemmenspannung K_2, EMK E_2 und Strom J_2 klein.

155. Kurzschluß eines Transformators.

Für die Strombelastung eines Transformators gibt es zwei Grenzen. Die kleinste Stromstärke ist vorhanden, wenn der äußere sekundäre Widerstand unendlich groß ist, d. h. wenn der sekundäre Stromkreis offen ist. Man bezeichnet diesen Fall als

Leerlauf des Transformators, weil in diesem Fall keinerlei elektrische Leistung abgegeben wird. Für diesen Fall haben wir schon im Vorhergehenden gesehen, daß alle Verhältnisse so liegen, wie bei einem einzelnen Stromkreis (Drosselspule). Der äquivalente Widerstand ist gleich dem wirklichen, die äquivalente Selbstinduktion gleich der wirklichen und der Magnetisierungsstrom (§ 151) ist gleich dem Strom, der in die primäre Wickelung hineingeht (abgesehen von dem Wattverlust, wenn der Transformator einen Eisenkern enthält).

Die größte Stromstärke ist vorhanden, wenn der gesamte Widerstand des äußeren sekundären Kreises null ist, d. h. wenn die sekundäre Wickelung kurzgeschlossen ist. Es ist also in diesem Falle

$$w_{2a} = 0 \qquad L_{2a} = 0.$$

Der sekundäre Kreis besteht nun bloß aus der Wickelung selbst; mithin ist

$$w_{2i} = w_2 \qquad L_{2i} = L_2.$$

Bei einem normalen Transformator oder Induktionsmotor ist der Ohmsche Widerstand der Wickelung so klein gegenüber dem induktiven, daß nach der letzten Bezeichnung w_2^2 gegen $\omega^2 L_2^2$ vernachlässigt werden kann.

Dann geht die Gl. 135 über in

$$\varrho = w_1 + \frac{\varkappa^2 L_1}{L_2} w_2 = \frac{w_1 L_2 + \varkappa^2 w_2 L_1}{L_2}$$

$$\lambda = L_1 - \varkappa^2 L_1 = (1 - \varkappa^2) L_1.$$

Aus den Gl. 133b und 134 wird dann

$$J_1 = \frac{K_1 L_2}{\sqrt{(w_1 L_2 + \varkappa^2 w_2 L_1)^2 + \omega^2 (1 - \varkappa^2)^2 L_1^2 L_2^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega (1 - \varkappa^2) L_1 L_2}{w_1 L_2 + \varkappa^2 w_2 L_1}.$$

Aus den letzten Gleichungen des vorigen Paragraphen ergibt sich $K_2 = 0$ (weil $w_{2a} = 0$ und $L_{2a} = 0$), wie nicht anders zu erwarten war, da ja die sekundäre Wickelung kurzgeschlossen ist; ferner

$$\frac{J_2}{J_1} = \varkappa \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \varkappa \frac{N_1}{N_2} = \frac{\varkappa}{\ddot{u}}$$

Man sieht also, je kleiner $\varkappa$, d. h. je größer die Streuung ist, desto kleiner ist J_2 gegen J_1, desto größer aber φ_1. Unter sonst gleichen Umständen gibt also das Verhältnis dieser Ströme bei Kurz-

schluß der sekundären Wickelung ein Maß zur Beurteilung der gesamten Streuung. Es ist aber zu beachten, daß die Streuung mit der Stromstärke zunimmt, weil die Stauung der Kraftlinien zunimmt (§ 109).

Besteht keine Streuung, d. h. ist die magnetische Kupplung eine vollständige: $\varkappa = 1$, so ist $\lambda = 0$

$$J_1 = \frac{K_1}{w_1 + w_2 \frac{L_1}{L_2}} \qquad \operatorname{tg} \varphi_1 = 0 \qquad \varphi_1 = 0$$

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{N_1}{N_2} = ü.$$

In diesem Falle ist also der gesamte primäre Strom ein Wattstrom. Sowie aber eine Streuung vorhanden ist, ist $\varphi_1 > 0$ und daher auch ein wattloser Strom vorhanden. Der physikalische Grund liegt darin, daß für $\varkappa = 1$ das magnetische Feld null ist; denn aus der letzten Gleichung und Gl. 143a folgt

$$i_2 N_2 = - i_1 N_1$$

und daher nach Gl. 126 $\mathfrak{z} = 0$. Die primären und sekundären Amperewindungen heben sich gegenseitig auf. Daraus folgt, daß es keinen Magnetisierungsstrom, mithin auch keinen wattlosen Strom gibt. Wenn aber ein Streufeld besteht, gibt es auch einen entsprechenden Magnetisierungsstrom und daher auch eine wattlose Komponente im primären Strom. In Wirklichkeit ist die Streuung bei Kurzschluß verhältnismäßig groß, weil die Stauung der Kraftlinien mit der Stromstärke und mit der Phasenverschiebung zunimmt (§ 152).

In Abb. 201 ist das Diagramm der magnetischen Felder und Spannungen für den Fall des Kurzschlusses ausgeführt. Infolge der großen Stromstärke ist der Spannungsabfall $w_1 J_1$ und die dem Streufelde $\mathfrak{Z}_{1s}$ proportionale Streuspannung E_{1s} groß. Die dem Transformator von der Stromquelle aufgedrückte Klemmenspannung wird daher zum größten Teile von dem Spannungsabfall und der Streuspannung aufgezehrt, so daß die dritte Komponente OP und daher auch das von ihr abhängige gemeinsame Feld $\mathfrak{Z}$ klein ist. Daß $\mathfrak{Z}$ klein ist, trotzdem die beiden Stromstärken groß sind, erklärt sich daraus, daß ihre Phasenverschiebung nahezu 180^0 ist. Infolgedessen ist die Diagonale $\mathfrak{Z}$ des Parallelogrammes $OACB$ klein, trotzdem die Seiten groß sind.

Da also das gemeinsame Feld $\mathfrak{Z}$ klein ist, kann auch die von ihm in der sekundären Wickelung induzierte EMK OQ nur klein sein und wird von der sekundären Streuspannung und dem sekun-

dären Spannungsabfall volltändig aufgezehrt, denn die dritte Komponente, das ist die sekundäre Klemmenspannung, ist null, weil ja die sekundäre Wickelung kurzgeschlossen ist.

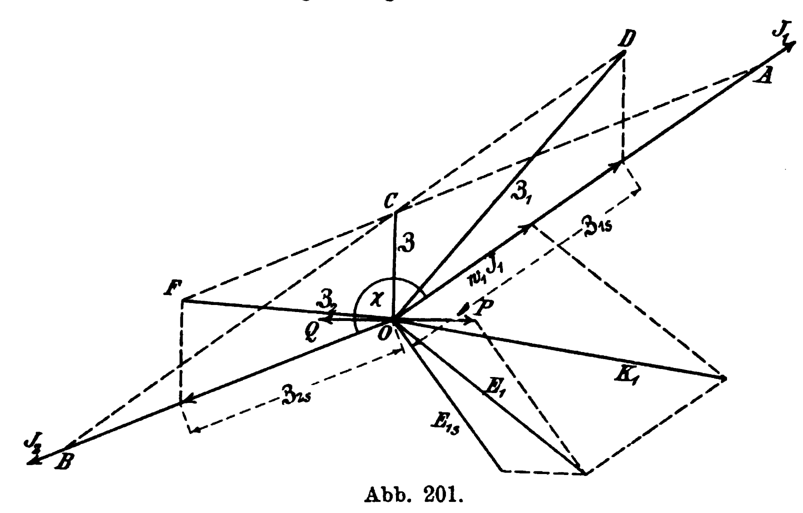


Abb. 201.

Das primäre Feld $\mathfrak{Z}_1$ ist nicht viel größer als das primäre Streufeld $\mathfrak{Z}_{1s}$, weil es zum größten Teil aus diesem besteht. Desgleichen ist das sekundäre Feld $\mathfrak{Z}_2$ nicht viel größer als das sekundäre Streufeld $\mathfrak{Z}_{2s}$, weil es zum größten Teil aus diesem besteht.

156. Elektrodynamische Schirmwirkung.

Als ein Stromkreis von sehr kleinem Widerstand ist eine Kupferplatte zu betrachten. Wird eine solche vor einen Wechselstromelektromagnet senkrecht zu den Kraftlinien gestellt (Abb. 202), so stellt die Anordnung einen Transformator dar, dessen primärer Stromkreis die Wickelung des Elektromagnetes ist, und dessen kurzgeschlossener sekundärer Stromkreis die Kupferplatte ist. Die Streuung ist aber hierbei sehr groß, weil der Eisenkern nicht durch den sekundären Stromkreis geht. Von der Streuung unabhängig ist die in § 148 abgeleitete Beziehung zwischen primärem und sekundärem Strom, wonach die Phasenverschiebung zwischen beiden nahezu 180° ist, so daß sie in jedem Augenblick einander entgegengesetzt sind. Da sich entgegengesetzte Ströme gegenseitig abstoßen (§ 116), so muß zwischen dem Elektromagnet und der Platte Abstoßung eintreten. Dasselbe ist der Fall, wenn statt der Platte ein geschlossener Kupferring verwendet wird.

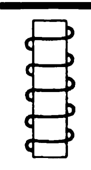


Abb. 202.

Untersucht man das magnetische Feld hinter einer solchen Platte von genügender Dicke, so findet man, daß es beinahe null ist. Macht man das Feld durch Eisenfeilspäne sichtbar, so erhält man die Abb. 203. Man ersieht aus ihr, daß die Eisenfeilspäne hinter der Platte ungeordnet liegen, so wie sie hingestreut wurden, weil das magnetische Feld dort verschwindend klein ist. Die Platte übt also eine Schirmwirkung auf den hinter ihr befindlichen Raum gegen die vom Elektromagnet kommenden Kraftlinien aus. Da die Ursache in den in der Platte induzierten Strömen liegt, bezeichnet man diese Schirmwirkung als elektrodynamische. Da die beiden Ströme um nahezu 180° verschoben sind, so ist das gemeinsame Feld $\mathfrak{Z}$ (Abb. 201) nahezu null. Die Kraftlinien, die

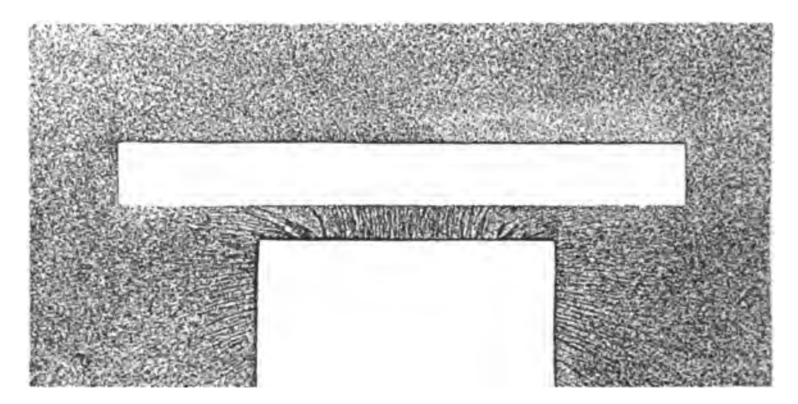


Abb. 203. Elektrodynamische Schirmwirkung einer Kupferplatte.

in Abb. 203 zu sehen sind, stellen das primäre Feld $\mathfrak{Z}_1$ dar. Das sekundäre Feld ist hier nicht zu erkennen, da es sehr schwach ist, weil der Eisenkern nicht durch die Platte hindurchgeht. Aus dem Bilde erkennt man auch deutlich die eigenartige Stauung der Kraftlinien durch die Platte. Die Stauung ist, wie in § 152 erwähnt, um so größer, je größer die Stromstärke ist und je näher die Phasenverschiebung an 180° kommt. Die elektrodynamische Schirmwirkung ist daher unter sonst gleichen Umständen um so stärker, je höher die Periodenzahl ist, weil dann die Phasenverschiebung um so näher an 180° kommt.

Die elektrodynamische Schirmwirkung unterscheidet sich von der elektromagnetischen (§ 101) dadurch, daß das von dem Elektromagnete herrührende Feld von dem des sekundären Stromes in der Platte zum Teil vernichtet wird, so daß das gemeinsame Feld nahezu null ist. Das primäre Feld besteht fast nur aus der primären Streuung, die wegen der Stauung sehr groß ist. Hingegen

besteht die elektromagnetische Schirmwirkung einer Eisenplatte darin, daß die Kraftlinien von ihr angesaugt und dadurch von dem Raum hinter der Platte ferngehalten werden. Die elektrodynamische Schirmwirkung ist noch unvollkommener als die elektromagnetische. Nur eine solche Platte, deren Widerstand null ist, vermag bei den in der Technik üblichen Periodenzahlen das Feld ganz abzuschirmen. Während die elektromagnetische Schirmwirkung in einem konstanten Felde keine Arbeit verbraucht, ist der Arbeitsverbrauch bei der elektrodynamischen Schirmwirkung um so größer, je vollkommener sie ist. Bei konstanter Spannung macht sich der Arbeitsverbrauch durch eine Zunahme der primären Stromstärke bemerkbar. Das ist noch mehr bei einer Eisenplatte der Fall, die zum Zwecke elektromagnetischer Schirmwirkung in ein Wechselfeld gebracht wird, weil in der Eisenplatte oder selbst nur in einem Eisenblech starke Wirbelströme induziert werden. Da aber die elektrodynamische Schirmwirkung einer Kupferplatte eine zu unvollkommene ist, kombiniert man beide. Auf die Seite, von der die Kraftlinien kommen, stellt man die Kupferplatte (Abb. 204) und hinter ihr die Eisenplatte. Die Kupferplatte schirmt zunächst den größten Teil der Kraftlinien ab. Diejenigen, die noch hindurchgehen, werden von der Eisenplatte vollständig abgeschirmt. Da ihre Anzahl nicht mehr groß ist, treten auch keine starken Wirbelströme auf. Unter Umständen kann man mehrere Kupfer- und Eisenplatten abwechselnd anordnen.

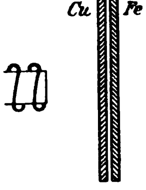


Abb. 204.

Über den Zusammenhang der elektrodynamischen Schirmwirkung mit dem Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit vgl. § 169.

157. Wechselstrommotor System Benischke.

Auf der elektrodynamischen Schirmwirkung beruht der asynchrone Wechselstrommotor[1]) des Verfassers (Abb. 205). Eine um die Achse A drehbare Kupfer- (oder Aluminium-)Scheibe S befindet sich zwischen den Polen des Wechselstromelektromagnetes M. Vor den Polen sitzen die Kupfer- (oder Aluminium-)Platten T, welche aber die Polflächen nur zum Teil bedecken. Das magnetische Feld zwischen den Polen induziert in den Platten und in der Scheibe geschlossene Ströme, welche durch die gestrichelten Linien angedeutet sind. Gleichzeitig wird durch diese Platten jener Teil

[1]) D.R.P. Nr. 86553 vom 5. April 1895, ETZ 1895, S. 368; 1899, S. 82.

der Scheibe , welcher sich jeweils zwischen ihnen befindet, gegen das magnetische Feld abgeschirmt, so daß in diesem Teil keine oder nur schwache Ströme induziert werden. Im wesentlichen liegen also die in der Scheibe induzierten, geschlossenen Ströme links neben den Platten. Da diese und die Ströme in den schirmenden Platten von demselben magnetischen Felde induziert werden, so haben sie gleichen und parallelen Verlauf und ziehen sich daher gegenseitig an (§ 116); die Scheibe *S* dreht sich also in der Richtung des Pfeiles gegen die Platten hin. Wären die schirmenden Platten nicht vorhanden, so könnte eine Drehung der

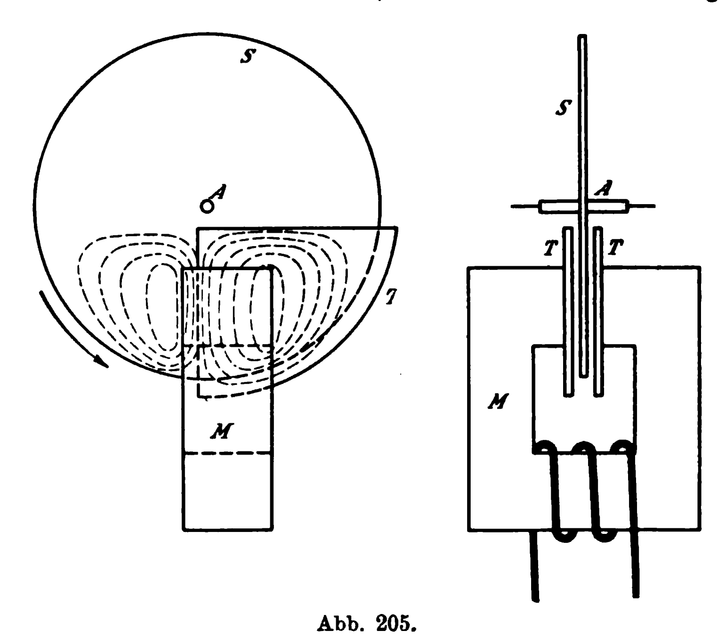


Abb. 205.

Scheibe nicht eintreten, sondern sie würde wie in Abb. 202 von jedem Pole Abstoßungen in der Richtung der Kraftlinien erleiden, die sich gegenseitig aufheben.

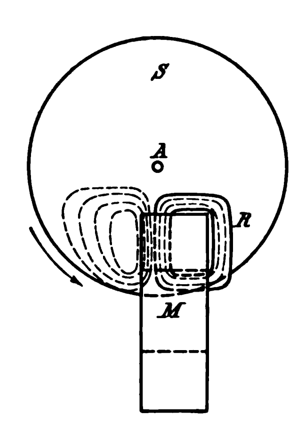
Dieser Wechselstrommotor zeichnet sich dadurch aus, daß seine Umlaufsgeschwindigkeit von der Periodenzahl des Wechselstromes unabhängig und daher absolut asynchron ist, und daß er von selbst anläuft. Der Wirkungsgrad ist aber wegen der großen Stromwärmeverluste in den Platten und in der Scheibe sehr klein, so daß dieses Prinzip nur für ganz kleine Motoren, wo der Wirkungsgrad keine Rolle spielt, angewendet werden kann, wie z. B. für den Reguliermechanismus bei den Wechselstrom-Bogenlampen der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft (Abb. 206; hier wirken zwei

Magnetsysteme auf eine Scheibe, da es eine Differentiallampe ist). Wird die Scheibe mit einer Feder als Gegenkraft versehen, welche sie in eine bestimmte Ruhelage zurückbringt, so dient dieser Motor als Wechselstrommeßinstrument[1]) (vgl. § 261).



Abb. 206.

Statt der massiven Platten *T* können auch Kupferringe *R* (Abb. 207) verwendet werden[2]), da ja die Schirmwirkung nicht von dem Material als solchen, wie bei der elektromagnetischen Schirmwirkung, sondern von den sekundären Strömen herrührt. Zwischen den Strömen in den Ringen und in der Scheibe besteht dieselbe Anziehung wie zwischen den Strömen in den Platten und in der Scheibe.



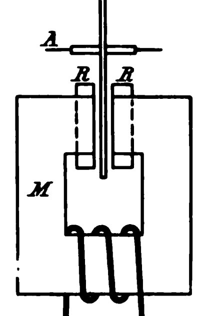


Abb. 207.

Über ein anderes Motorprinzip von gleicher Wirkung vgl. § 254.

[1]) D.R.P. Nr. 84871 vom 5. Juli 1895, ETZ 1899, S. 82.
[2]) D.R.G.M. Nr. 82371 vom 29. Juni 1897.

158. Transformatoren in Hintereinanderschaltung.

Die meisten Apparate mit gegenseitiger Induktion, sowohl Transformatoren wie Induktionsmotoren, werden in der Elektrotechnik zumeist so angewendet, daß sie an konstante Klemmenspannung angeschlossen sind. Dann ändert sich (nach § 146) die primäre Stromstärke in gleichem Sinne, wie die sekundäre, wenn auch nicht proportional. Transformatoren werden manchmal aber in Hintereinanderschaltung (Abb. 208), namentlich zum Betriebe von Glühlampen oder Bogenlampen angewendet. Hier hängt nun die primäre Stromstärke eines einzelnen Transformators nicht von der sekundären ab, sondern es kann eine beliebige Stromstärke hindurchgeschickt werden, während die sekundäre Stromstärke davon abhängt, was angeschlossen ist. Es gelten natürlich auch da alle in den vorstehenden Paragraphen abgeleiteten Gesetze; es sind nur andere Betriebsbedingungen.

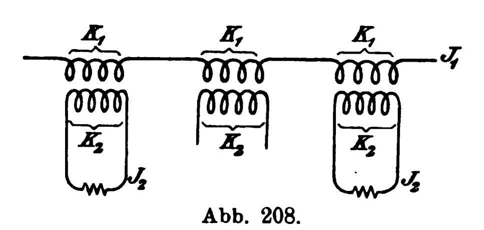


Abb. 208.

Um die Wirkungsweise hintereinandergeschalteter Transformatoren zu übersehen, nehmen wir an, daß die Stromstärke in der primären Wickelung konstant gehalten wird. Dann ist (nach Gl. 133b),

$$K_1 = J_1 \sqrt{\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2}$$

d. h. die primäre Klemmenspannung ist proportional dem äquivalenten scheinbaren Widerstand. Ist der sekundäre Stromkreis offen, so ist der äquivalente scheinbare Widerstand gleich dem scheinbaren $\sqrt{w_1^2 + \omega^2 L_1^2}$, und der Transformator verhält sich so wie eine mit Strom beschickte Drosselspule. Wird der sekundäre Stromkreis geschlossen, so nimmt die primäre Klemmenspannung mit wachsendem sekundären Strom ab, weil der äquivalente scheinbare Widerstand abnimmt. Infolgedessen ist bei mehreren hintereinandergeschalteten Transformatoren die primäre und daher auch die sekundäre Klemmenspannung verschieden je nach ihrer sekundären Stromstärke; bei einem, dessen sekundärer Stromkreis offen ist (wie bei dem mittleren in Abb. 208), ist sie am größten. Da sich die Kraftlinienmenge in demselben Sinne ändert, wie die Klemmenspannung, so ist auch sie bei offenem Sekundärkreis am größten.

Man kann sich das Verhalten eines so geschalteten Trans-

formators auch nach dem Diagramm (Abb. 198) zurechtlegen. Ist kein sekundärer Strom vorhanden, so ist das magnetische Feld $\mathfrak{Z}$ wie bei einer Drosselspule durch die MMK $4\pi \mathfrak{J}_1 N_1$ bestimmt, wächst also bei konstantem magnetischen Widerstand proportional der Stromstärke. Wird ein sekundärer Strom abgenommen, so setzt sich das gemeinsame Feld $\mathfrak{Z}$ aus den fiktiven Feldern der primären und sekundären Wickelung zusammen. Da diese nahezu entgegengesetzt sind, so ist das Feld im allgemeinen um so kleiner, je größer der sekundäre Strom ist.

159. Selbstinduktion und gegenseitige Induktion in Hintereinanderschaltung. Wirksame Selbstinduktion.

Befinden sich zwei Spulen mit den Selbstinduktionen L_1, L_2 in Hintereinanderschaltung (Abb. 209 und 210) und üben sie eine gegenseitige Induktion aufeinander aus, deren Koeffizient M sei, so summieren sich in jeder Spule in jedem Augenblick die EMK der Selbstinduktion und die von der anderen Spule herrührende EMK der gegenseitigen Induktion. Bezeichnen wir diese Summe mit e_1 bzw. e_2, so ist die Klemmenspannung an der einen Spule (nach Gl. 104)

$$k_1 = i w_1 - e_1$$

und an der anderen Spule

$$k_2 = i w_2 - e_2.$$

Abb. 209.

Abb. 210.

Für die Bestimmung von e_1 und e_2 sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob die beiden Spulen im gleichen Sinne vom Strome durchflossen werden wie in Abb. 209, oder im entgegengesetzten Sinne wie in Abb. 210 (Gegenschaltung).

Im ersten Falle addieren sich in jeder Spule die EMK der Selbstinduktion $-L_1 \frac{di}{dt}$ beziehungsweise $-L_2 \frac{di}{dt}$ und die der gegenseitigen Induktion $-M \frac{di}{dt}$. Es ist also

$$-e_1 = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = (L_1 + M) \frac{di}{dt}$$

$$-e_2 = L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = (L_2 + M) \frac{di}{dt}.$$

Die Klemmenspannung an der ersten Spule lautet also

$$k_1 = i w_1 + (L_1 + M) \frac{di}{dt}$$

und an der zweiten

$$k_2 = i w_2 + (L_2 + M) \frac{di}{dt}.$$

Jede dieser Gleichungen hat dieselbe Form wie für einen einzelnen Stromkreis (§ 132, Gl. 105) nur mit dem Unterschied, daß an Stelle der für eine einzelne Spule geltenden Selbstinduktion der Wert

beziehungsweise
$$\left.\begin{aligned} L_1 + M &= \Lambda_1 \\ L_2 + M &= \Lambda_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (169)$$

getreten ist. Man bezeichnet daher Λ_1 und Λ_2 als **wirksame Selbstinduktion**, während L_1, L_2 die Selbstinduktion für den Fall bedeuten, daß jede Spule für sich allein vorhanden ist. Wo L_1, L_2, M wie hier als Summanden einer wirksamen Selbstinduktion erscheinen, bezeichnet man sie als **Teilinduktionen**.

Für die gesamte EMK der beiden hintereinandergeschalteten Spulen gilt in jedem Augenblick die Summe aller 4 Teilinduktionen, so daß die gesamte Klemmenspannung k bestimmt ist durch

$$k = i (w_1 + w_2) + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.$$

Diese Gleichung hat ebenfalls dieselbe Form wie für eine einzelne Spule, wenn man

$$L_1 + L_2 + 2\mathrm{M} = \Lambda \quad \ldots \ldots \quad (170)$$

wiederum als **wirksame Selbstinduktion** bezeichnet.

Umschließt jede Windung beider Spulen die gesamte Kraftlinienmenge, so muß sich derselbe Wert ergeben, wenn man beide Spulen als eine betrachtet, und ihre Selbstinduktion nach § 120 berechnet, oder wenn man sie als wirksame Selbstinduktion nach der letzten Gleichung aus der Summe der Teilinduktionen berechnet. Sind N_1, N_2 die Windungszahlen der beiden Spulen, so ist nach § 120

$$L = \frac{4\pi (N_1 + N_2)^2}{\mathfrak{w}}.$$

Die Teilinduktionen sind

$$L_1 = \frac{4\pi N_1^2}{\mathfrak{w}}$$

$$L_2 = \frac{4\pi N_2^2}{\mathfrak{w}}$$

$$M = \frac{4\pi N_1 N_2}{\mathfrak{w}}.$$

Demnach ist

$$\Lambda = \frac{4\pi}{\mathfrak{w}}(N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2) = \frac{4\pi(N_1 + N_2)^2}{\mathfrak{w}}.$$

Es ist also tatsächlich

$$\Lambda = L.$$

Werden hingegen die beiden Spulen im entgegengesetzten Sinn vom Strom durchflossen wie in Abb. 210 (Gegenschaltung), so ist die EMK in den beiden Spulen

$$-e_1 = (L_1 - M)\frac{di}{dt}$$

$$-e_2 = (L_2 - M)\frac{di}{dt}.$$

Daher ist die wirksame Selbstinduktion der einen Spule

und in der anderen

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1 &= L_1 - M \\ \Lambda_2 &= L_2 - M \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (171)$$

Die gesamte wirksame Selbstinduktion beider Spulen ist

$$\Lambda = L_1 + L_2 - 2M \quad \ldots\ldots \quad (172)$$

Wir gelangen also zu dem allgemeinen Satz, daß die wirksame Selbstinduktion eines aus mehreren Teilen bestehenden Stromleitersystemes gleich der algebraischen Summe sämtlicher Teilinduktionen ist. Dabei sind die Teilinduktionen, welche eine im gleichen Sinne wie der Ohmsche Spannungsabfall iw wirkende EMK erzeugen mit positiven Vorzeichen, die im entgegengesetzten Sinne wirkenden mit negativen Vorzeichen einzusetzen.

Hat man mehr als zwei Spulen, z. B. drei, und sind L_1, L_2, L_3 ihre Selbstinduktionen, jede für sich allein betrachtet, ferner M_{12} die gegenseitige Induktion zwischen der 1. und 2. Spule, M_{13} die zwischen der 1. und 3. Spule, M_{23} die zwischen der 2. und 3. so als

wenn in jedem Fall nur die betreffenden zwei Spulen vorhanden wären, so ist die wirksame Selbstinduktion der ersten Spule

$$\Lambda_1 = L_1 + M_{12} + M_{13}$$

Die der zweiten Spule

$$\Lambda_2 = L_2 + M_{12} + M_{23},$$

die der dritten Spule

$$\Lambda_3 = L_3 + M_{13} + M_{23}$$

und die wirksame Selbstinduktion aller drei Spulen zusammen, wenn sie hintereinander geschaltet sind

$$\Lambda = L_1 + L_2 + L_3 + 2M_{12} + 2M_{13} + 2M_{23}.$$

160. Induktionsfreie Stromkreise.

Haben bei der Gegenschaltung zweier Spulen (Abb. 210) beide dieselbe Windungszahl ($N_1 = N_2 = N$) und werden sämtliche Kraftlinien von sämtlichen Windungen umschlossen, so ist nach Gl. 172

$$\Lambda = \frac{4\pi N^2}{\mathfrak{w}} + \frac{4\pi N^2}{\mathfrak{w}} - 2\,\frac{4\pi N^2}{\mathfrak{w}} = 0.$$

Die gesamte wirksame Selbstinduktion ist also null. Das wird benützt, um möglichst induktionsfreie Widerstandsspulen herzustellen. Zu diesem Zweck wickelt man den Widerstandsdraht in mehreren (eine gerade Zahl bildenden) Lagen übereinander und zwar so, daß jede folgende entgegengesetzte Stromrichtung hat gegenüber der vorhergehenden. Freilich besteht dann immer noch so viel Selbstinduktion, als der ganze Draht haben würde, wenn er als Schleife mit nebeneinander liegenden Hälften ausgespannt würde. Wieviel das ist, ergibt sich aus folgendem.

Sind zwei parallele Drähte von der Länge l, dem Radius r und dem gegenseitigen Abstand a so vom Strom durchflossen, daß er in dem einen hin, im anderen zurückgeht (Stromschleife), so ist die Selbstinduktion jedes einzelnen, für sich allein betrachtet, nach § 120

$$L_1 = L_2 = 2l\left(\lg\text{nat}\,\frac{2l}{r} - 1 + \frac{\mu}{4}\right)$$

und die gegenseitige Induktion nach § 118

$$M = 2l\left(\lg\text{nat}\,\frac{2l}{a} - 1\right).$$

Da der Strom in den beiden Drähten entgegengesetzte Richtung hat, so ist der letzte Wert negativ einzusetzen. Dann ist nach

dem vorigen Paragraphen die **wirksame** Selbstinduktion jedes der beiden Drähte

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = L_1 - M = 2l\left[\lg \text{nat}\frac{2l}{r} - 1 + \frac{\mu}{4} - \left(\lg \text{nat}\frac{2l}{a} - 1\right)\right]$$
$$= 2l\left(\lg \text{nat}\frac{a}{r} + \frac{\mu}{4}\right).$$

Die gesamte wirksame Selbstinduktion beider Drähte in Hintereinanderschaltung ist dann gleich dem Doppelten eines Drahtes, also

$$\Lambda = 4l\left(\lg \text{nat}\frac{a}{r} + \frac{\mu}{4}\right).$$

Wie man sieht, ist dieser Ausdruck gleich dem in § 120c.

Aus den beiden letzten Formeln ergibt sich, daß die wirksame Selbstinduktion unter sonst gleichen Umständen um so kleiner ist, je kleiner ihr Abstand a ist. Da a von den beiden Achsen aus zu rechnen ist, so kann a praktisch nicht kleiner werden als der doppelte Radius $2r$. Dies eingesetzt gibt für den Fall, daß zwei unmagnetische Drähte nebeneinander liegen, für die wirksame Selbstinduktion jedes der beiden

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = 2l\left(\lg \text{nat}\, 2 + \frac{1}{4}\right) = 1{,}89\,l$$

und der ganzen Stromschleife

$$\Lambda = 3{,}78\,l.$$

Man kann daher möglichst induktionsfreie Widerstandspulen auch in der Weise herstellen, daß die Wickelung, wie Abb. 211 zeigt, aus einem doppelten (**bifilaren**) Draht hergestellt wird, wo der Strom in dem einen hin, im anderen zurückgeht. Infolgedessen ist die Selbstinduktion sämtlicher Windungen ebenso null, wie wenn die übereinander liegenden Lagen in entgegengesetztem Sinne gewickelt sind. Die letztere Wickelungsart hat aber den Vorteil, daß Anfang und Ende nicht unmittelbar nebeneinander zu liegen kommen, wie bei der rein bifilaren Wickelung, so daß sie eine höhere Spannung aushalten kann.

Abb. 211.

Beispiel. Für einen derart aufgewickelten Widerstandsdraht von 0,01 cm Radius und 100 m gesamter Länge ist für die eine sowie für die andere Wickelungsart $l = 50$ m; also

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1{,}89 \cdot 5000 = 9450 \text{ abs. Einh.} = 9450 \cdot 10^{-9} \text{ Henry}$$

und

$$\Lambda = 18900 \cdot 10^{-9} \text{ Henry}.$$

Wäre der ganze Draht gerade ausgespannt, so wäre die Selbstinduktion ($l = 100$ m)

$$L = 20000\left(\lg \operatorname{nat} \frac{20000}{0,01} - \frac{3}{4}\right) = 275000 \text{ abs. Einh.} = 275000 \cdot 10^{-9} \text{ Henry.}$$

Für eine einzelne Kupferleitung von 1000 m Länge, 0,5 cm Radius ist

$$L_1 = 0,00243 \text{ Henry.}$$

Kommt eine zweite parallele Leitung im Abstand von 1 cm hinzu (zweiadriges Kabel), so ist (§ 118 Beispiel)

$$M = 0,00224 \text{ Henry.}$$

Daher ist die wirksame Selbstinduktion jeder der beiden Drähte

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = L_1 - M = 0,00019 \text{ Henry}$$

und die gesamte hei Hintereinanderschaltung beider Drähte

$$\Lambda = 0,00038 \text{ Henry.}$$

161. Stromverzweigung bei gegenseitiger Induktion.

In § 141 und 142 wurden die Gesetze, nach welchen sich ein Wechselstrom zwischen zwei Zweigen mit Widerstand und Selbstinduktion verteilt, abgeleitet. Üben die beiden Zweige außerdem noch eine gegenseitige Induktion aufeinander aus (Abb. 212), so sind wie bei Hintereinanderschaltung (§ 159) zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob die beiden Zweige in demselben Sinn (Abb. 209) oder im entgegengesetzten Sinn (Abb. 210) aufeinander wirken.

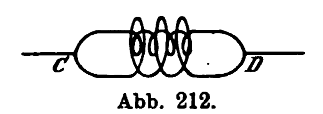


Abb. 212.

Im ersten Falle gelten für die beiden Stromzweige folgende Gleichungen, wenn k die Spannung zwischen den Verzweigungspunkten CD bedeutet

$$k = i_1 w_1 + L_1 \frac{d i_1}{d t} + M \frac{d i_2}{d t}$$

$$k = i_2 w_2 + L_2 \frac{d i_2}{d t} + M \frac{d i_1}{d t}.$$

Daraus folgt als Bedingungsgleichung für die Stromverteilung in jedem Augenblick

$$i_1 w_1 + (L_1 - M) \frac{d i_1}{d t} = i_2 w_2 + (L_2 - M) \frac{d i_2}{d t}.$$

Das ist dieselbe Form wie die Bedingungsgleichung 122, S. 224, nur mit dem Unterschied, daß an Stelle der einfachen Selbstinduktion der Wert

und

$$\left.\begin{aligned} L_1 - M &= \Lambda_1 \\ L_2 - M &= \Lambda_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

getreten ist. Dasselbe gilt natürlich für parallel liegende, nebeneinander geschaltete Drähte.

Sind die beiden Spulen im entgegengesetzten Sinne geschaltet, so gilt dasselbe, nur ist M mit negativem Vorzeichen einzuführen, so daß also für diesen Fall die wirksamen Selbstinduktionen

$$\left.\begin{aligned} L_1 + M = \Lambda_1 \\ L_2 + M = \Lambda_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$

sind.

Es ist zu beachten, daß hier, bei der Parallelschaltung zweier Spulen mit gegenseitiger Induktion, das Umgekehrte gilt, wie bei der Hintereinanderschaltung, daß nämlich bei gleichem Wickelungssinn M hier mit negativem Vorzeichen, dort aber mit positivem Vorzeichen einzuführen ist und umgekehrt.

Wir können nun die in § 141 und 142 erhaltenen Ergebnisse für die effektiven Werte und die Phasenverschiebungen bei einer Stromverzweigung ohne weiteres hier anwenden, wenn wir die einfachen Selbstinduktionen L_1, L_2 durch die wirksamen Selbstinduktionen Λ_1, Λ_2 ersetzen.

Beispiel. Wir nehmen dieselben zwei Kupferdrähte, wie im letzten Beispiel des vorigen Paragraphen, aber jetzt in Parallelschaltung. Dann ist nach dem vorstehenden $\Lambda_1 = \Lambda_2 = L_1 - M = 0{,}00019$ Henry (abgerundet 0,0002). Der Ohmsche Widerstand jedes Drahtes (abgerundet) ist $w_1 = w_2 = 0{,}2$ Ohm. Daher ist (nach S. 227) der äquivalente Widerstand der ganzen Verzweigung $R = 0{,}1$ und die äquivalente Selbstinduktion $O = 0{,}0001$.

Ein einziger runder Draht mit demselben Ohmschen Widerstand wie die zwei parallelgeschalteten, also mit dem doppelten Querschnitt, würde einen Radius von ungefähr $r = 7$ mm haben müssen. Seine Selbstinduktion wäre nach § 120 $L = 0{,}00236$, also beträchtlich größer als die äquivalente Selbstinduktion O der beiden parallelgeschalteten Drähte.

Ein breites, dünnes Metallband kann man als eine große Anzahl von nebeneinander gereihten, parallelgeschalteten dünnen Drähten betrachten. Dann folgt aus dem vorstehenden, daß die Selbstinduktion eines solchen Bandes kleiner sein muß als die eines runden Drahtes von gleichem Ohmschen Widerstand. Aus diesem Grunde werden genaue Meßwiderstände für große Stromstärken entweder aus parallelgeschalteten Drähten oder aus Blechen angefertigt.

162. Wirbelströme.

Eine Induktion sekundärer Ströme findet nicht nur in linearen, geschlossenen Leitern statt, sondern auch in jeder beliebig gestalteten leitenden Masse, wenn sie von Kraftlinien eines wechselnden magnetischen Feldes getroffen wird, weil eine leitende Masse immer die Gelegenheit zur Ausbildung von in sich geschlossenen

Strömen bietet. Da nach § 124 die stärkste elektrische Induktion dann stattfindet, wenn die Stromfläche senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien steht, so werden die Stromflächen der sich ausbildenden Ströme senkrecht zu den Kraftlinien stehen, falls die Gestalt der leitenden Masse dies zuläßt.

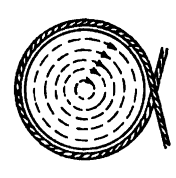


Abb. 213.

Besonders stark treten diese Ströme in einem massiven Eisenkern auf, welcher in eine von Wechselstrom durchflossene Spule geschoben wird. Ihre Stromflächen müssen parallel zu den Windungen der Spule liegen, wie in Abb. 213 durch die gestrichelten Linien angedeutet ist, weil die Kraftlinien senkrecht zu diesen verlaufen. Sie werden daher Wirbelströme genannt.

Da der Ohmsche Widerstand der Strombahnen, namentlich in Kupfer- und Eisenmassen meist sehr klein ist, so sind die Wirbelströme dem induzierenden Strome nahezu entgegengesetzt gerichtet (§ 148) und vermindern dementsprechend das magnetische Feld, wenn die Stromstärke in der Spule konstant gehalten wird, oder sie bewirken eine Vergrößerung des Stromes in der Spule, wenn die Spannung konstant gehalten wird. Auf den Stromkreis der Spule können nicht mehr die Gesetze des einfachen Wechselstromkreises angewendet werden, sondern die in § 146 abgeleiteten Gesetze für einen primären Stromkreis unter dem Einfluß eines sekundären Stromes; das heißt statt des wahren Ohmschen Widerstandes w kommt der äquivalente ϱ, statt der wahren Selbstinduktion L die äquivalente Selbstinduktion λ und statt des scheinbaren Widerstandes $\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}$ der äquivalente $\sqrt{\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2}$ in Betracht.

Die Wirbelströme entwickeln nach dem Jouleschen Gesetze eine dem Quadrate ihrer Stromstärke und dem Widerstande ihrer Strombahn proportionale Wärmemenge, deren Äquivalent in Form von elektrischer Leistung von der Stromquelle geliefert werden muß, was sich bei konstanter Spannung durch eine Vergrößerung der Stromstärke und eine Verkleinerung der Phasenverschiebung bemerkbar macht. Diese in Verlust gehende Leistung und die unter Umständen schädliche Temperaturerhöhung sind natürlich höchst unerwünscht, und man sucht daher die Wirbelströme möglichst zu vermeiden. Dies wird dadurch erreicht, daß man den Weg der Wirbelströme möglichst oft durchschneidet. Bei Eisenkernen geschieht dies dadurch, daß man sie durch möglichst viele nichtleitende Schichten unterteilt, indem man sie aus Eisenblechen oder -Drähten zusammensetzt. Diese müssen mit ihrer Längenausdehnung parallel zu den Kraftlinien liegen, weil, wie oben erwähnt, die Stromflächen der Wirbelströme senkrecht zu den Kraftlinien liegen.

Eine Unterteilung der Eisenkerne senkrecht zu den Kraftlinien wäre zwecklos, weil sie dem Verlauf der Wirbelströme in keiner Weise hinderlich wäre. Für die weitaus größte Zahl aller Wechselstromapparate werden zur Herstellung der Eisenkerne Bleche von 0,5 mm Dicke, seltener solche von 0,7 mm (bei Wechselstrom-Erzeugermaschinen), noch seltener solche von 1 mm verwendet. Für Transformatoren, wo man manchmal auf besonders geringe Verluste Wert legt, werden zuweilen 0,3 mm Bleche angewendet.

Zwischen den Blechen darf natürlich keine gut leitende Berührung bestehen. Sie werden daher meist lackiert oder es wird dünnes Papier zwischengelegt, das in der Regel schon vor der Bearbeitung auf eine Seitenfläche der Blechtafeln aufgeklebt wird. Bei kleinen Kernen oder geringer Kraftliniendichte genügt fast immer schon die vom Ausglühen der Bleche herrührende Oxydschichte (Zunderschichte) als isolierende Schicht. Bei ausgeglühten Drähten genügt sie immer.

Um stärkere Wirbelströme zu vermeiden, müssen bei Wechselstromapparaten auch alle anderen gut leitenden Metallmassen oder geschlossenen Stromkreise im Bereiche der Kraftlinien vermieden werden. Spulenträger aus Metall schneidet man daher durch einen Schnitt parallel zur Kraftlinienrichtung auf, oder man verfertigt sie aus schlecht leitenden Metallen wie Konstantan oder Manganin, oder man verwendet dazu isolierende Stoffe, wie Pappe, Preßspan, Holz, Stabilit, Hartgummi usw. Klammern zum Zusammenhalten der Eisenbleche oder -Drähte dürfen aus diesem Grunde auch nicht aus gut leitendem Metall hergestellt werden. Werden die Bleche, wie dies gewöhnlich geschieht, zusammengenietet, so dürfen die Nieten mit den Blechen keine geschlossenen Stromkreise bilden, deren Flächen von den Kraftlinien getroffen werden, wie in Abb. 214, sondern nur solche, die parallel zu den Kraftlinien sind, wie Abb. 215 zeigt, oder die Nieten müssen aus schlecht leitendem Metall sein, oder durch eine isolierende Buchse gehen.

Abb. 214. Abb. 215.

Die Abhängigkeit des Leistungsverlustes durch Wirbelströme a_w von den Bestimmungsgrößen ergibt sich aus folgender Ableitung. Nach dem Jouleschen Gesetz ist die Wärmeleistung

$$a_w = w_2 J_2^2$$

wenn J_2 die Stromstärke der Wirbelströme in einem Eisenkern, w_2 den Widerstand ihrer Strombahn bedeutet. Nach Gl. 140 ist

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\omega M \mathfrak{J}_1}{\sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}}$$

wobei L_2 die Selbstinduktion der Strombahn der Wirbelströme, und $\mathfrak{J}_1$ den primären Strom, das ist in diesem Fall der Strom in der Magnetisierungsspule, bedeutet.

Da nach § 131 $J_2 = \frac{\mathfrak{J}_2}{\sigma_i}$ ist, wenn σ_i den Scheitelfaktor der Wirbelströme bedeutet und $\omega = 2\pi\nu$, so ist

$$J_2 = \frac{2\pi\nu M \mathfrak{J}_1}{\sigma_i \sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}},$$

Nach Gl. 107 (S. 207) ist

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{N_1 \mathfrak{Z}}{L_1} = \frac{N_1 S \mathfrak{B}}{L_1}$$

wobei N_1 die Windungszahl, L_1 die Selbstinduktion der Spule und S den Querschnitt des Eisenbleches oder Drahtes, aus dem der Eisenkern zusammengesetzt ist, bedeutet.

Mithin ist

$$J_2 = \frac{2\pi\nu M N_1 S \mathfrak{B}}{\sigma_i L_1 \sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}}.$$

Der Ausdruck $\frac{2\pi M N_1 S}{\sigma_i L_1}$ ist für eine bestimmte Draht- oder Blechstärke konstant, weil sämtliche Faktoren konstant sind mit Ausnahme von M und L_1, welche von der magnetischen Durchlässigkeit μ abhängen, die für Eisen je nach der Kraftliniendichte verschieden ist. Da aber M im Zähler und L_1 im Nenner steht, so fällt μ aus diesem Ausdruck heraus, der nun bloß von den geometrischen Verhältnissen des Eisens, von der Wickelung und vom Scheitelfaktor abhängt. Setzen wir diesen Ausdruck gleich c, so ist

$$J_2 = c \frac{\nu \mathfrak{B}}{\sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}}$$

und demnach

$$a_w = c^2 w_2 \frac{\nu^2 \mathfrak{B}^2}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (175)$$

Für Eisenbleche oder Drähte von 0,5 mm Dicke oder weniger ist der Ohmsche Widerstand der Wirbelstrombahnen so groß, daß $\omega^2 L_2^2$ gegen w_2^2 vernachlässigt werden kann. Dann geht die letzte Gleichung über in

$$a_w = \frac{c^2}{w_2} \nu^2 \mathfrak{B}^2 \text{ absol. Einh.}$$

Setzt man

$$\frac{c^2}{w_2} = \beta$$

so ist

$$a_w = \beta \nu^2 \mathfrak{B}^2 \text{ absol. Einh.}$$

oder da 10^{-7} absol. Einh. gleich ein Watt sind (Kap. 17)

$$a_w = \beta \nu^2 \mathfrak{B}^2 \cdot 10^{-7} \text{ Watt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175\text{a})$$

Den Faktor $\beta = \frac{c^2}{w_2} = \left(\frac{2\pi M N_1}{\sigma_i L_1}\right)^2 \cdot \frac{S^2}{w_2}$ bezeichnet man als Wirbelstromkoeffizient. Wie man sieht, ist er unter sonst gleichen Verhältnissen proportional dem Quadrate des Blech- oder Drahtquerschnittes, also auch proportional dem Quadrate der Blechdicke d, und verkehrt proportional dem Widerstand w_2, also auch verkehrt proportional dem spezifischen Widerstand des Eisens. Da dieser mit der Temperatur zunimmt, so nimmt der Wirbelstromverlust mit der Temperatur ab. In der Konstanten c ist der Scheitelfaktor der Wirbelstromwellen enthalten. Da man diesen weder theoretisch noch experimentell bestimmen kann, kann man ihn aus der Konstanten nicht herausnehmen. Messungen haben aber ergeben, daß die Konstante innerhalb gewisser Grenzen mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit dem Scheitelfaktor σ_e der Spannungswelle in der Magnetisierungsspule proportional ist. Demnach kann der Wirbelstromkoeffizient β dargestellt werden durch

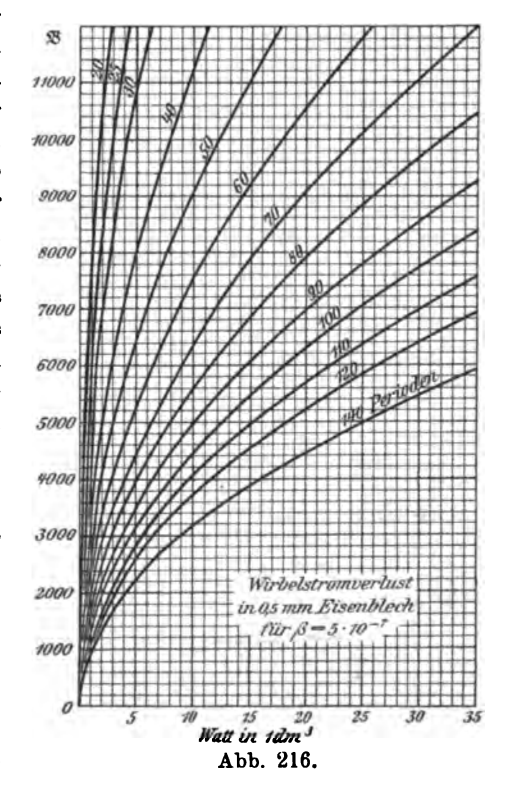


Abb. 216.

$$\beta = \delta d^2 \sigma_e (1 - \gamma t)$$

wobei d die Blech- oder Drahtdicke, t die Temperatur und γ den Temperaturkoeffizienten des Eisens bedeutet. δ ist dann eine von der Blech- oder Drahtdicke, der Spannungswelle und der Temperatur unabhängige

Konstante. Für gewöhnliche Eisenbleche bis zu 1 mm Dicke hat sich aus den Messungen des Verfassers[1])

$$\delta = 15{,}4 \cdot 10^{-7}$$

ergeben. Demnach ist z. B., wenn $\gamma = 0{,}0046$ angenommen wird, für Bleche von 0,5 mm Dicke, bei 20° C. und für 1 cm³

$$\beta = 5 \cdot 10^{-7}, \quad \text{bei } 70^0 \text{ C. aber} \quad \beta = 3{,}6 \cdot 10^{-7}.$$

Die Konstante δ enthält den spezifischen Widerstand des Eisens; sie ist also je nach der Herkunft des Eisens verschieden. In neuer Zeit ist es gelungen, durch Legierung mit Aluminium u. dgl. Eisenbleche herzustellen, deren spezifischer Widerstand verhältnismäßig groß, δ und β also verhältnismäßig klein ist. So ergab sich für derartige von Capito & Klein (Benrath) hergestellte Bleche von 0,5 mm Dicke bei 20° C. $\beta = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$. Dabei ist der Verlust durch Hysterese (vgl. folgende Paragraphen) noch kleiner als bei guten Blechen von gewöhnlichem Eisen.

Abb. 216 enthält Kurven, welche den Wirbelstromverlust in Watt für verschiedene Kraftliniendichten und Frequenzen und für $\beta = 5 \cdot 10^{-7}$ pro 1 cm³ sofort abzulesen gestatten, jedoch nicht für 1 cm³, sondern den praktischen Rechnungen entsprechender für 1 dm³.

163. Hystereseverlust bei periodischer Magnetisierung.

Im Eisenkern irgend eines Wechselstromapparates tritt außer dem Verlust durch Wirbelströme auch noch ein Arbeitsverlust durch magnetische Hysterese auf, der (nach § 98) für einen magnetischen Kreisprozeß, also für eine Periode eines Wechselstromes bestimmt ist durch $\eta \mathfrak{B}^{1,6}$, wobei $\mathfrak{B}$ den Scheitelwert der Kraftliniendichte und η den Hysteresekoeffizienten bedeutet. Hat der Wechselstrom ν Perioden in einer Sekunde, so ist der Arbeitsverlust in einer Sekunde, also der Verlust an nutzbarer Leistung a_h

$$a_h = \eta \nu \mathfrak{B}^{1,6} \cdot 10^{-7} \text{ Watt,}$$

wobei η für 1 cm³ gewöhnlichen (in der Elektrotechnik verwendeten) Eisenbleches zwischen 0,0015 und 0,002 liegt. Abb. 217 enthält Kurven, welche den Hystereseverlust in Watt für $\eta = 0{,}0018$ sofort abzulesen gestatten, jedoch nicht für 1 cm³, sondern den praktischen Rechnungen entsprechender für 1 dm³.

Es ist zu beachten, daß $\mathfrak{B}$ den Scheitelwert der magnetischen Welle bedeutet. Da nun im allgemeinen bei gleichen effektiven Werten der Scheitelwert um so größer ist, je spitzer die Wellenform

[1]) ETZ 1901, S. 57.

ist (§ 205), so ist unter sonst gleichen Verhältnissen der Hystereseverlust um so größer, je spitzer die magnetische Welle ist. Und da einer spitzen magnetischen Welle im allgemeinen eine stumpfe Spannungswelle entspricht (§ 206), so ist bei gleicher effektiver Spannung der Scheitelwert 𝔅 und daher der Hystereseverlust um so größer, je stumpfer die Spannungswelle, d. h. je kleiner der Scheitelfaktor der Spannungswelle ist (vgl. § 210).

Aber auch der Hysteresekoeffizient η selbst hängt nach Untersuchungen des Verfassers[1]) von der Wellenform ab, und zwar ist er um so größer, je stumpfer die magnetische Welle, oder je spitzer die entsprechende Spannungswelle ist. Doch ist dieser Einfluß nur gering und braucht daher für praktische Zwecke nicht berücksichtigt werden. Es ergibt sich aber eine theoretische Folgerung daraus. Da bei einer stumpfen magnetischen Welle die Magnetisierung durch längere Zeit auf einem hohen Wert bleibt als bei einer spitzen, und der Hystereseverlust trotz gleichem 𝔅 bei jener größer ist als bei dieser, so muß man annehmen, daß bei jener die Magnetisierung gründlicher oder durchdringender erfolgt als bei dieser. Das heißt, zur Herstellung des größten Magnetisierungswertes ist eine gewisse Zeit erforderlich, was man als **magnetische Verzögerung** bezeichnet. Das steht also in Übereinstimmung mit § 96.

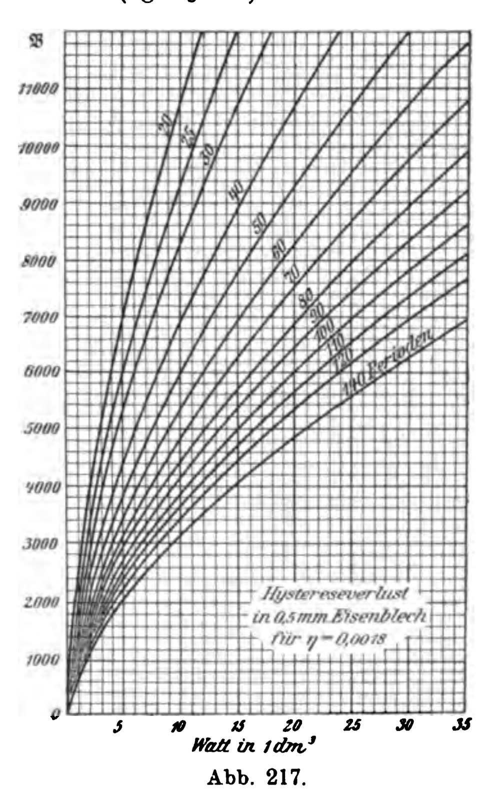


Abb. 217.

Da der Hystereseverlust dem von der Hystereseschleife eingeschlossenen Fläche proportional ist, so wäre wegen der magnetischen Verzögerung die Möglichkeit vorhanden, daß diese Fläche **verschieden groß** ist, je nachdem ob der magnetische

[1]) ETZ 1901, S. 52; 1906, S. 9.

Kreisprozeß mit kleiner oder großer Geschwindigkeit durchlaufen wird. Sehr schnell verlaufende Kreisprozesse sind jene, welche durch die technischen Wechselströme oder durch elektrische Schwingungen während jeder Periode ausgeführt werden. Man bezeichnet die letzteren häufig als dynamische Magnetisierung, während die bei langsamer Änderung der magnetisierenden Kraft als statische Magnetisierung bezeichnet werden. Ein tieferer Grund zu dieser Unterscheidung liegt nicht vor, da eben nur die Geschwindigkeit, mit der sich die Magnetisierung ändert, verschieden ist. Bisher konnte ein merklicher Unterschied im Hystereseverlust bei langsamen und schnellen Kreisprozessen nicht festgestellt werden. Zwar liegen Untersuchungen vor, welche eine Zunahme gezeigt haben, aber auch ebensoviel, welche keine Zunahme, und ebensoviele, welche eine Abnahme gezeigt haben, so daß man sagen kann, eine merkliche Abhängigkeit des Hystereseverlustes von der Geschwindigkeit des Kreisprozesses besteht nicht.

Anders ist es mit der Gestalt der Hystereseschleife; diese hängt sehr von der Geschwindigkeit des Kreisprozesses ab, aber nicht infolge veränderter magnetischer Eigenschaften, sondern infolge der Einwirkung der Wirbelströme. Aus § 150 wissen wir, daß das von einem sekundären Strom herrührende magnetische Feld dem vom primären Strom herrührenden entgegenwirkt, so daß das resultierende Feld kleiner ist, als das vom primären Strom herrührende. Da die Wirbelströme nichts anderes sind als sekundäre Ströme, so haben sie dieselbe Wirkung. Die Folge ist, daß bei gleicher magnetisierender Kraft die Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$ und daher auch die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ kleiner ist, als wenn keine Wirbelstürme vorhanden sind. Da die Wirbelstürme nach Gl. 175a mit dem Quadrate der Periodenzahl zunehmen, so ist $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{B}$ um so kleiner, je höher diese ist. Abb. 218 zeigt die Hystereseschleifen bei verschiedener Periodenzahl[1]), wobei $\nu = 0$ einen sehr langsam verlaufenden Kreisprozeß bedeutet. Man sieht, daß trotz gleicher magnetisierender Kraft $\mathfrak{H}$ die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ um so kleiner ist, je höher die Periodenzahl ist. Die Hystereseschleife zeigt infolgedessen auch abgerundete Ecken, und die ganze Figur ist um so mehr gegen

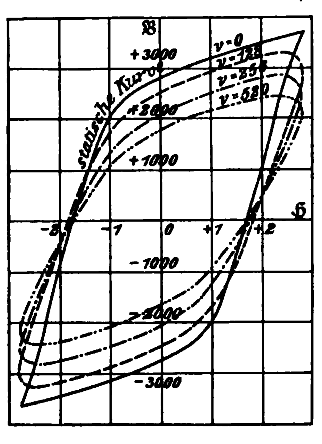


Abb. 218.

[1]) Nach M. Wien. Annal. d. Phys. 1898. Bd. 66.

die Horizontale geneigt, je höher die Periodenzahl ist. Daß nur die Wirbelströme es sind, welche diesen Einfluß ausüben, zeigt Abb. 219, welche unmittelbare Aufzeichnungen der Hystereseschleife mittels der Braunschen Röhre (§ 280) wiedergibt[1]), und zwar die linke Reihe für einen massiven Eisenstab, die rechte Reihe für ein Bündel dünner Eisendrähte. Bei ersterem ist wegen der Stärke der Wirbelströme die Veränderung schon bei 10 und 30 Perioden sehr stark, bei letzterem hingegen, wo die Wirbelströme nur gering sind, ist zwischen der statischen Kurve und der bei 30 Perioden noch kein deutlicher Unterschied zu merken. Man sieht daraus, daß man sich bei unterteilten Eisenkernen, wie sie in den elektrischen Maschinen und Apparaten angewendet werden, und bei den üblichen Periodenzahlen um eine Veränderung der Hystereseschleife durch Wirbelströme nicht zu kümmern braucht. Bei höheren Frequenzen wie in Abb. 218 zeigt sich zwar eine Veränderung der Gestalt aber keine merkliche Veränderung des Flächeninhaltes der Hystereseschleife.

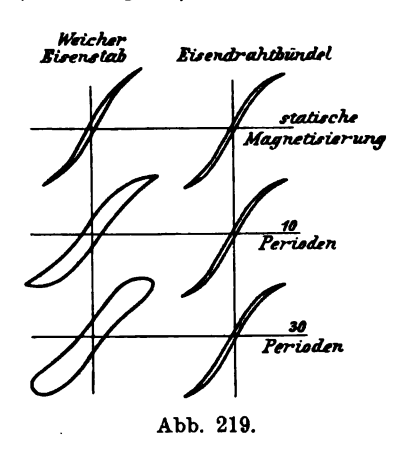


Abb. 219.

Ein anderer Einfluß der Wirbelströme auf den Hystereseverlust besteht als Folge der Erscheinung, daß bei hohen Frequenzen die Kraftliniendichte über den Querschnitt des Eisens ungleichmäßig verteilt ist (vgl. § 165).

164. Der gesamte Eisenverlust und der Magnetisierungsstrom.

Der bei periodischer Magnetisierung auftretende Hystereseverlust setzt sich ebenso wie der durch Wirbelströme in Wärme um. Der gesamte im Eisenkern irgend eines Wechselstromapparates in Wärme umgesetzte Verlust V an nutzbarer Leistung ist demnach für 1 cm^3

$$V = a_h + a_w = (\eta \nu \mathfrak{B}^{1,6} + \beta \nu^2 \mathfrak{B}^2) \cdot 10^{-7} \text{ Watt.}$$

Man bezeichnet diesen gesamten im Eisen auftretenden Verlust als **Eisenverlust** zum Unterschiede von der in der Wickelung auftretenden Stromwärme, die man (in Watt ausgedrückt) als **Kupferverlust** bezeichnet. Die Kurven in Abb. 220 gestatten den ge-

[1]) Nach Angström.

samten Eisenverlust in Blechen von 0,5 mm Dicke und gewöhnlicher Güte für 1 dm³ sofort abzulesen. Diese Kurven sind die Summen aus denen in Abb. 216 und 217.

Der Eisenverlust geht natürlich auf Kosten der dem Apparat durch die Stromwickelung zugeführten Leistung. Es verursachen daher nicht nur die Wirbelströme allein, sondern der gesamte Eisen-

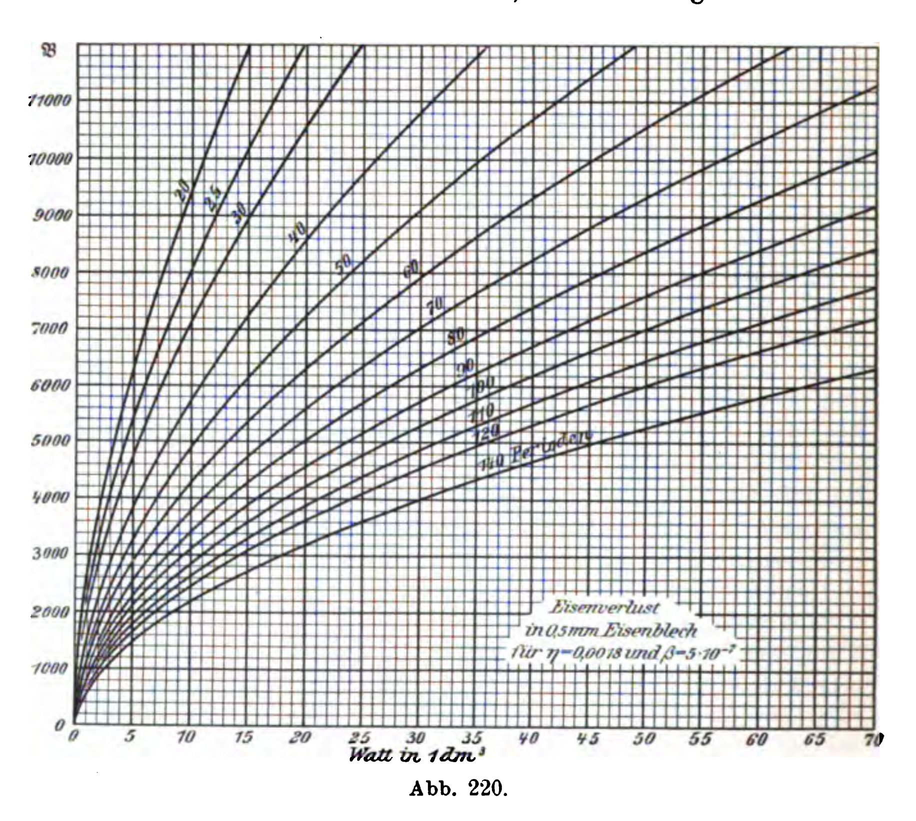


Abb. 220.

verlust bei konstanter Spannung eine Vergrößerung der Stromstärke und eine Verkleinerung der Phasenverschiebung, wie wenn ein entsprechender sekundärer Strom vorhanden wäre. Es tritt also (nach § 146) an Stelle des wahren Widerstandes w der äquivalente ϱ, der größer ist als w, und an Stelle der wahren Selbstinduktion L die äquivalente Selbstinduktion λ, die kleiner ist als L. An Stelle des für einen einzelnen Stromkreis geltenden Widerstandsdreieckes ABC (Abb. 221) tritt demnach das Dreieck AGH. An Stelle des scheinbaren Widerstandes $BC = \sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}$ tritt der äquivalente scheinbare Widerstand $GH = \sqrt{\varrho^2 + \omega^2 \lambda^2}$.

Diesen Dreiecken ähnlich sind die Stromdreiecke (Abb. 222). AB ist die wattlose, AC die Wattkomponente des Stromes J_m, wenn keine Wirbelstrom- und Hystereseverluste vorhanden sind. AG ist die wirkliche wattlose Komponente, AH die wirkliche Wattkomponente des wirklichen Stromes J. ABC ist das Stromdreieck, wenn es keine Wirbelstrom- und Hysteresenverluste gibt. J_m ist also jener Strom, dessen Scheitelwert $\mathfrak{J}_m$ zur Berechnung der Kraftlinienmenge gemäß der Gleichung $\mathfrak{Z} = \frac{0{,}4\pi \mathfrak{J}_m N}{\mathfrak{w}}$ benutzt werden kann. Demnach ist J_m der Magnetisierungsstrom; er hat dieselbe Bedeutung wie in § 151 für einen Apparat mit sekundärem Strome.

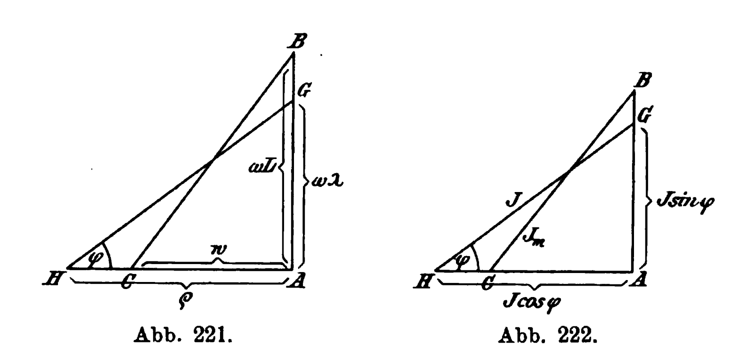


Abb. 221. Abb. 222.

Aus der Formel für die äquivalente Selbstinduktion

$$\lambda = L - \frac{\omega^2 M^2}{w_2^2 + \omega^2 L_2^2} L_2$$

erkennt man, daß λ nur wenig kleiner ist als L, wenn w_2^2 groß ist gegenüber $\omega^2 L_2^2$. Aus den ersten Zeilen der Zahlentafel auf S. 237 erkennt man dies auch. Dieser Fall trifft zu für die Wirbelströme in unterteilten Eisenkernen, wie sie für Wechselstromapparate

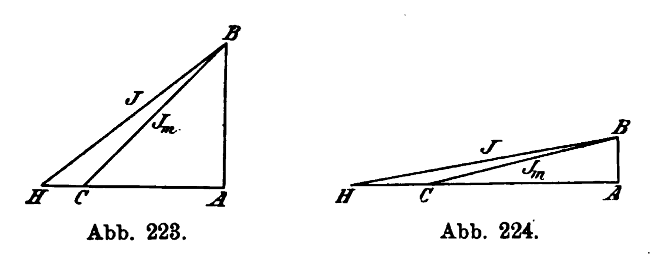


Abb. 223. Abb. 224.

angewendet werden. Näherungsweise fallen also die Punkte B und G zusammen und die Abb. 222 geht über in Abb. 223. AC ist der der Stromwärme in der Wickelung, CH der den Eisenverlusten

entprechende Teil der Wattkomponente AH. Ist der Widerstand der Wickelung w groß gegen den induktiven Widerstand ωL, so erhält das Stromdiagramm die Gestalt wie in Abb. 224, d. h. der Magnetisierungsstrom BC ist wenig größer als der der Stromwärme entsprechende Teil AC der Wattkomponente. Sind w und ωL von ähnlicher Größe (Abb. 223), so ist der Magnetisierungsstrom wenig kleiner, als der gesamte Strom J. Ist der Widerstand w klein gegen den induktiven Widerstand ωL (Abb. 225), so ist der Magnetisierungsstrom wenig größer als die wattlose Komponente AB. Der letztere Fall trifft zu für gewöhnliche Transformatoren und Induktionsmotoren bei Leerlauf, d. h. bei offenem sekundären Stromkreis, wodurch deren Berechnung sehr erleichtert wird.

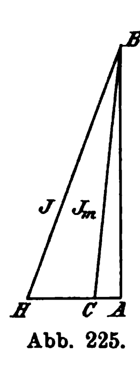


Abb. 225.

Der äquivalente Widerstand ϱ und der äquivalente induktive Widerstand $\omega\lambda$ kann nicht durch unmittelbare Messung mittels einer Meßbrücke oder dergl. ermittelt werden, sondern nur durch Strom- Spannungs- und Leistungsmessung; es ist dann wie in § 146

$$\varrho = \frac{P}{J^2}$$

$$\omega\lambda = \sqrt{\left(\frac{K}{J}\right)^2 - \varrho^2}.$$

Daraus kann man dann auch die Stromdreiecke Abb. 222 konstruieren. Noch einfacher erhält man diese, wenn man aus Strom, Spannung und Leistung die wattlose und die Wattkomponente ausrechnet.

Dagegen ist die Vorausberechnung des Stromes und seiner Phasenverschiebung nach dem streng richtigen Diagramm unmöglich. Denn wollte man ϱ und λ nach den Formeln 135 (S. 235) ausrechnen, so müßte man den Widerstand w_2 und die Selbstinduktion L_2 der Wirbelströme kennen, die man aber auf keine Weise ermitteln kann. Auch die beiden letzten Gleichungen kann man nicht benutzen, weil ja J eben erst berechnet werden soll. Man muß sich daher auf die näherungsweise Berechnung nach den Abb. 223 bis 225 beschränken.

Beispiel. Ein aus 0,5 mm Eisenblech zusammengesetzter Ring von $l = 100$ cm mittlerem Umfang (Länge des Kraftlinienpfades) und $S = 34$ cm² Querschnitt, werde mit 200 Windungen (N) Kupferdraht bewickelt und soll an 110 Volt Spannung bei 50 Perioden angeschlossen werden.

Da sich bei so großer Selbstinduktion die EMK sehr wenig von der

Klemmenspannung unterscheidet, so ergibt sich die Kraftlinienmenge nach Gl. 106 (S. 207) aus der Formel

$$\mathfrak{Z} = \frac{E \cdot 10^8}{4{,}44\, \nu\, N} = \frac{110 \cdot 10^8}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 200} = 248000.$$

Daher die Kraftliniendichte $\mathfrak{B} = \frac{248000}{34} = 7300.$

Dazu findet man aus Abb. 109 eine Durchlässigkeit $\mu = 3200$. Mithin ist der magnetische Widerstand

$$\mathfrak{w} = \frac{l}{\mu S} = \frac{100}{3200 \cdot 34} = 0{,}00092.$$

Der Scheitelwert $\mathfrak{J}_m$ des Magnetisierungsstromes ist nach § 151

$$\mathfrak{J}_m = \frac{\mathfrak{w}\, \mathfrak{Z}}{0{,}4\, \pi N} = \frac{0{,}00092 \cdot 248000}{0{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot 200} = 0{,}91\, A$$

und der effektive Wert (sinusförmige Wellenformen vorausgesetzt)

$$J_m = \frac{\mathfrak{J}_m}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}91}{1{,}41} = 0{,}65\, \text{A}.$$

Aus dem Querschnitt des zur Bewickelung gewählten Kupferdrahtes, der durchschnittlichen Länge einer Windung und der Windungszahl ergebe sich ein Widerstand der Wickelung von $w = 50$ Ohm. Mithin ist der der Strecke AC (Abb. 223) entsprechende Verlust durch Stromwärme $w J_m^2 = 50 \cdot 0{,}65^2 = 21$ Watt. Durch Division mit der Spannung findet man die Wattkomponente $AC = \frac{21}{110} = 0{,}19$. Und die wattlose Komponente ist

$$AB = \sqrt{0{,}65^2 - 0{,}19^2} = \sqrt{0{,}386} = 0{,}62.$$

Bei $\mathfrak{B} = 7300$ findet man aus Abb. 220 einen Eisenverlust von 20 Watt für 1 dm³. Der Rauminhalt des Eisenringes ist $100 \cdot 34 = 3400$ cm³ $= 3{,}4$ dm³. Mithin der ganze Eisenverlust $20 \cdot 3{,}4 = 68$ Watt und der gesamte Verlust $68 + 21 = 89$ Watt. Daraus ergibt sich die dem gesamten Verluste entsprechende Wattkomponente $AH = \frac{89}{110} = 0{,}81$. Also der gesamte Strom

$$J = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \sqrt{0{,}81^2 + 0{,}62^2} = \sqrt{1{,}04} = 1{,}02\, \text{A}.$$

Der Leistungsfaktor ergibt sich aus

$$\cos\varphi = \frac{J \cos\varphi}{J} = \frac{AH}{BH} = \frac{0{,}81}{1{,}02} = 0{,}794.$$

Eine Vernachlässigung wurde hierbei insofern begangen, als zur Berechnung des Stromwärmeverlustes nicht der gesamte Strom J, sondern der Magnetisierungsstrom J_m benutzt wurde, weil ersterer noch nicht bekannt war. Wir können aber jetzt die Korrektur anbringen. Es ist nun der Stromwärmeverlust

$$w J^2 = 50 \cdot 1{,}02^2 = 52 \text{ Watt},$$

daher der gesamte Verlust $68 + 52 = 120$.

Daraus die Wattkomponente $AH = \frac{120}{110} = 1{,}09$ und der gesamte Strom

$$J = \sqrt{1{,}09^2 + 0{,}62^2} = \sqrt{1{,}57} = 1{,}25$$

und der Leistungsfaktor

$$\cos\varphi = \frac{1{,}09}{1{,}25} = 0{,}87.$$

Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn der Widerstand w der Wickelung klein ist gegen den induktiven Widerstand, so daß der Magnetisierungsstrom J_m gleich der wattlosen Komponente AB (Abb. 225) gesetzt werden kann. Es sei z. B. $w = 5$, dann ist der Stromwärmeverlust $5 \cdot 0{,}65^2 = 2{,}1$ Watt. Der gesamte Verlust $68 + 2{,}1 = 70$ Watt, und die entsprechende Wattkomponente $AH = \frac{70}{110} = 0{,}636$. Also der gesamte Strom

$$J = \sqrt{0{,}636^2 + 0{,}65^2} = \sqrt{0{,}828} = 0{,}91.$$

und der Leistungsfaktor

$$\cos\varphi = \frac{J\cos\varphi}{J} = \frac{0{,}636}{0{,}91} = 0{,}7.$$

Eine Korrektion ist hier nicht mehr nötig, weil es keinen merklichen Unterschied im gesamten Verlust gibt, ob der Stromwärmeverlust 2,1 Watt oder $5 \cdot 0{,}91^2 = 4{,}1$ Watt beträgt.

Aus diesen Werten ergibt sich nun auch der äquivalente Ohmsche Widerstand ϱ und der äquivalente induktive Widerstand $\omega\lambda$ gemäß den obigen Gleichungen

$$\varrho = \frac{P}{J^2} = \frac{70}{0{,}91^2} = \frac{70}{0{,}83} = 84{,}4 \text{ Ohm}$$

$$\omega\lambda = \sqrt{\left(\frac{110}{0{,}91}\right)^2 - 84{,}4^2} = \sqrt{7500} = 86{,}5 \text{ Ohm}.$$

Ist $\nu = 50$, also $\omega = 2\pi \cdot 50 = 314$, so ist die äquivalente Selbstinduktion $\lambda = \frac{86{,}5}{314} = 0{,}276$ Henry.

165. Einfluß der Wirbelströme auf die Magnetisierung.

Außer dem Arbeitsverluste durch Erwärmung üben die Wirbelströme in Eisenkernen auch noch eine unerwünschte magnetische Wirkung aus. Da sie um nahezu 180^0 in der Phase verschoben sind gegenüber dem Strome in der Wickelung, der das magnetische Feld erzeugt, so wirken sie während des größten Teiles einer Periode diesem entgegen; infolgedessen ist das wirklich vorhandene magnetische Feld schwächer, als wenn die Wirbelströme nicht vorhanden wären. Diese Schwächung ist aber nicht überall gleich, sondern in der Mitte des Querschnittes größer als in den oberflächlichen Schichten. Denn auf die Mitte wirken sämtliche Wirbelströme in dieser Weise. Weiter gegen die Oberfläche zu wird die Schwächung

nur von jenen Wirbelströmen verursacht, welche die betreffende Schicht umschließen. In der Oberfläche selbst findet also keine Schwächung statt. Die Wirbelströme üben demnach eine **Schirmwirkung** auf die innerhalb ihrer geschlossenen Bahn liegenden Teile des Kernes aus. Um daher dieselbe Kraftliniendichte zu erzielen, wie unter den gleichen Verhältnissen bei einem konstanten Strome, sind mehr Amperewindungen notwendig. Man sieht ein, daß dieser schädliche Einfluß um so stärker ist, je dicker das Eisen ist, und daß bei einer gewissen Dicke das Innere gänzlich unmagnetisch sein kann; ein Grund mehr, die Eisenkerne möglichst oft zu unterteilen.

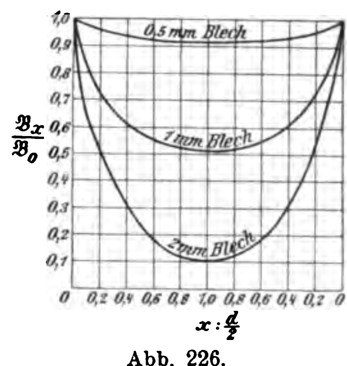


Abb. 226.

Abb. 226 läßt die ungleiche Verteilung der Kraftlinien über den Querschnitt von Eisenblechen bei 100 Perioden erkennen. Die Ordinaten geben das Verhältnis $\frac{\mathfrak{B}_x}{\mathfrak{B}_0}$ an, wobei $\mathfrak{B}_0$ die Kraftliniendichte in der äußersten Oberflächenschicht und $\mathfrak{B}_x$ die Kraftliniendichte in der Tiefe x der Platte bedeutet. Die Abszissen geben das Verhältnis der Tiefe x zur halben Plattendicke $\frac{d}{2}$, also das Verhältnis $x : \frac{d}{2}$ an. Man ersieht aus diesen Kurven z. B., daß bei 2 mm Blechdicke die Induktion in der Mitte etwa ein Zehntel der in der Oberfläche ist, bei 1 mm Blechdicke etwa die Hälfte und bei 0,5 mm Blechdicke etwa 0,92.

Bei dieser in der Praxis hauptsächlich verwendeten Blechdicke ist also die Ungleichmäßigkeit der Kraftliniendichte noch nicht groß. Bei 50 Perioden ist sie noch beträchtlich kleiner, da die Wirbelströme nach § 162 mit der Periodenzahl abnehmen.

Ist die EMK der das Feld erzeugenden Wickelung konstant, so ist auch die Kraftlinienmenge konstant. Infolge der ungleichmäßigen Verteilung der Kraftlinien ist dann die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ an der Oberfläche größer, in der Mitte aber kleiner als bei gleichmäßiger Verteilung; die Kraftlinien werden gegen die Oberfläche hin gedrängt. Das hat zur Folge, daß der Hystereseverlust größer ist als bei gleichmäßiger Kraftlinienverteilung, weil er (nach § 163) mit der $1{,}6^{\text{ten}}$ Potenz von $\mathfrak{B}$ wächst. Er wächst also mehr als pro-

portional der Zunahme von $\mathfrak{B}$. Die Kraftliniendichte an der Oberfläche bei 100 Perioden (200 Wechsel) ist z. B.

bei	2 mm	dicken Blechen	das	1,37 fache		
„	1,5 „	„	„	1,23 „		
„	1,0 „	„	„	1,115 „	}	der Kraftliniendichte bei gleichmäßiger Verteilung.
„	0,5 „	„	„	1,01 „		
„	0,25 „	„	„	1,00 „		

Für 0,5 mm Blech ergibt sich daraus bei 100 Perioden eine Vergrößerung des Hystereseverlustes um ungefähr 1,6 % gegenüber dem bei gleichmäßiger Kraftliniendichte. Da die Wirbelströme mit dem Quadrate der Periodenzahl abnehmen, so sieht man, daß diese Einflüsse bei 50 Perioden und 0,5 mm Blechdicke vernachlässigbar klein sind.

Ob durch das Hinausdrängen der Kraftlinien gegen die Oberfläche hin eine Vergrößerung des magnetischen Widerstandes stattfindet oder nicht, hängt von zwei Umständen ab. Die nächste Folge ist immer eine Verkleinerung des Querschnittes des Kraftlinienbündels, was eine Vergrößerung des magnetischen Widerstandes bedeutet. Liegt die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ unter jenem Wert, bei dem die größte Durchlässigkeit μ besteht (nach Abb. 109 etwa 7000), also beispielsweise bei 3000, so hat die Vergrößerung von $\mathfrak{B}$ eine Zunahme von μ, d. h. eine Verkleinerung des magnetischen Widerstandes zur Folge, wodurch die Verkleinerung des Querschnittes ausgeglichen werden kann. Liegt aber $\mathfrak{B}$ beispielsweise bei 8000, so tritt eine Abnahme von μ und infolgedessen eine Vergrößerung des magnetischen Widerstandes aus doppelter Ursache ein.

Die Vergrößerung des magnetischen Widerstandes hat bei konstanter EMK natürlich eine Vergrößerung des Stromes in der Wickelung zur Folge.

166. Ungleichmäßige Verteilung des Wechselstromes über den Leiterquerschnitt. Hautwirkung.

Jeden Leiter muß man als ein Bündel unendlich dünner, leitender Fäden betrachten. Zwischen jedem dieser und allen übrigen besteht eine gewisse gegenseitige Induktion, deren Gesamtheit als Selbstinduktion des Leiters bezeichnet wird. Nun ist aber die gegenseitige Induktion aller Fäden auf einen Faden in der Mitte größer als auf einen in der Oberfläche, weil ersterer ringsum Fäden in unmittelbarer Nähe hat, letzterer aber nur auf einer Seite. Es ist also die Selbstinduktion und daher auch der scheinbare Widerstand für verschiedene Teile des Querschnittes verschieden, und

zwar in der Mitte am größten, nimmt von da an gegen die Oberfläche zu ab und ist hier am kleinsten. Die Folge davon ist, daß die Verteilung eines Wechselstromes über den Leiterquerschnitt (die Stromdichte) nicht gleichmäßig sein kann, sondern von innen nach außen hin zunimmt. Bei einem konstanten, gleichgerichteten Strome (Gleichstrom) hingegen ist die Stromdichte gleichmäßig, weil die Selbstinduktion auf einen solchen überhaupt keinen Einfluß hat.

Dieses Hinausdrängen des Stromes an die Oberfläche hat zur Folge: erstens eine Vergrößerung des wirksamen Ohmschen Widerstandes, weil dem Strome jetzt ein geringerer Querschnitt zur Verfügung steht, zweitens eine Verminderung des wirksamen induktiven Widerstandes, weil nach dem eben Gesagten die Selbstinduktion der äußeren, an der Stromleitung hauptsächlich beteiligten Schichten kleiner ist als die der inneren. Man kann daher von vornherein nicht entscheiden, ob eine Vergrößerung oder Verkleinerung des gesamten scheinbaren Widerstandes, also eine Verminderung oder Vermehrung der Stromstärke dadurch stattfindet. Die Rechnung lehrt aber, daß bei Leitern aus unmagnetischem Metall der erste Einfluß größer ist als der zweite, der scheinbare Widerstand also größer ist. Bei Eisendrähten hingegen, deren Selbstinduktionskoeffizient, wie aus § 120 ersichtlich, bedeutend größer ist als bei unmagnetischen Drähten, wird bei hohen Periodenzahlen der zweite Einfluß stärker, der scheinbare Widerstand also kleiner. So berechnete Stefan[1]), daß in einem Eisendrahte von 300 km Länge und 4 mm Dicke bei 500 Perioden die Stromstärke 1,23 mal größer ist als bei gleichmäßiger Verteilung über den Querschnitt, und bei 1000 Perioden 2,7 mal größer.

Würde dem Hinausdrängen des Stromes an die Oberfläche nicht ein anderer Umstand entgegenwirken, so müßte der ganze Strom in einer unendlich dünnen Schichte strömen, weshalb man diese Erscheinung als Hautwirkung bezeichnet. Dieser Umstand ist der Leitungswiderstand.

Infolge des Widerstandes strebt nämlich der Strom nach möglichst gleichmäßiger Verteilung über den Leiterquerschnitt, weil dann die gesamte Stromwärme am kleinsten ist (§ 54). Die wirklich vorhandene Verteilung ist dann ein Ausgleich zwischen der auf möglichstes Hinausdrängen des Stromes gerichteten Wirkung der Selbstinduktion und der auf möglichst gleichmäßige Verteilung gerichteten Wirkung des Widerstandes. Der Arbeitsverlust durch Joulesche Wärme ist dabei unter Umständen größer als bei gleich-

[1]) Stefan, Sitzungsber. der Wiener Akad. 95. (2) Seite 930.

mäßiger Verteilung, da der wirksame Ohmsche Widerstand größer ist als der gewöhnliche.

Eine weitere Folge der verschiedenen Selbstinduktion in den verschiedenen Teilen des Drahtquerschnittes ist eine verschiedene Phasenverschiebung der einzelnen Stromfäden gegenüber der Spannung; und zwar nimmt sie von außen nach innen zu, weil die Selbstinduktion in derselben Richtung zunimmt, so daß der Fall eintreten kann, daß der Strom in einer gewissen Tiefe in entgegengesetzter Richtung fließt als in der Oberfläche.

Wir haben hier einen ganz ähnlichen Fall wie bei der Wärmeleitung. Bringt man einen Körper in einen Raum von periodisch wechselnder Temperatur (die Erde unter dem Einfluß der täglichen Temperaturveränderungen), so werden die Änderungen immer weniger bemerkbar, je tiefer in das Innere man eindringt; außerdem tritt eine zeitliche Verschiebung in diesen Änderungen ein.

Schließt man einen gleichgerichteten elektrischen Strom, so breitet er sich, solange er noch nicht konstant geworden ist, infolge der eben geschilderten Verhältnisse zuerst an der Oberfläche aus, dringt dann immer tiefer ein und füllt endlich, wenn er konstant geworden, den ganzen Querschnitt gleichmäßig aus.

Einen Einblick in die Größenverhältnisse gewähren folgende Zahlen von Stefan.[1])

Für einen Eisendraht von 4 mm Dicke ist die Stromstärke an der Oberfläche bei 25C Perioden 2,52 mal so groß als in der Achse, bei 500 Perioden 5,8 mal, bei 1000 Perioden 20,6 mal so groß. Zwischen dem Strome an der Oberfläche und in der Achse bestehen bzw. die Phasenunterschiede 116^0, $174^0 50'$, $215^0 38'$. Dieselben Verhältnisse bietet ein Kupferdraht von 20 mm Dicke. Bei dem Eisendrahte sind diese Verhältnisse darum stärker ausgeprägt trotz des größeren Widerstandes, weil wegen des magnetischen Metalles die Selbstinduktion viel größer ist.

Bei einer Periodenzahl von 50 Millionen findet man in einem Eisendrahte die Stromstärke in 0,0085 mm Tiefe schon 100 mal kleiner als in der Oberfläche. In der Tiefe von 0,0058 beträgt die Phasenverschiebung gegenüber der Oberfläche gerade eine halbe Periode (180^0), sie sind also entgegengesetzt. Für einen Kupferdraht sind die Tiefen mit den angeführten Eigenschaften 5 mal, für einen Neusilberdraht 18 mal größer als die für den Eisendraht angegebenen; der Leitungsdraht wirkt eben der ungleichmäßigen Verteilung entgegen.

Diese Verhältnisse treten, wie man sieht, erst bei sehr hohen

[1]) Sitzungsber. der Wiener Akad. 99 (2a) S. 323.

Periodenzahlen oder sehr dicken Leitern maßgebend auf. Sie sind aber von großer Wichtigkeit bei oszillatorischen Entladungen.

Nach Stefan[1]) läßt sich der wirksame Widerstand w' eines geraden oder schwach gekrümmten Drahtes ausdrücken durch

$$w' = w\left(1 + \frac{c^2}{12} - \frac{c^4}{180} + \frac{11c^6}{26880} \pm \cdots\right)$$

und die wirksame Selbstinduktion L' durch

$$L' = L - \mu l\left(\frac{c^2}{48} - \frac{c^4}{8640} \pm \cdots\right).$$

Dabei bedeutet w den gewöhnlichen Widerstand und L die gewöhnliche Selbstinduktion. Ferner ist

$$c = \frac{2\pi\nu s\mu}{\alpha},$$

l die Länge, s der Querschnitt des Drahtes, μ die magnetische Durchlässigkeit und α der spezifische Widerstand des Drahtmateriales. Alle Größen gelten in absoluten Einheiten[2]).

Diese Formeln eignen sich aber wegen der geringen Konvergenz der Reihen zur Berechnung von w' und L' nur für niedrige Periodenzahlen (bis etwa 100). Für hohe Periodenzahlen eignen sich besser folgende ebenfalls von Stefan[3]) abgeleitete Näherungsformeln, die aber für niedrige Periodenzahlen nicht gelten,

$$w' = w\left(\pi r\sqrt{\frac{\nu\mu}{\alpha}} + \frac{1}{4}\right)$$

$$L' = 2l\left(\lg\text{nat}\frac{2l}{r} - 1 + \frac{1}{4\pi r}\sqrt{\frac{\mu\alpha}{\nu}}\right).$$

Für sehr hohe Periodenzahlen, wo der Strom fast ganz an die Oberfläche gedrängt wird, nähert sich dieser Ausdruck dem Wert

$$L' = 2l\left(\lg\text{nat}\frac{2l}{r} - 1\right).$$

Wie man sieht, kommt μ darin nicht mehr vor, d. h. je mehr der Strom an die Oberfläche gedrängt wird, desto gleichgültiger wird es für die Selbstinduktion, ob der Draht aus einem stark oder schwach magnetischen Stoff besteht. Vergleicht man die obige

[1]) Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 95, IIa, 1889.

[2]) α ist also der Widerstand von 1 cm Länge und 1 cm² Querschnitt in absol. Einh.; für Kupfer ist $\alpha = 1650$.

[3]) Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 99, IIa, 1890.

Formel mit der für gleichmäßige Stromdichte bei einem unmagnetischen Draht (§ 120), nämlich mit

$$L = 2l\left(\lg \operatorname{nat} \frac{2l}{r} - \frac{3}{4}\right),$$

so sieht man, daß L' bei sehr hohen Periodenzahlen nicht viel kleiner als L ist, daß also selbst ein Eisendraht in bezug auf seine Selbstinduktion sich fast so verhält wie ein Kupferdraht.

Folgende Tabelle gibt einige Zahlen für die Widerstandszunahme von Kupferleitungen in Prozenten (nach der ersten Formel berechnet).

Periodenzahl n	Dicke des Drahtes in Millimetern	Zunahne des Widerstandes in Prozenten
50	10	0,19
	20	3
	30	15
100	10	0,75
	20	11
	30	60

Die obigen Formeln gelten jedoch nicht für stark gekrümmte Drähte oder Spulen, weil dabei die ungleiche Stromdichte nicht mehr symmetrisch zu jedem Achsenschnitt ist, sondern durch die Einwirkung der übrigen Leiterteile der Strom besonders nach einer Seite hin gedrängt wird. Bei Spulen kommt noch der im folgenden besprochene viel stärkere Einfluß der Wirbelströme hinzu.

167. Der Einfuß der Wirbelströme auf den Widerstand einer Drahtspule.

Nebst der Vergrößerung des Widerstandes und der Verkleinerung der Selbstinduktion wie sie in einem vom Wechselstrom durchflossenen Drahte wegen der im vorigen Paragraphen besprochenen Hautwirkung eintritt, gibt es in einem zu einer Spule aufgewickelten Draht noch eine Vergrößerung des Ohmschen Widerstandes und eine Verkleinerung der Selbstinduktion, welche auf die in dem Drahte selbst induzierten Wirbelströme zurückzuführen ist.

Aus § 76 wissen wir, daß die Kraftlinien eines vom Strom durchflossenen Drahtes geschlossene Ringe sind, welche den Draht konzentrisch umgeben. Ist es ein Wechselstrom, der durch den Draht fließt, so findet ein fortwährendes Entstehen und Verschwin-

den dieser Kraftlinien statt, indem sie beim Zunehmen des Stromes gewissermaßen aus dem Draht herauswachsen und beim Verschwinden wieder in ihm zusammenschrumpfen. Die zu inneren Stromfäden gehörenden Kraftlinien schneiden dabei die äußeren Teile des Drahtes und erzeugen dadurch Wirbelströme. Da die Strombahnen der Wirbelströme parallel zu dem sie hervorrufenden Wechselstrom liegen, oder ihre Stromflächen senkrecht zu den Kraftlinien, so müssen die Wirbelströme parallel zur Achse des Drahtes verlaufen; an seinen beiden Enden vereinigen sie sich zu in sich geschlossenen Stromkreisen. Stellt Abb. 227 einen achsialen Längsschnitt durch ein Drahtstück dar, so nehmen die Wirbelströme den durch die gestrichelten Linien angedeuteten Verlauf, und zwar in jedem durch die Achse des Drahtes gedachten Längsschnitt. Bezeichnen die beiden Pfeile an den Enden die augenblickliche Richtung des durch den Draht geschickten Wechselstromes, so erkennt man sofort, daß dieser durch die Wirbelströme in der unteren Drahthälfte verstärkt, in der oberen aber geschwächt wird. Nebst der auf ein gleichmäßiges, durchaus symmetrisches Hinausdrängen des Stromes hinzielenden Hautwirkung besteht also noch diese Wirkung, die eine ungleichmäßige, und nur nach einer Richtung symmetrische Verteilung über die beiden Drahthälften verursacht. Doch ist die daraus hervorgehende Vergrößerung des Widerstandes und Verkleinerung der Selbstinduktion eines gestreckten Drahtes gegenüber der der Hautwirkung so klein, daß sie vernachlässigt werden kann.

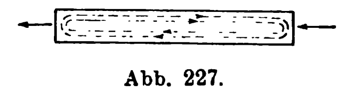


Abb. 227.

Anders ist es bei einer Spule. Hierbei schneidet jede aus dem Draht heraustretende oder zusammenschrumpfende Kraftlinie nicht nur die betreffende Stelle des Drahtes, sondern auch sämtliche von ihr erreichten Windungen. Infolgedessen verkehren Wirbelströme von nicht unbeträchtlicher Stärke längs des ganzen zur Spule aufgewickelten Drahtes, und zwar derart, daß sie in der inneren Hälfte jeder Drahtwindung dieselbe Richtung haben wie der von außen hineingeschickte Strom und in der äußeren Hälfte entgegengesetzte Richtung. Daher ist die Stromdichte an der inneren Seite jeder Drahtwindung größer als an der äußeren und demzufolge der wirksame Widerstand größer als der gewöhnliche.

Bei Spulen von der in Abb. 228 gezeichneten Form, deren Länge b größer ist als ihr innerer und äußerer Radius h_1 bzw. h_2, hat M. Wien[1]) für den wirksamen Widerstand w' nachstehende Näherungsformel berechnet

[1]) Annal. d. Physik 14, S. 1, 1904.

$$w' = w + \frac{16\pi^6 \nu^2 N^3 r^4 \left[1 - \frac{(h_1 + h_2)^2}{b^2}\right](h_1 + h_2)}{3\,\alpha\, b^2}$$

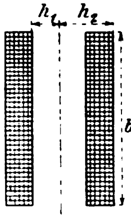


Abb. 228.

wobei w den gewöhnlichen Widerstand der Spule (wie bei Gleichstrom), N die Windungszahl, ν die Periodenzahl, r den Radius und α den spezifischen Widerstand des Drahtes bedeutet. Alle Größen sind in absoluten Einheiten einzusetzen. Für Kupfer ist $\alpha = 1650$.

Für eine Spule mit folgenden Maßen: $w = 4{,}83$, $N = 1550$, $r = 0{,}55$ mm, $b = 13{,}8$ cm, $h_1 + h_2 = 5{,}3$ cm ergeben sich folgende nach obiger Formel berechneten und von Dolezalek[1]) experimentell bestimmten Werte für verschiedene Periodenzahlen.

Periodenzahl ν	w' beobachtet	w' berechnet
0	4,83 Ohm	4,83 Ohm
591	5,43 „	5,47 „
917	6,32 „	6,30 „
1452	8,54 „	8,68 „
2286	14,13 „	14,38 „

Für Spulen, deren Durchmesser groß ist gegen ihre Länge, gilt (ebenfalls nach M. Wien) folgende Formel

$$w' = w + \frac{4\pi^6 \nu^2 N^3 r^4}{\alpha\,(h_1 + h_2)}\left(1 + \frac{3\,h_1^2}{(h_1 + h_2)^2}\right)^2.$$

Da diese Erhöhung des Ohmschen Widerstandes ihren Grund nur in den Wirbelströmen hat, so hilft dagegen, ebenso wie gegen die Wirbelströme in massiven Eisenkernen, eine ausgiebige Unterteilung des Leitungsdrahtes. Man verwendet also dort, wo es auf eine genaue Übereinstimmung des Widerstandes einer Kupferspule bei Gleich- und Wechselstrom ankommt, wie z. B. bei Selbstinduktionsnormalien, keinen massiven Draht, sondern Litzen, die aus Kupferdrähten von 0,1 mm Dicke bestehen. Die Litzen sollen gedrillt sein, damit nicht dieselben Fäden bei allen Windungen innen liegen.

Wie aus den obigen Formeln ersichtlich ist, ist die Widerstandszunahme $(w' - w)$ verkehrt proportional dem spezifischen Leitungswiderstand α, weil auch die Wirbelströme diesem umgekehrt proportional sind. Bei Widerstandsspulen, die aus Manganin, Konstantan oder dgl. angefertigt werden, können daher massive Drähte selbst

[1]) Annal. d. Physik 12, S. 1142, 1904.

bis 1 mm Dicke verwendet werden, ohne daß dieser Einfluß berücksichtigt zu werden braucht.

Bei sehr hohen Periodenzahlen genügen die obigen Näherungsformeln nicht mehr. Vgl. Sommerfeld, Annal. d. Physik 15, S. 673, 1904. Black, ebenda 19, S. 157, 1906.

Es ist zu beachten, daß der hier und im vorigen Paragraphen behandelte Widerstand w' ein wahrer Ohmscher Widerstand ist, also bei der Berechnung der Stromwärme zu verwenden ist.

Die Verkleinerung der Selbstinduktion ist in allen Fällen so gering, daß sie vernachlässigt werden kann.

168. Die magnetische Arbeit des Wechselstromes.

Multipliziert man die Spannungsgleichung

$$k = iw + L\frac{di}{dt}$$

eines einzelnen Wechselstromkreises (§ 133), dessen Klemmenspannung k und dessen Strom i ist, mit $i\,dt$, so erhält man links $k\,i\,dt$, das ist die während der unendlich kleinen Zeit dt von dem Strome i geleistete Arbeit, die wir mit dA bezeichen wollen. Es ist also

$$dA = i^2 w\,dt + L\,i\,di$$

oder in anderer Form geschrieben

$$dA = i^2 w\,dt + d\left(\frac{L i^2}{2}\right).$$

Diese Gleichung gibt an, wie sich die vom Strom geleistete Arbeit dA in jedem Augenblick verteilt. Das erste Glied auf der rechten Seite stellt die zur Erwärmung des Stromleiters während der Zeit dt verwendete Arbeit dar. Das zweite Glied ist das Differential der magnetischen Arbeit, die zur Herstellung des dem Strome i zugehörigen magnetischen Feldes notwendig ist (§ 119). Es stellt also die magnetische Arbeit während der Änderung der Stromstärke um den Betrag di während der Zeit dt dar.

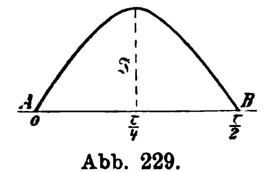


Abb. 229.

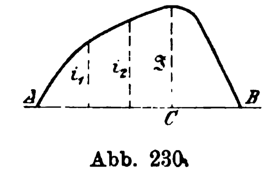


Abb. 230.

Aus § 134 wissen wir, daß die gesamte während einer halben Periode des Stromes i (zwischen den Nullpunkten AB, Abb. 229)

geleistete Arbeit nur aus der Stromwärme besteht, wenn im magnetischen Felde des Stromes keine Hysterese vorhanden ist. Demnach muß das letzte Glied der obigen Gleichung für eine halbe Periode null sein. Daß dies tatsächlich der Fall ist, ergibt sich aus folgendem. Die magnetische Arbeit während einer halben Periode ist gleich

$$\left|\frac{Li^2}{2}\right|_0^{\frac{\tau}{2}}.$$

Dieses läßt sich zerlegen in die Arbeit während der ersten und zweiten Viertelperiode, nämlich

$$\left|\frac{Li^2}{2}\right|_0^{\frac{\tau}{2}} = \left|\frac{Li^2}{2}\right|_0^{\frac{\tau}{4}} + \left|\frac{Li^2}{2}\right|_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{\tau}{2}}$$

Nun ist nach Einsetzung der Grenzwerte

$$\left|\frac{Li^2}{2}\right|_0^{\frac{\tau}{4}} = \frac{L\mathfrak{J}^2}{2} - 0 = \frac{L\mathfrak{J}^2}{2}$$

und

$$\left|\frac{Li^2}{2}\right|_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{\tau}{2}} = 0 - \frac{L\mathfrak{J}^2}{2} = -\frac{L\mathfrak{J}^2}{2}.$$

Die magnetische Arbeit während der ersten Viertelperiode, wo der Strom von null bis $\mathfrak{J}$ ansteigt, ist positiv, d. h. sie wird vom Strom geleistet. Die der zweiten Viertelperiode, wo der Strom von $\mathfrak{J}$ bis null abnimmt, ist ebenso groß, aber negativ; sie wird von dem verschwindenden magnetischen Felde wieder an den Stromkreis zurückgegeben. Da in diesem Ausdruck für die magnetische Arbeit nur der Strom in seinem Höchstwerte (Scheitelwerte) $\mathfrak{J}$ vorkommt, so ist es gleichgültig, in welcher Weise sich der Strom von null bis zu diesem Werte ändert und wie lange das dauert. Die magnetische Arbeit ist also von der Wellenform des Stromes unabhängig. Fällt der Scheitelwert nicht mit dem Ende der Viertelwelle $\left(\frac{\tau}{4}\right)$ zusammen, wie in Abb. 230, d. h. ist die Welle nicht symmetrisch zum Scheitelwert, so gilt der obige Ausdruck $\frac{L\mathfrak{J}^2}{2}$ nicht für eine Viertelwelle, sondern immer für den zwischen einem Nullpunkt und dem Scheitelwert liegenden Teil der Welle, also beim Zunehmen für A bis C, beim Abnehmen für C bis B. Allgemein ist die magnetische Arbeit des Stromes, während er sich von i_1 bis i_2 ändert, gleich $\frac{(i_2 - i_1)^2}{2} L$.

Da die beim Zunehmen des Stromes von null an aufgewendete Arbeit und die beim Abnehmen zurückgegebene Arbeit gleich groß sind, so ist die gesamte Arbeit während einer halben Periode null.

Das gilt aber nur unter der Voraussetzung, daß keine magnetische Hysterese vorhanden ist. Besteht jedoch ein Teil des den Stromkreis umgebenden Raumes aus einem ferromagnetischen Stoff, so wissen wir schon aus § 98, daß die beim Ansteigen des Stromes aufgewendete magnetische Arbeit beim Verschwinden des Stromes nicht ganz zurückgewonnen wird, sondern daß ein Teil wegen der magnetischen Reibung der Molekularmagnete in Wärme umgesetzt wird, der sich im Stromkreis als Hystereseverlust bemerkbar macht. In der Mechanik gibt es viele gleiche Erscheinungen; so z. B. eine elastische Feder, an der ein Gewicht hängt, und die in auf- und niedergehende Schwingungen versetzt wird. Die beim Hochgehen des Gewichtes von der Feder geleistete Arbeit wird beim Niedergehen wieder an die Feder zurückgegeben, die dadurch von neuem gespannt wird. Ein kleiner Teil aber geht bei jedem Auf- und Niedergang durch mechanische Reibung im Innern der Feder verloren und setzt sich in Wärme um.

Beispiel. Für einen Kupferdraht von 1000 m Länge, 5 mm Radius ist nach § 160 die Selbstinduktion $L = 0{,}00243$ Henry. Wird ein Strom von 10 Ampere (effektiv) durchgeschickt, so ist (§ 131) $\mathfrak{J} = \sigma\, 10$. Für eine sinusförmige Welle ist $\sigma = 1{,}41$, also $\mathfrak{J} = 14{,}1$. Mithin ist die während einer Viertelperiode vom Strom an das umgebende Medium abgegebene, oder beim Verschwinden des Stromes an diesen zurückgegebene magnetische Arbeit

$$\frac{L\mathfrak{J}^2}{2} = \frac{0{,}00243 \cdot 200}{2} = 0{,}243 \text{ Watt.}$$

Bei einem Wechselstrom findet also ein beständiges Hin- und Herwogen von Arbeit zwischen dem Stromleiter und dem umgebenden Medium statt, und zwar reicht die magnetische Arbeit bis ins Unendliche, wenn sie nicht durch elektromagnetische oder elektrodynamische Schirmwirkung irgendwo begrenzt wird. Allerdings nimmt ihre Stärke mit der Entfernung sehr rasch ab. Wie groß die magnetische Arbeit in einer Raumeinheit an irgendeiner Stelle des Raumes ist, wissen wir bereits aus § 97, nämlich $\frac{\mu \mathfrak{H}^2}{8\pi}$.

Wir betrachten nun den Fall, daß von einem Strome i_1 in einem benachbarten Stromkreise ein sekundärer Strom i_2 induziert wird. Dann ergibt sich die Arbeitsgleichung des primären Stromes wie oben durch Multiplikation der Gl. 130a (S. 233) mit $i_1 dt$; also

$$k_1 i_1 \, dt = i_1^2 w_1 \, dt + L_1 i_1 \, di_1 + M i_1 \, di_2.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt wieder die Wärmearbeit oder deren mechanisches Äquivalent, die beiden anderen

die magnetische Arbeit dieses Stromkreises dar. Multipliziert man die sekundäre Spannungsgleichung (131) mit $i_2 dt$, so erhält man die sekundäre Arbeitsgleichung

$$0 = i_2^2 w_2 dt + L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1,$$

wobei das erste Glied wiederum die Wärmearbeit des ganzen sekundären Stromkreises bedeutet, oder deren mechanisches Äquivalent, wenn der sekundäre Strom auf Motoren arbeitet.

Da die gesamte im primären und sekundären Stromkreis auftretende Arbeit nur aus der Stromquelle kommt, an welche jener angeschlossen ist, so ist die gesamte in einem Augenblick geleistete Arbeit dA gleich der Summe beider, also

$$dA = k_1 i_1 dt = (i_1^2 w_1 + i_2^2 w_2) dt + L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M(i_1 di_2 + i_2 di_1)$$

oder

$$dA = (i_1^2 w_1 + i_2^2 w_2) dt + d\left(\frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2\right).$$

Demnach ist

$$\frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

der allgemeine Ausdruck für die magnetische Arbeit beider Stromkreise, der (wie vorhin für einen einzelnen Stromkreis) für jede halbe Periode null ist, wenn keine magnetische Hysterese besteht. Die gesamte vom primären Strom während einer halben Periode geleistete Arbeit besteht also bloß aus der in beiden Stromkreisen entwickelten Wärme oder deren mechanischen Äquivalent, und wenn ferromagnetische Stoffe vorhanden sind, aus der Hysterese-Arbeit.

Wie man sieht, ist der letzte Ausdruck — das Integral der magnetischen Arbeit — nur von den drei Induktionskoeffizienten und den Stromstärken abhängig. Dagegen ist der Augenblickswert der vom primären auf den sekundären Kreis übertragenen magnetischen Arbeit $M i_2 di_1$, ebenso wie die vom primären Strom im sekundären Kreis induzierte EMK $M \frac{di_1}{dt}$ von der Änderung des Stromes abhängig. Ist z. B. $i_1 = \mathfrak{J}_1 \sin \omega t$, so ist

$$M \frac{di_1}{dt} = \omega M \mathfrak{J}_1 \cos \omega t = 2\pi\nu M \mathfrak{J}_1 \cos \omega t.$$

Die übertragene Wirkung ist also bei gleichen Induktionskoeffizienten und gleichen Stromstärken um so größer, je schneller sich der Strom ändert, d. h. je größer seine Periodenzahl ν ist.

Daher lassen sich elektrodynamische Wirkungen auf größere Entfernungen nur mittels Wechselströmen hoher Periodenzahl übertragen (Versuche von Hertz und von Tesla; Funkentelegraphie).

169. Das Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit.

In § 54 haben wir gefunden, daß die Verzweigung eines Gleichstromes derart erfolgt, daß die gesamte Stromwärme ein Minimum ist. Das gilt auch für einen Wechselstrom, wenn der induktive Widerstand jedes Zweiges verschwindend klein ist gegenüber dem Ohmschen.

Betrachten wir den entgegengesetzten Fall, wo der Ohmsche Widerstand verschwindend klein ist gegenüber dem induktiven, so verteilt sich ein Wechselstrom derart, daß die gesamte magnetische Arbeit ein Minimum ist.

Für den allgemeinsten Fall, wo zwischen den Zweigen auch noch gegenseitige Induktion M besteht, haben wir bereits in § 161 die Bedingungsgleichung für die Verteilung erhalten. Sie lautet für den hier angenommenen Fall, daß $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ ist

$$(L_1 - M)\frac{di_1}{dt} = (L_2 - M)\frac{di_2}{dt}.$$

Enthalten die Ausdrücke für i_1 und i_2 kein von der Zeit unabhängiges Glied, so kann diese Gleichung ohne weiteres integriert werden und man erhält als Bedingungsgleichung für die Stromverzweigung

$$i_1 : i_2 = (L_2 - M) : (L_1 - M).$$

Das ist aber auch die Bedingung, unter welcher die gesamte magnetische Arbeit A beider Zweige

$$A = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2$$

ein Minimum ist, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Man findet die Minimumsbedingung, wenn man das Differential gleich null setzt. Wir bilden also

$$dA = L_1 i_1\, di_1 + L_2 i_2\, di_2 + M i_1\, di_2 + M i_2\, di_1 = 0.$$

Nach dem ersten Kirchhoffschen Gesetz ist

$$i = i_1 + i_2,$$

also ist auch das Differential dieser Gleichung gleich null zu setzen.

$$di = di_1 + di_2 = 0.$$

Dies in die vorige Bedingungsgleichung eingesetzt, gibt

$$i_1 (L_1 - M) = i_2 (L_2 - M),$$

also tatsächlich dasselbe, wie die obige Gleichung für die Stromverzweigung.

Wie man sich leicht überzeugen kann, gilt dasselbe Prinzip auch für beliebig viele Stromzweige mit oder ohne gegenseitige Induktion.

Dieses von Stefan[1]) aufgestellte Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit bei verschwindend kleinem Ohmschen Widerstand ermöglicht in vielen Fällen eine sehr rasche Orientierung. So gibt es z. B. ohne weiteres Aufschluß über die Verteilung eines geradlinigen Stromes über den Leiterquerschnitt (§ 166). Da wir jeden Leiter als ein Bündel unendlich dünner Stromfäden betrachten müssen, welche alle die gleiche Spannung besitzen, so haben wir es eigentlich mit einer Verzweigung in unendlich viele parallele Zweige zu tun. Wie muß nun diese Verteilung geschehen, damit die magnetische Arbeit ein Minimum ist? Zunächst ist klar, daß sie symmetrisch um den mittelsten Faden, also um die Achse des Leiters sein muß, wenn wir einen kreisförmigen Querschnitt voraussetzen. Wie nun auch die Stromdichte von der Achse gegen die Oberfläche hin variieren mag, der Leiter wirkt nach außen magnetisch so, als ob der ganze Strom in der Achse konzentriert wäre. Es handelt sich also nur um die Magnetisierung des Leiters selbst, und diese wird ein Minimum, nämlich null, wenn der ganze Strom in einer unendlich dünnen Schichte an der Oberfläche strömt, weil eine solche Stromröhre im ganzen von ihr umschlossenen Raume keine magnetische Kraft ausübt, sondern nur außerhalb derselben. Ist der Querschnitt nicht kreisförmig, so gibt es dennoch eine Verteilung des Stromes in der Oberfläche, für welche seine magnetische Wirkung im Inneren null ist. „Diese Verteilung ist konform derjenigen, welche eine elektrische Ladung annimmt, wenn sie sich auf dem Leiter im Zustande des Gleichgewichtes befindet."

Nun ist aber der Widerstand eines Leiters niemals null, und es kommt daher auch das Prinzip des Minimums der Stromwärme zur Geltung. Dieses Prinzip verlangt aber, daß die Verteilung des Stromes gleichmäßig über den Querschnitt erfolge. Die beiden Prinzipien widerstreiten sich also, und es tritt daher ein Kompromiß ein zwischen beiden, derart, daß die Stromdichte in dem Leiter von innen nach außen zunimmt, und zwar um so rascher, je kleiner der Ohmsche Widerstand ist gegenüber dem induktiven. Wir gelangen also zu demselben Resultate wie in § 166.

---

[1]) Stefan, Sitzungsber. der Wiener Akad. 99 (IIa), S. 319, 1890.

Aber auch die Induktion eines sekundären Stromes findet bei verschwindend kleinem Ohmschen Widerstand derart statt, daß die magnetische Arbeit ein Minimum ist. Die sekundäre Spannungsgleichung (131) geht für den Fall, daß $i_2 w_2$ gegenüber den beiden anderen Gliedern vernachlässigt werden kann, über in

$$0 = L_2 \frac{d i_2}{dt} + M \frac{d i_1}{dt}.$$

Enthalten die Ausdrücke für i_1 und i_2 kein von der Zeit unabhängiges Glied, so kann diese Gleichung ohne weiteres integriert werden und man erhält

$$i_2 = - i_1 \frac{M}{L_2}.$$

ein Resultat, das wir schon aus § 148 kennen.

Zu derselben Gleichung gelangen wir aus der Forderung, daß die magnetische Arbeit des sekundären Stromes $\frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2$ ein Minimum sein muß, wie man sofort sieht, wenn man davon das Differential nach i_2 bildet und gleich null setzt.

Aus § 156 wissen wir, daß eine vollkommene elektrodynamische Schirmwirkung durch sekundäre Ströme nur dann eintritt, wenn der Ohmsche Widerstand null ist. Dieser Fall deckt sich also mit dem des Minimums der magnetischen Arbeit. Je größer der Ohmsche Widerstand ist, desto geringer ist die Schirmwirkung und desto weniger ist das Prinzip der kleinsten magnetischen Arbeit erfüllt.

Außer der schirmenden Kupferplatte (§ 156) ist noch folgendes von Stefan erörterte Beispiel von Interesse. Durch einen geraden Draht, der von einer konzentrischen Metallröhre umgeben ist, wird ein Wechselstrom von so hoher Periodenzahl geschickt, daß der Ohmsche Widerstand gegenüber dem induktiven verschwindet. Das Minimum der magnetischen Arbeit wird bei folgender Anordnung der Ströme erreicht. Der primäre Strom im Drahte fließt in einer unendlich dünnen Schichte an der Oberfläche. Der von ihm induzierte sekundäre Strom fließt in einer unendlich dünnen Schichte an der inneren Fläche der Röhre und hat in jedem Augenblicke entgegengesetzte Richtung wie jener, wie man aus der obigen Gleichung ersieht. Dabei bestehen Kraftlinien nur in dem Raume zwischen der Oberfläche des Drahtes und der inneren Wandfläche der Röhre. Die Masse des Drahtes und der Röhre, sowie der ganze äußere Raum sind frei von jeder magnetischen Wirkung. Die Röhre übt also eine vollkommene Schirmwirkung auf den ganzen äußeren Raum aus.

Elftes Kapitel.

Die Kapazitätserscheinungen.[1]

170. Scheinbarer Widerstand eines Kondensators.

In den Stromkreis einer Wechselstromquelle sei ein Kondensator mit der Kapazität C eingeschaltet (Abb. 231), und zwar setzen wir einen idealen Kondensator voraus, d. h. einen solchen, der keine Rückstandsbildungen zeigt, und dessen Dielektrikum auch in den dünnsten Schichten einen unendlich großen Ohmschen Widerstand besitzt. Dennoch kann in dem Stromkreise ein Wechselstrom verkehren. Einen solchen haben wir ja auch in den Zuleitungsdrähten eines Kondensators, dessen eine Platte mit der Erde verbunden ist und dessen andere abwechselnd positiv und negativ geladen wird (Abb. 232). Denn bei jeder Ladung strömt eine gleichnamige und gleichgroße Elektrizitätsmenge zur Erde ab; es ist also gerade so, als ob die bei der Ladung zugeführte Elektrizitätsmenge durch das Dielektrikum zur Erde strömen würde.

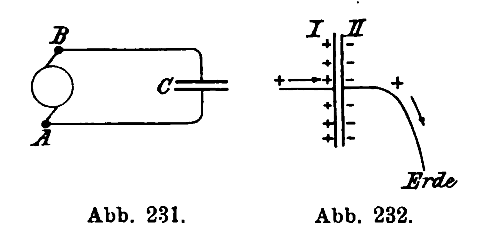


Abb. 231. Abb. 232.

In Wirklichkeit ist aber der Vorgang so, daß durch die zugeführte Elektrizitätsmenge eine gleichgroße ungleichnamige Menge auf der zweiten Platte induziert wird, und eine gleichnamige zur Erde abströmt. Die beiden Platten sind also in jedem Augenblick entgegengesetzt geladen. Dasselbe ist der Fall, wenn wir beide Platten mit den Polen A und B der Wechselstromquelle verbinden. Da von diesen Klemmen in jedem Augenblick entgegengesetzte Elek-

[1]) Nach G. Benischke: „Die Wirkungsweise der Kondensatoren im Wechselstromkreise.“ ETZ 1895, S. 612.

trizität ausgeht, so wird die eine Platte positiv, die andere gleichzeitig negativ geladen. Wechselt die Richtung der Maschinenspannung, so wechselt auch die Ladung der Kondensatorplatten. Es besteht also in den Verbindungsleitungen zwischen Maschine und Kondensator ein Wechselstrom.

Zu demselben Resultat gelangen wir, wenn wir uns vorstellen, daß eine entsprechende Elektrizitätsmenge im Dielektrikum des Kondensators zwischen den beiden Platten hin und her geschoben wird, so daß diese in jedem Augenblick entgegengesetztes Vorzeichen haben. Man bezeichnet diese im Dielektrikum hin und her gehende Elektrizitätsmenge als Verschiebungsstrom. Er bildet gewissermaßen die Verbindung zwischen dem Strom in den Zuleitungen zu den Kondensatorplatten, so daß man auch da die Vorstellung von einem geschlossenen Stromkreis aufrecht erhalten kann.

Liefert die Stromquelle, an welcher der Kondensator angeschlossen ist, eine periodisch veränderliche Spannung, so strömt offenbar dann die größte Elektrizitätsmenge durch die Verbindungsleitungen, wenn der Kondensator keine Ladung hat, weil er eben da die meiste Elektrizität aufnehmen kann. Hat aber seine Ladung den größten Wert q erreicht, der bei der vorhandenen Kapazität und Spannung möglich ist, so strömt keine Elektrizität mehr zu und die Stromstärke in den Zuleitungen ist null.

Genaueren Aufschluß über die Strom- und Spannungsverhältnisse gibt die mathematische Betrachtung. Nach § 41 ist die von einem Strome i während der Zeit dt gelieferte Elektrizitätsmenge $dq = i\,dt$. Da es bei der Aufstellung der mathematischen Beziehung nicht nur auf die absoluten Werte, sondern auch auf die Phasenverhältnisse ankommt, so müssen wir auch auf das richtige Vorzeichen bedacht sein. Da nach dem Vorstehenden die zuströmende Stromstärke um so größer ist, je kleiner die auf dem Kondensator befindliche Ladung ist, so müssen wir das negative Vorzeichen einführen; es ist also für die auf dem Kondensator sitzende Ladung

$$dq = -i\,dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (177)$$

Nach § 27 ist

$$q = e_c C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (178)$$

wenn e_c die Potentialdifferenz zwischen den beiden Kondensatorplatten bedeutet, die wir im folgenden immer als Kondensatorspannung oder Kapazitätsspannung bezeichnen werden. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$i = -C\frac{de_c}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (179)$$

Setzt man zunächst voraus, daß die Verbindungsleitungen zwischen Stromquelle und Kondensator widerstandslos sind, so ist die EMK der Stromquelle mit der Kondensatorspannung identisch. Sie sei gegeben durch

$$e_c = \mathfrak{E}_c \sin \omega t;$$

dann ist

$$i = -\omega C \mathfrak{E}_c \cos \omega t = \omega C \mathfrak{E}_c \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad . \quad (180)$$

Man ersieht daraus, daß der dem Kondensator zufließende Strom i um eine Viertelperiode gegenüber der Kondensatorspannung verspätet ist, da er die entsprechenden Werte erst um $\frac{\pi}{2}$ später erreicht als e_c, wie auch Abb. 233 zeigt; oder umgekehrt, die Kondensatorspannung eilt um eine Viertelperiode dem Strome voraus. Sie verhält sich also gerade entgegengesetzt wie die EMK der Selbstinduktion oder induktive Spannung, welche dem Strome um eine Viertelperiode nacheilt (§ 132).

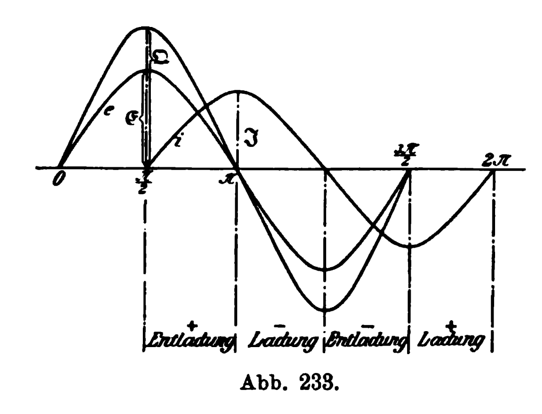


Abb. 233.

Aus Gl. 178 folgt, daß die Ladung q des Kondensators in gleicher Phase mit der Kondensatorspannung ist, da C eine Konstante ist. Die Kurve q ist in Abb. 233 eingezeichnet.

Da der Faktor vor einer Sinus- oder Cosinusfunktion den Scheitelwert darstellt, so folgt aus der letzten Gleichung

$$\mathfrak{J} = \omega C \mathfrak{E}_c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

Dividiert man beiderseits durch den Scheitelfaktor (§ 131), so erhält man aus den Scheitelwerten die effektiven Werte; also

$$J = \omega C E_c = 2\pi\nu C E_c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (182)$$

als Beziehung zwischen Strom, Frequenz, Kapazität und Kondensatorspannung.

Aus Gl. 180 ergibt sich

$$\frac{di}{dt} = \omega^2 C \mathfrak{E}_c \sin \omega t = \omega^2 C e_c$$

oder

$$e_c = \frac{1}{\omega^2 C} \frac{di}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (183)$$

Diese Gleichung, welche die Abhängigkeit der Kondensatorspannung von der Änderung des Stromes (bei konstanter Frequenz und Kapazität) darstellt, bildet das Seitenstück zur Gl. 103 (S. 205) für die induktive Spannung, und hat, wie schon oben bemerkt, entgegengesetztes Vorzeichen wie diese.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die Verbindungsleitungen zwischen Stromquelle und Kondensator keinen Widerstand haben. Setzen wir nun den Fall, daß sie einen Widerstand w haben, so kann die Kondensatorspannung e_c mit der Klemmenspannung der Stromquelle nicht identisch sein. Bezeichnen wir die letztere mit k, so ist die gesamte in diesem Stromkreis wirkende Spannung $k + e_c$, und daher die Stromstärke $i = \frac{k + e_c}{w}$.

Daraus folgt nach Einsetzung der letzten Gleichung

$$k = iw - \frac{1}{\omega^2 C} \frac{di}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (184)$$

Diese Gleichung bildet wiederum das Seitenstück zu Gl. 105 (S 206). Setzen wir wie dort die Klemmenspannung von der Form

$$k = \mathfrak{K} \sin \omega t$$

voraus, so ist der Strom von der Form

$$i = \mathfrak{J} \sin (\omega t + \varphi).$$

Denn weil nach dem Vorstehenden eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Kondensatorspannung besteht, muß auch eine zwischen Strom und Klemmenspannung k bestehen. Abb. 234 zeigt, wie sich k aus iw und $\frac{1}{\omega^2 C} \frac{di}{dt}$ zusammensetzt.

Da zwischen Gl. 184 und Gl. 105 nur der Unterschied besteht, daß hier $-\frac{1}{\omega^2 C}$ statt L steht, so können wir die in § 133 erhaltenen Resultate sofort aufnehmen und diesen Ausdruck für L einsetzen. Es ist also

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \quad \ldots\ldots \quad (185)$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{w \omega C} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (186)$$

wobei φ statt ψ gesetzt ist.

An Stelle des induktiven Widerstandes ωL steht also in diesen beiden Gleichungen der Ausdruck $-\frac{1}{\omega C}$, den man als **Kapazitätswiderstand** bezeichnet. Da der Winkel φ in dem Ausdruck für i positiv ist, und in dem Ausdruck für $\operatorname{tg}\varphi$ alle Größen positiv sind, so eilt der Strom der Klemmenspannung k um den Winkel φ vor, wie auch Abb. 234 zeigt, im Gegensatz zu einem Stromkreis mit Selbstinduktion, wo der Strom der Klemmenspannnung nacheilt (Abb. 164).

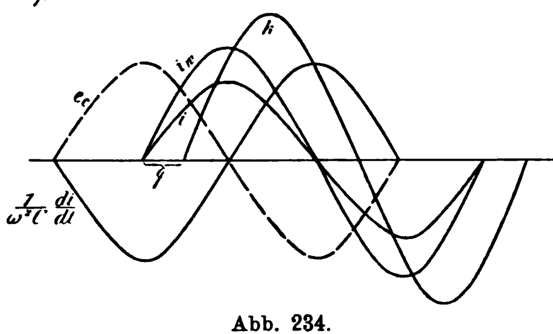


Abb. 234.

Schreibt man Gl. 185 in der Form

$$K^2 = w^2 J^2 + \frac{J^2}{\omega^2 C^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

so erscheint K als Resultierende aus dem Spannungsabfall wJ und der Kapazitätsspannung $\frac{J}{\omega C}$, was durch Abb. 235 graphisch dargestellt ist. (Man vergleiche damit Abb. 169 S. 216).

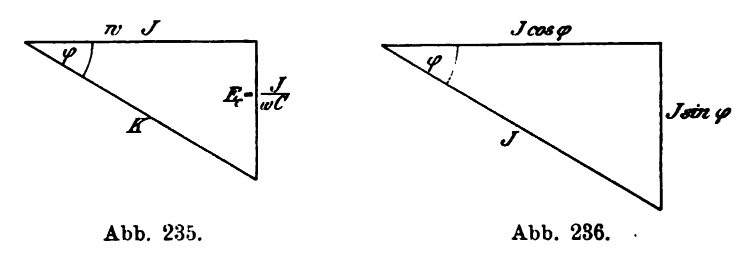


Abb. 235. Abb. 236.

Die Leistung des Stromes ist $KJ\cos\varphi$. Zerlegt man den Strom in die Komponenten $J\cos\varphi$ und $J\sin\varphi$ (Abb. 236), so ist die erste der **Wattstrom**, die zweite der **wattlose Strom**[1]). (Vgl. §. 136).

[1]) Diese Stromkomponente wird manchmal auch „Ladestrom" genannt. Diese Bezeichnung ist ebenso unrichtig und irreführend wie der Name „Magneti-

Beispiel. An eine Wechselspannung von 100 Volt, 50 Perioden ($\omega = 2\pi \cdot 50 = 314$) sei ein Luftkondensator von 1000 cm² Fläche und 0,2 cm Abstand mit einem Vorschaltwiderstand von 100 Ohm angeschlossen. Nach § 27 ist

$$C = \frac{1000}{4\pi \cdot 0{,}2} = 400 \text{ abs. Einh.}$$

$$= 400 \cdot \frac{10^{-11}}{9} = 44 \cdot 10^{-11} \text{ Farad (Kap. 17).}$$

Also

$$J = \frac{100}{\sqrt{100^2 + \frac{1}{(314 \cdot 44 \cdot 10^{-11})^2}}} = \frac{100}{\sqrt{100^2 + \frac{10^{22}}{(314 \cdot 44)^2}}}$$

$$= \frac{100}{\frac{10^{11}}{314 \cdot 44}} = \frac{100 \cdot 13800}{10^{11}} = 138 \cdot 10^{-7} = 0{,}0000138 \text{ Ampere.}$$

171. Vergleich mit der Hydrodynamik.

Eine mechanische Vorstellung von dem Wesen des Verschiebungsstromes im Dielektrikum eines Kondensators und von dem Unterschiede zwischen diesem und dem Strom in einem Leiter, gibt folgende von Claude angegebene hydrodynamische Vorrichtung.

Die beiden Gefäße A und B sind durch Schläuche mit dem Gefäße C verbunden, das im Inneren eine elastische Membran enthält. Sind beide Gefäße gleich hoch gestellt, so wirkt auf beiden Seiten der gleiche Druck. Senkt man aber B (Abb. 237), so wird jetzt die Membran durch den Überdruck auf der linken Seite nach rechts ausgedehnt, und in beiden Schläuchen strömt Flüssigkeit von links nach rechts, ohne daß ein wirkliches Übergehen der Flüssigkeit von A nach B stattfindet; es ist bloß ein Verschiebungsstrom. Hebt man nun B und senkt A, so findet das Umgekehrte statt, es geht ein Verschiebungsstrom von rechts nach links. Geschieht dies in periodischer Aufeinanderfolge, so haben wir ganz genau den Fall eines Kondensatorstromes.

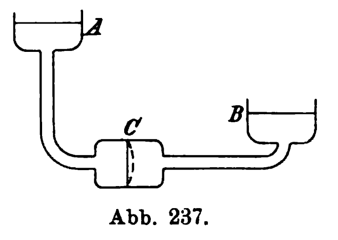


Abb. 237.

Setzen wir die Zuleitung (und in diesem Beispiel die Schläuche) widerstandslos voraus, so ist die Stromstärke des Verschiebungsstromes nach Gl. 182 $J = \omega C E_c$, d. h. in der Zeiteinheit wird um so mehr Elektrizität verschoben, je größer die Periodenzahl, die

sierungsstrom" für die wattlose Komponente bei einer Drosselspule. (Vgl. § 164). Denn nicht nur der wattlose Strom, sondern der gesamte J ladet den Kondensator.

Kapazität und die Spannung ist. Ganz dasselbe erkennt man aus diesem Beispiel, wenn C die Größe der Membran und E_c den Niveauunterschied der beiden Gefäße bedeutet.

172. Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität in Hintereinanderschaltung.

Enthält der an die Klemmenspannung k (zwischen AB, Abb. 238) angeschlossene Stromkreis außer dem Widerstande w, der Kapazität C, noch die Selbstinduktion L, so tritt in die Spannungsgleichung (184) auch noch die induktive Spannung $L\frac{di}{dt}$ ein (§ 132), und sie lautet daher

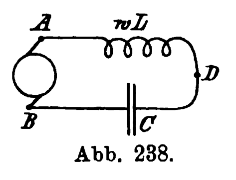


Abb. 238.

$$k = iw + L\frac{di}{dt} - \frac{1}{\omega^2 C}\frac{di}{dt}$$

$$= iw + \left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)\frac{di}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad (188)$$

Diese Spannungsgleichung hat dieselbe Form wie Gl. 105, S. 206, nur daß an Stelle von L der Ausdruck $L - \frac{1}{\omega^2 C}$ getreten ist. Wir haben also in den scheinbaren Widerstand (Gl. 110) und in die Phasenverschiebung (Gl. 112) statt L diesen Ausdruck einzusetzen und erhalten sofort

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + \omega^2\left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega\left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)}{w},$$

wenn der Strom von der Form $i = \mathfrak{J}\sin(\omega t + \varphi)$ ist; oder anders geschrieben:

$$J = \frac{K}{\sqrt{w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (189)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (190)$$

In diesen beiden Formeln tritt also an Stelle des induktiven Widerstandes ωL die Differenz aus induktivem und Kapazitätswiderstand. Aus sämtlichen vorstehenden Gleichungen ersieht man, daß Selbstinduktion und Kapazität einander entgegenwirken. Daher kann man nicht ohne weiteres sagen, ob der Strom der Klemmenspannung vor- oder nacheilt, denn der Winkel φ kann positiv und negativ sein. Ist der induktive Widerstand ωL größer als der Kapazitätswiderstand $\frac{1}{\omega C}$, so ist φ negativ, d. h. der Strom eilt der Klemmenspannung nach, weil eben die Selbstinduktion überwiegt. Im umgekehrten Falle ist φ positiv, d. h. der Strom eilt der Klemmenspannung voraus, weil der Einfluß der Kapazität überwiegt.

Daß bei Hintereinanderschaltung von Selbstinduktion und Kapazität die Differenz $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ an Stelle von ωL tritt, gilt ganz allgemein. Man erhält also alle Formeln, die bei Anwesenheit eines Kondensators gelten, wenn man in den Formeln der Kapitel 133—161 diesen Ersatz vornimmt.

173. Elektrische Resonanz.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo induktiver und Kapazitätswiderstand einander gleich sind; also

$$\left.\begin{aligned} \omega L - \frac{1}{\omega C} &= 0 \\ \text{oder} \qquad L &= \frac{1}{\omega^2 C} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (191)$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{K}{w} \\ \text{und} \qquad \varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (192)$$

Die Stromstärke ist also in diesem Falle so groß, als ob weder Selbstinduktion noch Kapazität, sondern bloß Widerstand vorhanden wäre, und es besteht keine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

Stellt man den Verlauf der Stromstärke durch eine Schaulinie dar, wenn eine der Größen L, C oder $\omega = 2\pi\nu$ von null an wächst, so sieht man, daß der Anstieg zu dem Maximum $J = \frac{K}{w}$ ziemlich

rasch erfolgt. Bei weiterem Wachsen nimmt J ebenso plötzlich wieder ab. Abb. 239 zeigt diesen Verlauf der Stromstärke bei wachsender Selbstinduktion; und zwar gilt die Kurve I für $K = 100$ Volt, $w = 10$ Ohm, $C = 0{,}000001$ Farad und $\nu = 48$ $(\omega = 300)$.

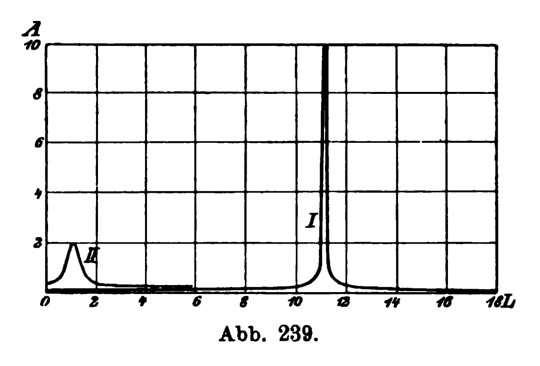


Abb. 239.

Das plötzliche Ansteigen des Stromes bei einem bestimmten Werte von L, und das sofortige Abfallen nach Überschreitung dieses Wertes gleicht der Erscheinung der Resonanz in der Akustik; man nennt es daher **elektrische Resonanz**. Der Wert von L, bei dem sie eintritt, ergibt sich aus der obigen Bedingungsgleichung, nämlich

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{300^2 \cdot 0{,}000001} = 11{,}1 \text{ Henry}.$$

Dabei ist die Stromstärke

$$J = \frac{K}{w} = 10 \text{ Ampere}.$$

Die Kurve II in Abb. 239 git für dieselbe Spannung und Frequenz, aber für $w = 50$ und $C = 0{,}00001$ Farad. Infolge des größeren Widerstandes ist das Resonanzmaximum kleiner und infolge der größeren Kapazität tritt es schon bei einem kleineren Wert der Selbstinduktion ein.

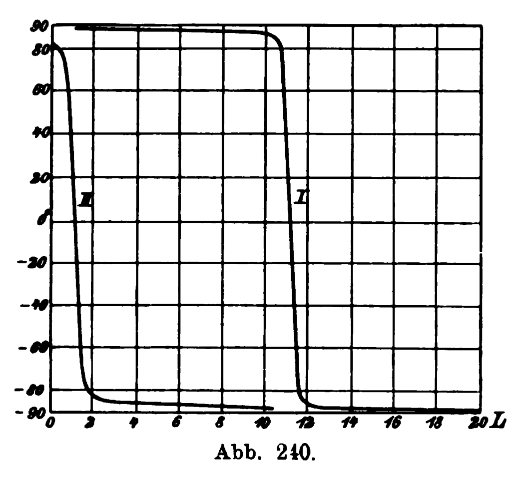


Abb. 240.

In Abb. 240 stellen die Kurven I und II den Verlauf des Phasenverschiebungswinkels φ für dieselben Zahlenbeispiele dar. Wie man sieht, ist φ anfangs sehr groß — nahezu 90^0 — und positiv. Dann fällt es sehr rasch auf null beim Resonanzwert $L = 11{,}1$. Mit

weiter wachsendem L steigt es ebenso rasch zu großen negativen Werten an.

Dasselbe Verhalten zeigt sich zufolge der Gl. 191 und 192, wenn L konstant ist und C von null an wächst, oder wenn L und C konstant sind und die Periodenzahl ν bzw. ω von null an wächst.

Die Bedingungsgleichung 191 kann man auch in der Form schreiben

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Sie besagt, welche Periodenzahl ein Wechselstrom haben muß, damit bei gegebener Selbstinduktion und Kapazität Resonanz eintritt.

Die Gl. 189 kann man in die Form bringen

$$K^2 = w^2J^2 + \left(\omega LJ - \frac{J}{\omega C}\right)^2.$$

Die Klemmenspannung K ist also die Resultierende aus den drei effektiven Spannungen, nämlich dem Ohmschen Spannungsabfall wJ, der induktiven Spannung ωLJ und der Kapazitätsspannung $-\frac{J}{\omega C}$. Im Falle der Resonanz heben sich die beiden letzteren auf, jede für sich aber erreicht einen sehr hohen Wert, da J sehr groß ist. Für das obige Zahlenbeispiel I ist die induktive Spannung gleich $\omega LJ = 300 \cdot 11{,}1 \cdot 10 = 33\,300$ Volt. Genau so groß ist die Kapazitätsspannung E_c (zwischen den Punkten BD in Abb. 238). Die Klemmenspannung zwischen den Punkten AD, zwischen denen sowohl der Spannungsabfall wJ, als auch die induktive Spannung ωLJ liegt, ist bei Resonanz gleich

$$\sqrt{(wJ)^2 + (\omega LJ)^2} = \sqrt{100^2 + 33\,300^2} = 33\,301 \text{ Volt}.$$

Man erkennt daraus, wie gefährlich der Eintritt der Resonanz für die Isolation des Stromkreises sein kann, selbst wenn die zugeführte Klemmenspannung nur klein ist, wie in diesem Beispiel 100 Volt.

Das Charakteristische der Resonanzerscheinung liegt also in zwei Umständen: Die Stromstärke steigt auf einen hohen Wert an, und die Phasenverschiebung wird null. Der physikalische Grund für beide Erscheinungen ist der, daß in diesem Falle die induktive und die Kapazitätsspannung gleich groß sind und einander entgegenwirken, so daß sie sich gegenseitig aufheben.

Abb. 241 zeigt die graphische Darstellung dieser Verhältnisse (Spannungsdiagramm). In horizontaler Richtung ist der Spannungs-

abfall wJ aufgetragen. Da die induktive Spannung E_s dem Strom um 90° in der Phase nacheilt, so ist sie in der Richtung OB aufgetragen. Da die Kapazitätsspannung E_c dem Strom um 90° voreilt, so ist sie in der Richtung OG aufgetragen. Aus diesen drei Spannungen ist nun die Resultierende zu bilden. Zunächst geben wJ und E_s die Resultierende OH, das ist die Spannungsdifferenz zwischen den Punkten AD. Aus dieser und E_c ergibt sich die Resultierende K als Klemmenspannung zwischen AB (Abb. 238). Oder man bildet zuerst die Differenz $E_s - E_c$ und aus dieser und wJ die Resultierende K. Da bei der Resonanzbedingung E_s und E_c gleich groß sind, so heben sie sich gegenseitig auf und es ist $K = wJ$.

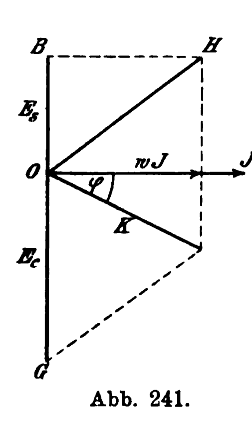


Abb. 241.

Die bei Resonanz eintretenden Werte der **induktiven** und der **Kapazitätsspannung** sind aber nicht in allen Fällen die größten überhaupt vorkommenden. Diese und die Bedingungen, unter denen sie eintreten, ergeben sich durch Aufsuchung des Maximums. Die induktive Spannung ist

$$E_s = \omega L J = \frac{\omega L K}{\sqrt{w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

und die Kapazitätsspannung

$$E_c = \frac{K}{\omega C \sqrt{w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Ist ω und C konstant, **L veränderlich,** so findet man die Bedingungen für das Maximum, indem man den Differentialquotienten nach L gleich null setzt. Man findet so, daß E_s sein Maximum erreicht für $L = w^2 C + \frac{1}{\omega^2 C}$; und der Wert dieses Maximums ist $E_s = K \sqrt{1 + \frac{1}{w^2 \omega^2 C^2}}$. Da in dem Ausdruck für die Kapazitätsspannung E_c das L nur in einem Glied vorkommt, so sieht man ohne weiteres, daß ein Maximum für $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, also bei der Resonanzbedingung eintritt, und daß der Wert des Maximums $\frac{K}{w \omega C}$ ist, also identisch mit dem Werte bei Resonanz, weil $\frac{K}{w}$ die Stromstärke bei Resonanz ist.

Ist ω und L konstant, C **veränderlich,** so sieht man ohne weiteres, daß E_s ein Maximum hat bei $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, also bei der Resonanz, und daß der Wert dieses Maximums $\frac{\omega L K}{w}$ ist, also identisch mit dem Werte bei Resonanz. Das Maximum von E_c findet man durch Differentation nach C. Es tritt ein für $C = \frac{L}{w^2 + \omega^2 L^2}$ und sein Wert ist $E_c = \frac{K}{w}\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}$.

Ist L und C konstant, ω **veränderlich,** so ist die Maximumsbedingung für E_s:

$$\omega^2 = \frac{2}{2LC - w^2 C^2}$$

und für E_c:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{w^2}{2L^2}.$$

Man sieht, daß alle vorstehenden Maximumsbedingungen, die nicht schon von vornherein mit der Resonanzbedingungen identisch sind, in diese übergehen, wenn w verschwindend klein ist. Auch der Wert des Maximums geht dann in den betreffenden Resonanzwert über. Ein erheblicher Unterschied gegen die Resonanz tritt nur auf, wenn w sehr groß ist gegen ωL bzw. $\frac{1}{\omega C}$.

174. Mehrere Kondensatoren in Nebeneinanderstellung und in Hintereinanderschaltung.

Befinden sich zwei (oder mehrere) Kondensatoren in Nebeneinanderschaltung (Abb. 242) derart, daß Widerstand und Selbstinduktion der Verbindungsdrähte verschwindend klein sind, so ist in den vorhergehenden Gleichungen die Summe der Kapazitäten

$$C = C_1 + C_2$$

einzusetzen (§ 31).

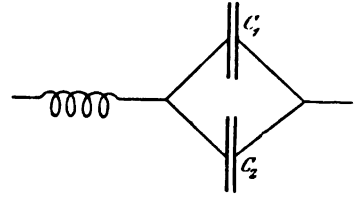


Abb. 242.

Befinden sich zwei (oder mehrere) Kondensatoren in Hintereinanderschaltung (Abb. 243), so ist die Spannungsgleichung dieses Stromkreises

$$k = iw_1 + L_1\frac{di}{dt} - \frac{1}{\omega^2 C_1}\frac{di}{dt} + iw_2 + L_2\frac{di}{dt} - \frac{1}{\omega^2 C_2}\frac{di}{dt}$$

$$= (w_1 + w_2)\,i + \left[(L_1 + L_2) - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\right]\frac{di}{dt},$$

Abb. 243.

d. h. in einem solchen Stromkreis sind die Widerstände und die Selbstinduktionen für sich zu addieren und die gesamte Kapazität C ist bestimmt durch

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Diese letzte Beziehung kennen wir bereits aus § 31. Tatsächlich befinden sich ja auch hier die beiden Kondensatoren in Kaskadenschaltung.

175. Stromverzweigung bei Selbstinduktion und Kapazität.

Wir betrachten den Fall, daß sich ein Strom in zwei Zweige teilt, von denen jeder Widerstand Selbstinduksion und Kapazität enthält (Abb. 244). Ist die Klemmenspannung zwischen den Verzweigungspunkten

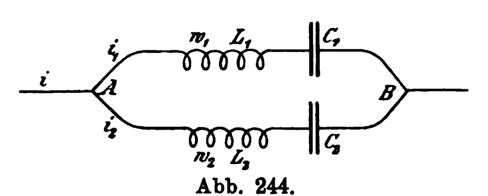


Abb. 244.

$$k = K \sin \omega t$$

und der gesamte Strom

$$i = \mathfrak{J} \sin(\omega t + \varphi)$$

so sind die beiden Zweigströme von der Form

$$i_1 = \mathfrak{J}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = \mathfrak{J}_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Nach dem Ergebnis in § 172 erhält man sogleich die Ausdrücke für J, J_1, J_2, tg φ, tg φ_1, tg φ_2 aus den entsprechenden Ausdrücken in § 141 und 142 bzw. 161, wenn man ωL_1 durch $\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$ und ωL_2 durch $\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$ ersetzt und die Ausdrücke für die trigon. Tang. der Phasenwinkel mit negativen Vorzeichen versieht, da sie auch in den obigen Gleichungen für i, i_1, i_2 entgegengesetztes Vorzeichen haben wie in § 142.

Ist der Verzweigung Widerstand und Selbstinduktion vorgeschaltet, so kommt § 143 in Betracht.

176. Ein Kondensator im Nebenschluß zu Widerstand und Selbstinduktion.

Um den Einfluß der Kapazität auf eine Stromverzweigung leichter übersehen zu können, wollen wir den einfacheren Fall, wo der eine Zweig nur den Widerstand w und die Selbstinduktion L, der andere nur die Kapazität C enthält (Abb. 245), näher untersuchen. Für den einen Zweig ist

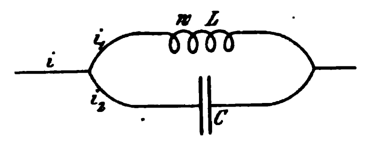


Abb. 245.

$$J_1 = \frac{K}{\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\omega L}{w},$$

und für den anderen Zweig, wo der Widerstand null ist, nach § 170

$$J_2 = \omega C K,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \infty, \quad \varphi_2 = 90^0.$$

Für den gesamten Strom J und seine Phasenverschiebung φ gegen die Klemmenspannung K ergeben sich aus Gl. 123 und 124, indem man statt ωL_2 den Wert $-\frac{1}{\omega C}$ einsetzt, folgende Ausdrücke

$$J = \frac{K}{\sqrt{\frac{w^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 C^2 \left[w^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}}} \quad . \quad . \quad . \quad (193)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega}{w}\left[L - C(w^2 + \omega^2 L^2)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (194)$$

Ist $L > C(w^2 + \omega^2 L^2)$, so ist φ negativ, d. h. der gesamte Strom eilt der Spannung nach. Im umgekehrten Falle ist φ positiv, d. h. der Strom eilt der Spannung voraus.

Da im scheinbaren Widerstand (Gl. 193) eine Differenz im Nenner vorkommt, so muß der Gesamtstrom J ein Minimum haben. Man findet es, wenn man J nach C oder L differenziert und den Differentialquotienten gleich null setzt.

Ist L und ω konstant, C **veränderlich,** so findet man, daß das Minimum eintritt für

$$C = \frac{L}{w^2 + \omega^2 L^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (195)$$

Aus Gl. 194 erkennt man ohne weiteres, daß auch unter derselben Bedingung $\varphi = 0$ ist.

Den Wert des Minimums findet man, wenn man aus der letzten Bedingungsgleichung den Wert von C in Gl. 193 einsetzt. Das gibt

$$J_{min} = \frac{wK}{w^2 + \omega^2 L^2}.$$

Da $\varphi = 0$ ist, so ist $\cos\varphi = 1$ und die Leistung des Stromes ist $P = JK$. Es ist also im Gesamtstrom keine wattlose Komponente enthalten, obwohl in den Zweigströmen J_1 und J_2 eine solche enthalten ist. Man kann daher einen Apparat, der den Widerstand w und die Selbstinduktion L hat, ohne wattlosen Strom, also mit dem kleinstmöglichsten Strom betreiben, wenn man einen Kondensator parallel schaltet, dessen Kapazität die Gl. 195 erfüllt. Das wäre auch für die Starkstromtechnik sehr wichtig; aber eine allgemeine Anwendung scheitert daran, daß es bisher keine für große Stromstärken brauchbare Kondensatoren gibt.

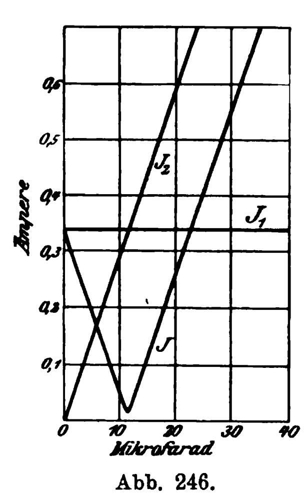


Abb. 246.

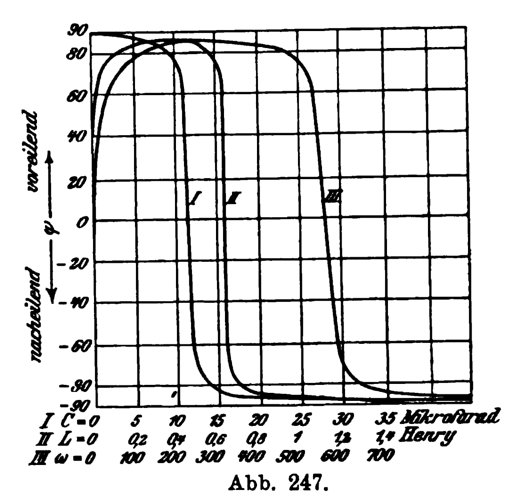


Abb. 247.

Für ein Zahlenbeispiel:

$K = 100$ Volt $\qquad w = 10$ Ohm

$\nu = 48\ (\omega = 300) \qquad L = 1$ Henry

zeigt Abb. 246 den Verlauf des Gesamtstromes J und der Zweigströme J_1, J_2, wenn die Kapazität von null bis 40 Mikrofarad wächst. Das Minimum von J, wobei auch $\varphi = 0$ ist liegt nach Gl. 195 bei

$$C = \frac{1}{10^2 + 300^2} = 0{,}0000111 \text{ Farad} = 11{,}1 \text{ Mikrofarad}.$$

Für dasselbe Zahlenbeispiel zeigt die Schaulinie I in Abb. 247 den Verlauf der Phasenverschiebung φ; wie man sieht, ändert sich φ ähnlich wie bei Hintereinanderschaltung von Kapazität und Selbstinduktion (Abb. 240).

Da bei diesem, durch die Bedingungsgleichung 195 charakterisierten Fall der gesamte Strom J kleiner ist als jeder der beiden Zweigströme und die Phasenverschiebung φ null ist, so spricht man auch hier zuweilen von Resonanz.[1])

Ist w^2 verschwindend klein gegen $\omega^2 L^2$, so geht die Minimumsbedingung (Gl. 195) über in $C = \frac{1}{\omega^2 L}$, lautet dann also ebenso wie bei Hintereinanderschaltung, wo diese Bedingung aber für beliebig große Widerstände gilt. Das Stromminimum ist dann $J_{min} = 0$.

Von Interesse ist noch der Fall, wo der die Selbstinduktion enthaltende Zweigstrom ebenso groß ist wie der Gesamtstrom, d. h. wo das Verhältnis $J : J_1$ gleich 1 ist. Also

$$\frac{J}{J_1} = \omega C \sqrt{\omega^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 1.$$

Diese Bedingungsgleichung ist erfüllt für

$$C = 0$$

und für

$$C = \frac{2L}{w^2 + \omega^2 L^2},$$

also für den Fall, daß der Zweig mit der Kapazität gar nicht vorhanden ist oder für den Fall, daß die Kapazität doppelt so groß ist, als für die Minimumsbedingung, wie man auch aus Abb. 246 erkennt.

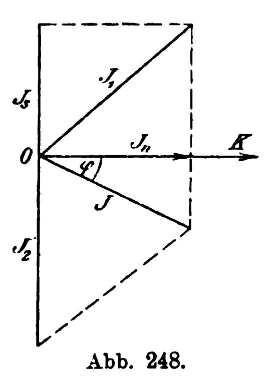


Abb. 248.

Abb. 248 zeigt die graphische Darstellung der Stromvektoren bei Nebeneinanderschaltung von Kapazität und Selbstinduktion. J_n ist die Wattkomponente und J_s die wattlose Komponente des Zweigstromes J_1 genau wie in Abb. 173. Dazu kommt jetzt noch

---

[1]) Nach der Bedeutung, die das Wort „Resonanz“ in der Physik hat, sollte man es niemals auf ein Minimum, sondern nur auf ein Maximum wie in § 173 anwenden. Häufig wird sogar dieses Minimum als „Stromresonanz“ und jener Fall als „Spannungsresonanz“ bezeichnet. Das ist ganz unrichtig, denn auch jener Fall ist eine Resonanz des Stromes, während die Spannungsmaxima im allgemeinen damit nicht verbunden sind, wie wir in § 173 gesehen haben.

der Zweigstrom J_2. Da dieser reiner Kapazitätsstrom ist, so eilt er der Klemmenspannung, also auch der Wattkomponente um 90° vor. Die Resultierende aus J_1 und J_2 gibt nun den Gesamtstrom J, dessen Phasenverschiebung gegen die Klemmenspannung φ ist. Man erkennt daraus, daß J ein Minimum und $\varphi = 0$ ist, wenn die beiden wattlosen Ströme J_s und J_2 gleich groß sind.

Aus dem Vergleich dieses Diagrammes mit dem in Abb. 241 erkennt man, daß hier die Zusammensetzung der Ströme so erfolgt, wie dort die Zusammensetzung der Spannungen.

Bei Hintereinanderschaltung von Kapazität und Selbstinduktion (§ 173) ist der Fall möglich, daß sich die Wirkung beider gegenseitig aufhebt, so daß die Stromstärke so ist, als wenn nur der Widerstand w vorhanden wäre; das fällt dort mit der Resonanz zusammen. Dieser Fall ist hinsichtlich des Gesamtstromes J auch bei Nebeneinanderschaltung möglich. Man findet die Bedingung dafür, wenn man den Ausdruck für J gleich $\frac{K}{w}$ setzt. Man erhält so

$$w^4 C^2 + \omega^2 w^2 C^2 L^2 - L^2 - 2 w^2 L C = 0.$$

Für die Kapazität ergibt sich daraus die Bedingung

$$C = \frac{L}{w^2 + \omega^2 L^2}\left(1 + \sqrt{2 + \frac{\omega^2 L^2}{w^2}}\right).$$

Die Abb. 246 und die Kurve I in Abb. 247 stellen die Verhältnisse der Stromverzweigung für den Fall dar, daß ω, w und L konstant, aber C veränderlich ist. Wir betrachten nun den Fall, daß **L veränderlich** und die übrigen Größen konstant sind. Dann findet man ein Minimum des Gesamtstromes J aus Gl. 193 in bekannter Weise für

$$L = \frac{1}{2\omega^2 C} + \sqrt{\frac{1}{4\omega^4 C^2} + \frac{w^2}{\omega^2}}$$

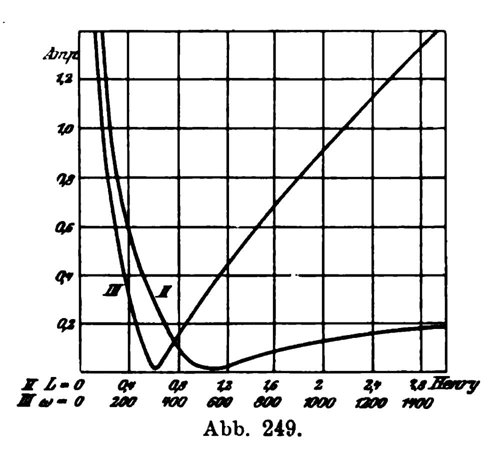


Abb. 249.

In Abb. 249 zeigt Kurve II den Verlauf von J für $K = 100$, $w = 10$, $\omega = 300$ und $C = 10$ Mikrofarad. Das Minimum ist bei $L = 1{,}11$.

Während bei veränderlicher Kapazität ein Minimum oder Maximum für φ nicht existiert, findet man bei veränderlicher Selbstinduktion aus Gl. 194 ein Maximum für φ bei

$$L = \frac{1}{2\,\omega^2 C},$$

das ist in diesem Zahlenbeispiel bei $L = 0{,}555$.

Setzt man Gl. 194 gleich null, so findet man, daß φ null wird für

$$L = \frac{1}{2\,\omega^2 C} \pm \sqrt{\frac{1}{4\,\omega^4 C^2} - \frac{w^2}{\omega^2}}.$$

also für zwei verschiedene Werte von L, wenn gleichzeitig die Bedingung $\frac{1}{2\,\omega C} > w$ erfüllt ist, da nur unter dieser Bedingung der Wurzelausdruck reell ist. In Abb. 247 zeigt Kurve II den Verlauf von φ für dasselbe Zahlenbeispiel. Die gegenseitige Vernichtung von Kapazität und Selbstinduktion $\left(J = \frac{K}{w}\right)$ ergibt sich aus Gl. 193 für

$$L = \frac{w^2 C}{1 - \omega^2 w^2 C^2}\left(\sqrt{2 - \omega^2 w^2 C^2} \pm 1\right),$$

wenn gleichzeitig die Bedingung

$$2 > \omega^2 w^2 C^2$$

erfüllt ist, da nur dann der Wurzelausdruck reell ist.

Wir betrachten schließlich noch den Fall, daß **ω veränderlich** ist, während die übrigen Größen konstant sind. Dann findet man ein Minimum des Gesamtstromes J aus Gl. 193 in bekannter Weise für

$$\omega = \frac{1}{L}\sqrt{-w^2 + \sqrt{\frac{L^2}{C^2} + 2\,w^2}},$$

wenn gleichzeitig die Bedingung $\frac{L^2}{C^2} + 2\,w^2 > w^4$ erfüllt ist, da nur dann der Wurzelausdruck reell ist. In Abb. 249 zeigt Kurve III den Verlauf von J für $K = 100$, $w = 10$, $L = 1$, $C = 10$ Mikrofarad. Das Minimum ist bei $\omega = 316$, d. i. bei $\nu = 50{,}3$. Die Phasenverschiebung φ (Gl. 194) erreicht ein Maximum für

$$\omega = \sqrt{\frac{L - w^2 C}{3\,C L^2}}$$

und sie ist null für $\omega = 0$ und für $\omega = \sqrt{\frac{L - w^2 C}{C L^2}}$, wenn gleichzeitig die Bedingung $L_1 > w^2 C$ erfüllt ist, da nur dann der Wurzelausdruck reell ist. Die Kurve III in Abb. 247 stellt den Verlauf von φ dar. Das Maximum ist für dieses Zahlenbeispiel bei $\omega = 182{,}5$.

Die gegenseitige Vernichtung von Kapazität und Selbstinduktion $\left(J = \frac{K}{w}\right)$ tritt ein für

$$\omega = \frac{1}{wLC} \sqrt{L^2 + 2w^2LC - w^4C^2},$$

wenn gleichzeitig $L^2 + 2w^2LC > w^4C^2$ ist, da nur dann der Wurzelausdruck reell ist.

Aus den vorstehenden Ergebnissen erhält man sofort die noch einfacheren Fälle, wenn nämlich im Zweig 1 entweder der Widerstand w oder die Selbstinduktion L so klein ist, daß es gleich null gesetzt werden kann.

177. Ladungsarbeit eines Kondensators.

Multipliziert man die Spannungsgleichung eines Kondensators (Gl. 183) mit $i\,dt$, so erhält man die während der unendlich kleinen Zeit dt im Kondensator auftretende elektrische Arbeit dA. Also

$$dA = e_c\,i\,dt = \frac{i}{\omega^2 C}\,dt$$

oder anders geschrieben

$$dA = d\left(\frac{i^2}{2\,\omega^2 C}\right).$$

Mithin ist $\frac{i^2}{2\,\omega^2 C}$ der allgemeine Ausdruck für die elektrische Arbeit eines einfachen periodischen Stromes i in einem Kondensator von der Kapazität C.

Die gesamte elektrische Arbeit während einer halben Periode muß null sein, ebenso wie die magnetische Arbeit (§ 168). Denn während der ersten Viertelperiode einer Stromwelle, also während der Zunahme des Stromes von null bis zum Scheitelwert $\mathfrak{J}$ ist die gesamte elektrische Arbeit gleich $\left.\frac{i^2}{2\,\omega^2 C}\right|_0^{\frac{T}{4}} = \frac{\mathfrak{J}^2}{2\,\omega^2 C}$. Während der nächsten Viertelperiode, also während der Strom vom Scheitelwerte $\mathfrak{J}$ bis null sinkt, ist die elektrische Arbeit gleich

$$\left.\frac{i^2}{2\,\omega^2 C}\right|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{\mathfrak{J}^2}{2\,\omega^2 C},$$

also ebenso groß wie während der ersten Viertelperiode, aber negativ. Die gesamte elektrische Arbeit während einer halben Periode ist mithin null.

Der obige aus der Spannungsgleichung erhaltene Ausdruck für die elektrische Arbeit eines einfachen periodischen Stromes, während er von null bis zum Scheitelwert ansteigt, ist identisch mit dem in § 32 aus dem statischen Zustande eines Kondensators abgeleiteten Ausdruck für die Ladungsarbeit

$$A = \frac{\mathfrak{Q}^2}{2C} = \frac{C\mathfrak{E}_c^2}{2},$$

wenn $\mathfrak{Q}$ den Scheitelwert der Ladung und $\mathfrak{E}_c$ die Kondensatorspannung bedeutet. Denn nach Gl. 181 ist $\mathfrak{J} = \omega C \mathfrak{E}_c$ und daher $\frac{\mathfrak{J}^2}{2\omega^2 C} = \frac{C\mathfrak{E}_c^2}{2}$. Die elektrische Arbeit der Stromquelle ist also während des Stromanstieges gleich jener Arbeit, welche notwendig ist, um den Kondensator bis zur größten Ladung $\mathfrak{Q}$ zu laden, also jener Arbeit, welche notwendig ist, um die zwischen den Kondensatorplatten im Dielektrikum verlaufenden elektrischen Kraftlinien zu erzeugen. Nimmt die Ladung vom Werte $\mathfrak{Q}$ bis null ab, so verschwindet das elektrische Feld im Dielektrikum, und die elektrische Arbeit wird wieder an die Stromquelle zurückgegeben.

Das Vorstehende gilt natürlich nicht nur für einen Kondensator, sondern auch für einen einzelnen Leiter, der eine periodisch veränderliche Ladung hat, also z. B. für eine an einen Wechselstromkreis angeschlossene leitende Kugel u. dgl., sowie für jeden Draht, der Wechselstrom führt, weil auch dieser eine gewisse Kapazität hat (§ 22).

Die elektrische Arbeit in einer Raumeinheit des den Leiter umgebenden Dielektrikums ist (nach § 35) $A_{einh} = \vartheta \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}$, wenn an der betreffenden Stelle die elektrische Feldstärke von null bis $\mathfrak{H}$ ansteigt.

178. Arbeitsverlust im Dielektrikum.

Die beim Zunehmen des Stromes zur Herstellung des elektrischen Feldes aufgewendete Ladungsarbeit wird beim Abnehmen des Stromes nur dann vollständig an den Stromkreis zurückgegeben, wenn das Dielektrikum ein vollkommenes ist, d. h. wenn kein Verlust in ihm stattfindet. Ein solcher Verlust tritt aber fast bei allen isolierenden Stoffen ein, und zwar aus folgenden drei Ursachen[1]): 1. Da kein Isolator einen unendlich großen Widerstand hat, so geht

[1]) Benischke, Sitzungsber. der Wiener Akad. d. Wiss., Bd. 102. IIa S. 1346, 1893. Zeitschr. f. Elektrot., Wien 1895, Heft 16.

bei Anwendung dünner Schichten von sehr großem Querschnitt, wie es bei Kondensatoren der Fall ist, ein merklicher Strom hindurch, der im Dielektrikum nach dem Jouleschen Gesetze Stromwärme erzeugt. Hier ist zu beachten, daß man bei höherer Spannung den Widerstand eines Isolierstoffes nicht darnach beurteilen darf, wie er sich durch eine Messung mit niedriger Spannung darstellt. Die meisten Isolierstoffe zeigen bei hoher Spannung einen viel kleineren Widerstand als bei niedriger. Wird der Stoff warm, so wird der Widerstand noch erheblich kleiner. 2. Zeigt fast jeder isolierende Stoff, der als Dielektrikum eines größeren Kondensators verwendet werden kann (Luftkondensatoren kommen nur für physikalische Zwecke in Betracht) eine Rückstandsbildung (§ 38), d. h. es dringt ein Teil der Ladung in das Innere des Dielektrikums ein und wird hier eine Zeitlang festgehalten. Bei wechselnder Ladung durch Wechselstrom gleicht sich dieser Rückstand mit einem Teil des Rückstandes der nächsten Halbperiode aus, da dieser entgegengesetzte Ladung hat, wie der vorhergehende. Das bedeutet also einen Verlust von der in jeder Halbperiode zugeführten Elektrizitätsmenge, der sich in nichts anderem als in Wärme äußern kann. 3. Liegen manchmal die Platten des Kondensators nicht so fest an dem Dielektrikum an, daß nicht ein dem Zu- und Abnehmen der Ladung entsprechendes gegenseitiges Anziehen und Loslassen der Platten eintreten kann. Es sind dies jene Kondensatoren, die beim Wechselstrombetrieb brummen oder singen. Die dabei aufgewendete mechanische Arbeit ist ebenfalls ein Verlust, der sich in Wärme umsetzt. Er hat also seinen Grund nicht in der Beschaffenheit des Dielektrikums, sondern in der Konstruktion, muß aber von der Stromquelle gedeckt werden, da die Anziehung auf der elektrischen Ladung beruht.

Bei schlechten Kondensatoren sind diese Verluste, namentlich der zweite, manchmal so bedeutend, daß der Wattverbrauch bis zu einem Drittel des Produktes aus Stromstärke und Kondensatorspannung beträgt.

Vielfach werden diese Verluste als dielektrische Hysterese bezeichnet. Eine dielektrische Hysterese im Sinne der magnetischen Hysterese gibt es aber nicht.[1]) Als magnetische Hysterese (§ 94) bezeichnet man die Erscheinung, daß die jeweilige Kraftliniendichte nicht allein von der herrschenden magnetisierenden Kraft, sondern auch von den vorhergehenden Werten der Kraftliniendichte abhängt, so daß sich ein Unterschied zwischen zunehmender und abnehmender Magnetisierungslinie und ein Arbeits-

---

[1]) Benischke, l. c.

verlust ergibt, welcher der umschlossenen Fläche proportional ist. Eine ähnliche Erscheinung hinsichtlich des elektrischen Feldes im Dielektrikum besteht nicht.[1]) Aus der Erwärmung allein kann man nicht auf Hysterese schließen, denn sonst müßte man einem Stromleiter, in dem Stromwärme auftritt, auch Hysterese zuschreiben.

Dagegen ist bereits festgestellt[2]), daß ein unvollkommenes Dielektrikum zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Platten eine gewisse Arbeitsmenge in sich aufspeichert, die als ein vom Dielektrikum abgegebener Strom nachgewiesen werden kann; es verhält sich also wie ein trockener Akkumulator, nur mit dem Unterschiede, daß sich die aufgespeicherte Arbeit in kurzer Zeit auch von selbst zerstreut. Damit ist die unter 2) angegebene Ursache des Arbeitsverlustes bei wechselnder Elektrisierung bewiesen.

Je vollkommener das Dielektrikum ist, desto kleiner sind die unter 1) und 2) angegebenen Verluste. So sind sie z. B. bei reinem Glimmer und reinem Paraffin sehr klein. Dagegen sind sie bei paraffiniertem oder ähnlich behandeltem Papier, sowie bei dem durch Übereinanderkleben von Glimmerplättchen hergestellten Kunstglimmer (Mikanit) verhältnismäßig groß. Auch in den Hochspannungskabeln sind die dielektrischen Verluste nicht unbeträchtlich.[3])

Hinsichtlich der Abhängigkeit von der Spannung hat sich gezeigt, daß sie im allgemeinen mit dem Quadrate der Spannung zunehmen, wie die Joulesche Wärme.

Alle Verluste im Dielektrikum machen sich als Vergrößerung des dem Kondensator zufließenden Stromes bemerkbar und können durch einen dem vollkommenen Dielektrikum nebengeschalteten, induktionsfreien Widerstand dargestellt werden. Der diesem Widerstand entsprechende, einen Nebenschluß bildende Strom muß vom Ladestrom des Kondensators ebenso unterschieden werden, wie bei einer Drosselspule der dem Eisenverlust entsprechende Strom vom Magnetisierungsstrom (§ 184).

179. Resonanz bei einem unvollkommenen Kondensator.[4])

In § 173 wurde vorausgesetzt, daß wir es mit vollkommenen Kondensatoren zu tun haben, d. h. mit solchen, deren Dielektrikum ein ideales ist, in dem keine dielektrischen Verluste eintreten, und dessen Ohmscher Widerstand unendlich groß ist. Die in der

[1]) Beaulard, L'Eclairage Electr. 23, S. 235.
[2]) Greinacher, Naturwiss. Rundschau 21 S. 133, 1906. Annal. d. Phys. 17 S. 922, 1905; 18 S. 1020, 1905.
[3]) Apt und Mauritius, ETZ 1903, S. 879.
[4]) Benischke, ETZ 1906, S. 693.

Technik verwendeten Kondensatoren sind aber meist sehr unvollkommen, wie im vorigen Paragraphen näher besprochen wurde. Bei solchen geht durch das Dielektrikum nicht nur ein Verschiebungsstrom, sondern auch ein Leitungsstrom, und man muß sich daher einen solchen Kondensator so vorstellen, als wenn ein vollkommener Kondensator und ein induktionsfreier Widerstand nebeneinandergeschaltet wären. Aber auch bei Kondensatoren mit einem vollkommenen Dielektrikum (Luft) treten meist unmittelbare Nebenschlüsse auf, da Entladungen zwischen den Kondensatorplatten oder bei festem Dielektrikum über seine Oberfläche (Oberflächenleitung, Randentladungen § 236) stattfinden. Als Ohmschen Widerstand w_n eines Kondensators bezeichnen wir im folgenden den Widerstand, der den gesamten Verlusten und den unmittelbaren Nebenschlußströmen entspricht.

Der in § 172 behandelte Fall von Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität in Hintereinanderschaltung stellt sich demnach bei einem unvollkommenen Kondensator schematisch so dar, wie Abb. 250 zeigt. Dieser Fall einer Stromverzweigung wurde in § 143 behandelt. Man erhält aus den Formeln in § 142 und 143 die für diesen Fall gültigen, wenn man

Abb. 250.

$$w_1 = w_n, \quad L_1 = 0$$

$$w_2 = 0, \quad L_2 = -\frac{1}{\omega^2 C}$$

setzt (§ 172).

Mithin ist

$$A = \frac{1}{w_n}$$

$$B = -C$$

$$R = \frac{w_n}{1 + (\omega w_n C)^2}$$

$$O = -\frac{w_n^2 C}{1 + (\omega w_n C)^2}$$

$$J = \frac{K}{W_s} = \frac{K}{\sqrt{\left[w + \frac{w_n}{1 + (\omega w_n C)^2}\right]^2 + \omega^2 \left[L - \frac{w_n^2 C}{1 + (\omega w_n C)^2}\right]^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega \left[L - \frac{w_n^2 C}{1 + (\omega w_n C)^2}\right]}{w + \frac{w_n}{1 + (\omega w_n C)^2}}.$$

Da L nur im zweiten Gliede von J vorkommt, so erkennt man ohne weiteres, daß bei veränderlichem L der Strom J ein Maximum ist für

$$L = \frac{w_n^2\, C}{1 + (\omega\, w_n\, C)^2}$$

und daß gleichzeitig der Phasenverschiebungswinkel φ null ist. Es besteht also elektrische Resonanz und die Stromstärke ist in diesem Fall

$$J = \frac{K}{w + \dfrac{w_n}{1 + (\omega\, w_n\, C)^2}},$$

während sie bei einem vollkommenen Kondensator gleich $\frac{K}{w}$ ist, und die Resonanzbedingung $L = \frac{1}{\omega^2\, C}$ lautet. Durch die dielektrischen Verluste und Nebenschlußströme wird also das Strommaximum verkleinert, und die Resonanz tritt schon bei einem kleineren Werte der Selbstinduktion L ein, und ist vom Widerstand des Kondensators w_n abhängig, aber vom vorgeschalteten Widerstand w immer noch unabhängig.

Ist $(\omega\, w_n\, C)^2$ so klein, daß es gegen 1 vernachlässigt werden kann, so geht die Resonanzbedingung über in

$$L = w_n^2\, C$$

und das Strommaximum ist

$$J = \frac{K}{w + w_n},$$

also so, als ob die beiden Widerstände hintereinandergeschaltet wären und der Kondensator gar nicht vorhanden wäre.

Ist $(\omega\, w_n\, C)^2$ so groß, daß 1 dagegen vernachlässigt werden kann, so ist die Resonanzbedingung $L = \frac{1}{\omega^2\, C}$, also gleich der bei einem vollkommenen Kondensator. Aber das Strommaximum ist

$$J = \frac{K}{w + \dfrac{1}{\omega^2\, w_n\, C^2}}.$$

Ist das Produkt $\omega_2^2\, w_n\, C^2$ oder auch nur einer dieser drei Faktoren unendlich groß, so wird $J = \frac{K}{w}$.

Je größer also die Periodenzahl, oder der Nebenschlußwiderstand oder die Kapazität oder deren Produkt ist, desto mehr nähert

sich die Resonanz den Verhältnissen, die bei einem vollkommenen Kondensator ohne Randentladungen und Nebenschlußströmen herrschen.

Nehmen wir an, daß bei dem Zahlenbeispiel in § 173 ($K = 100$, $\omega = 300$, $C = 10^{-6}$, $w = 10$) der Kondensator in seinem Dielektrikum einen Widerstand von $w_n = 100000 = 10^5$ Ohm hat, so tritt Resonanz ein bei

$$L = \frac{10^{10} \cdot 10^{-6}}{1 + (300 \cdot 10^5 \cdot 10^{-6})^2} = \frac{10000}{901} = 11{,}09 \text{ Henry.}$$

Dabei ist die Stromstärke

$$J = \frac{100}{10 + \frac{10^5}{901}} = \frac{100}{121} = 0{,}83 \text{ Amp.}$$

Dagegen erhielten wir in § 172 für die entsprechenden Werte bei einem vollkommenen Kondensator $L = 11{,}11$ Henry, $J = 10$ A. Man sieht daraus, daß durch den Nebenschluß das Strommaximum bedeutend herabgesetzt, seine Lage hinsichtlich der Selbstinduktion aber wenig verändert wird. Bei $w_n = 10^8$ Ohm beträgt die Herabsetzung des Strommaximums noch $1\,^0/_0$.

Bei höherer Frequenz übt selbst ein großer Kondensatorwiderstand einen bedeutenden Einfluß aus, wie folgendes Beispiel zeigt.

$$K = 100 \qquad w = 10 \qquad C = 10^{-9}$$

$$\omega = 10^5 \qquad w_n = 10^7$$

$$J = \frac{100}{10 + \frac{10^7}{1 + (10^5 \cdot 10^7 \cdot 10^{-9})^2}} = 5,$$

während für einen vollkommenen Kondensator

$$J = \frac{100}{10} = 10$$

ist.

Als Kondensatorspannung E_c (Gl. 182) ergibt sich beim ersten Beispiel

$$E_c = \frac{J}{\omega C} = \frac{0{,}83}{300 \cdot 10^{-6}} = 2800 \text{ Volt.}$$

Diese Spannung ist es, welche für den Verlust im Dielektrikum und für die Nebenschlußströme in Betracht kommt, nicht die dem ganzen Stromkreis aufgedrückte Klemmenspannung K (in diesem Beispiel 100 V.).

Die Kondensatorspannung nimmt proportional dem Strome ab; bei demselben Beispiel mit vollkommenem Kondensator ergab sich (S. 311) $E_c = 33\,300$ V.

Ist bei gegebenem ω, w_n und L die Kapazität C veränderlich, so kann man die Bedingung für den Eintritt der Resonanz nicht mehr ohne weiteres erkennen, sondern man muß den Differentialquotienten von J nach C bilden und gleich null setzen. Desgleichen den Differentialquotienten von J nach ω, wenn ω veränderlich ist und w_n, L, C gegeben sind.

180. Das magnetische Feld eines Kondensators.

Von einem elektrischen Strome haben wir die Vorstellung, daß er aus strömender Elektrizität besteht. Wenn dies der Fall ist, muß die Bewegung einer elektrisch geladenen Kugel dieselbe Wirkung hervorbringen wie ein Strom. Tatsächlich konnten Rowland und andere nachweisen, daß bei sehr rascher Bewegung einer geladenen Kugel in einer kreisförmigen Bahn ein magnetisches Feld entsteht, wie bei einem Strom, der einen geschlossenen Kreis bildet. Demnach müssen magnetische Kraftlinien bei jeder Bewegung der Elektrizität entstehen.

Die Richtung, in der eine beliebig kleine Elektrizitätsmenge des Stromes sich bewegt, bezeichnet man als Stromlinie oder Stromfaden. Im Dielektrikum eines Kondensators, der in einen Wechselstromkreis eingeschaltet ist, denkt man sich die Fortsetzung des Leitungsstromes als Verschiebungsstrom (§ 170), dessen Stromfäden zwischen den Platten des Kondensators parallel zu den elektrischen Kraftlinien verlaufen. Jeden Stromfaden muß man sich von magnetischen Kraftlinien umschlossen denken, die wie in Abb. 76 konzentrische Kreise bilden. In jeder zu den Kondensatorplatten parallelen Ebene kann man sich die magnetischen Kraftlinien aller Stromfäden zu einer geschlossenen Linie zusammengesetzt denken, wie Abb. 251 zeigt. Das magnetische Feld der zum Kondensator führenden Stromleitungen setzt sich also im Kondensator fort, nur mit entsprechender Ausbreitung, weil auch der Verschiebungsstrom des Kondensators gegenüber dem Strom in den Leitungen über einen großen Querschnitt ausgebreitet erscheint. Verschiebungsströme gibt es aber nicht nur im Dielektrikum eines Kondensators, sondern überall, wo elektrische Kraftlinien von einem veränderlichen Strome ausgehen.

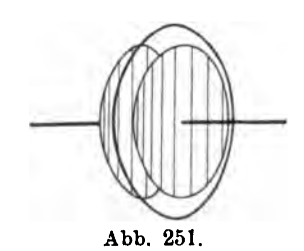


Abb. 251.

Man kann also allgemein sagen, in jedem veränderlichen elektrischen Felde gibt es magnetische Kraftlinien, deren Flächen senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien stehen. Eine neue Erscheinung oder ein neues Gesetz ist das nicht, sondern, wie wir gesehen haben, nur eine Folgerung aus dem allgemeinen Gesetz über Kraftlinien und Ströme.

Bei einem konstanten Gleichstrom gibt es außer dem der Stromstärke entsprechenden magnetischen Felde kein anderes, weil von einem solchen keine Verschiebungsströme ausgehen.

Unter gewöhnlichen Verhältnissen ist das magnetische Feld eines Verschiebungsstromes verschwindend klein. Tritt aber Resonanz in einem Stromkreis mit Kondensator ein (§ 173), so erreicht der Verschiebungsstrom im Kondensator denselben Wert wie der Leitungsstrom, wenn der Kondensator nicht vorhanden ist. Andererseits nimmt aber die magnetische Feldstärke eines Stromelementes (nach § 78) mit dem Quadrate der Entfernung ab, was sehr ins Gewicht fällt, weil der Querschnitt eines Kondensators sehr groß ist im Vergleich zum Querschnitt eines Leiters.

Da der Verschiebungsstrom nach Gl. 182 gleich $\omega C E_c$, also proportional der Periodenzahl ist, so nimmt auch das magnetische Feld des Verschiebungsstromes mit der Periodenzahl zu.

181. Wärmearbeit, magnetische Arbeit, elektrische Arbeit.

Sind in einem Stromkreis Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität hintereinander geschaltet, so ergibt sich aus Gl. 188 die Arbeitsgleichung wiederum durch Multiplikation mit $i\,dt$.

Also

$$dA = ki\,dt = i^2 w\,dt + Li\,di - \frac{1}{\omega^2 C}\,i\,di.$$

Dabei stellt das erste Glied auf der rechten Seite die dem Ohmschen Widerstande entsprechende Wärmearbeit während der Zeit dt dar, das zweite Glied die magnetische Arbeit (§ 168), welche nötig ist, um die mit dem Stromleiter verketteten magnetischen Kraftlinien zu erzeugen, und das dritte Glied die elektrische Arbeit, welche nötig ist, um die elektrischen Kraftlinien im Kondensator zu erzeugen. Jede der beiden letzteren ist während einer halben Periode null, wenn weder ein Verlust im magnetischen, noch im dielektrischen Medium eintritt. Die gesamte Arbeit des Stromes während einer halben Periode besteht dann nur aus der Wärmearbeit und deren mechanischem Äquivalent.

Aus der obigen Arbeitsgleichung ersieht man, daß die magnetische und elektrische Arbeit in jedem Augenblick einander

entgegengesetzt sind. Das heißt, wenn bei zunehmendem Strom magnetische Arbeit von der Stromquelle geleistet wird, wird elektrische Arbeit aus dem Kondensator an die Stromquelle zurückgegeben und umgekehrt, wenn bei abnehmendem Strom magnetische Arbeit an die Stromquelle zurückgegeben wird, muß elektrische Arbeit zur Herstellung des elektrischen Feldes im Kondensator aufgewendet werden. Für den Fall der Resonanz, also für

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

heben sich die beiden letzten Glieder der Arbeitsgleichung gegenseitig auf, und die gesamte Arbeit im ganzen Stromkreis besteht nicht nur während einer halben Periode, sondern in jedem Augenblick nur aus Wärmearbeit $i^2 w\,dt$. In diesem Falle wird also der zur Herstellung des elektrischen Feldes notwendige Arbeitsaufwand von dem verschwindenden magnetischen Felde gedeckt und umgekehrt. Es findet ein fortwährendes Hin- und Herwogen des Arbeitsbetrages $\frac{C\mathfrak{E}_e}{2}$ oder $\frac{L\mathfrak{J}^2}{2}$ zwischen dem Kondensator und dem die Selbstinduktion enthaltenden Teil des Stromkreises statt. Tritt ein Arbeitsverbrauch durch magnetische Hysterese oder durch dielektrische Verluste ein, so vergrößert sich die in Wärme umgesetzte Arbeit um diesen Betrag, der natürlich von der Stromquelle gedeckt werden muß.

182. Resonanztransformator.[1]

Wir betrachten den Fall daß ein Kondensator in den sekundären Stromkreis eines Transformators eingeschaltet ist (Abb. 252). Diese Anordnung wird in der Funkentelegraphie an Stelle von Funkeninduktoren angewendet und gilt angenähert auch für den Fall, daß ein Transformator auf ein Kabel arbeitet. Es gelten dafür alle in § 146 bis 154 abgeleiteten Beziehungen mit Berücksichtigung dessen, daß in den scheinbaren Widerständen statt ωL_{2a} der Ausdruck $\omega L_{2a} - \frac{1}{\omega C}$ und statt ωL_2 der Ausdruck $\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}$ einzusetzen ist (§ 172).

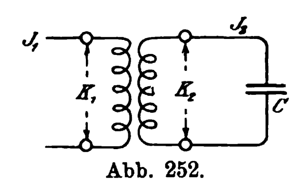


Abb. 252.

Wir beschränken uns auf den einfacheren Fall, daß die Verbindungsleitungen zwischen den sekundären Klemmen und dem

[1]) Ausführlichere Darstellung in ETZ 1907, Heft 2.

Kondensator keinen merklichen Widerstand und keine merkliche Selbstinduktion besitzen, d. h. wir setzen

$$w_{2a} = 0 \qquad L_{2a} = 0$$

infolgedessen ist

$$w_{2i} = w_2 \qquad L_{2i} = L_2.$$

Dann gehen die Gleichungen 135, S. 235, über in

$$\varrho = \frac{w_1 (\omega^2 C L_2 - 1) + \omega^2 C^2 w_2 (w_1 w_2 + \omega^2 M^2)}{\omega^2 C^2 w_2^2 + (\omega^2 C L_2 - 1)^2}$$

$$\lambda = \frac{(\omega^2 C L_2 - 1) [\omega^2 C (L_1 L_2 - M^2) - L_1] + \omega^2 C^2 L_1 w_2^2}{\omega^2 C^2 w_2^2 + (\omega^2 C L_2 - 1)^2}.$$

Die Gl. 133b und 134 gehen nun über in

$$J_1^2 = K_1^2 \frac{[\omega^2 C^2 w_2^2 + (\omega^2 C L_2 - 1)^2]^2}{[w_1 (\omega^2 C L_2 - 1)^2 + \omega^2 C^2 w_2 (w_1 w_2 + \omega^2 M^2)]^2 + \omega^2 \left\{(\omega^2 C L_2 - 1) [\omega^2 C (L_1 L_2 - M^2) - L_1] + \omega^2 C^2 L_1 w_2^2 \right\}^2} \tag{196a}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \omega \frac{(\omega^2 C L_2 - 1) [\omega^2 C (L_1 L_2 - M^2) - L_1] + \omega^2 C^2 L_1 w_2^2}{w_1 (\omega^2 C L_2 - 1)^2 + \omega^2 C^2 w_2 (w_1 w_2 + \omega^2 M^2)} \tag{196b}$$

Die Gl. 140 geht über in

$$J_2^2 = J_1^2 \frac{\omega^4 C^2 M^2}{\omega^2 C^2 w_2^2 + (\omega^2 C L_2 - 1)^2} \quad . \quad . \tag{196c}$$

Die Gl. 136 und 137 gehen über in

$$K_2^2 = J_2^2 \left[w_{2a}^2 + \left(\omega L_{2a} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] = J_2^2 \frac{1}{\omega^2 C^2} \quad . \quad . \quad . \tag{196d}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L_{2a} - \frac{1}{\omega C}}{w_{2a}} = \infty \qquad \varphi_2 = 90^0$$

weil nach Voraussetzung w_{2a} und L_{2a} null ist.

Da wir aus § 173 wissen, daß bei Kapazität und Selbstinduktion Resonanz eintritt, so können wir auch hier Maxima für J_1 K_2 J_2 erwarten. Wir hätten, um sie zu finden, die Differentialquotienten gleich null zu setzen. Das ergibt aber so umfangreiche Ausdrücke, daß sich keine Übersicht gewinnen läßt. Wir betrachten daher folgende Sonderfälle

I. $\qquad w_1 = 0 \qquad w_2 = 0$

d. h. wir vernachlässigen die Ohmschen Widerstände gegenüber den induktiven Widerständen, was mit Ausnahme des später zu betrachtenden Falles (II), wo induktiver und Kapazitätswiderstand

gleich groß sind, näherungsweise meist zutrifft. Dann ergeben sich aus den obigen Gleichungen folgende

$$J_1 = K_1 \frac{\omega^2 L_2 C - 1}{\omega\,[\omega^2 C\,(L_1 L_2 - M^2) - L_1]}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \infty \qquad \varphi_1 = 90^{0}\,{}^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

und wenn wir, um die magnetische Streuung zum Ausdruck zu bringen, den magnetischen Kupplungsfaktor (§ 153)

$$\varkappa^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (198)$$

einführen

$$J_1 = K_1 \frac{\omega^2 L_2 C - 1}{\omega L_1\,[\omega^2 C L_2\,(1 - \varkappa^2) - 1]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (199)$$

$$J_2 = J_1 \frac{\omega^2 \varkappa C \sqrt{L_1 L_2}}{\omega^2 C L_2 - 1}$$

$$J_2 = K_1 \frac{\omega \varkappa C \sqrt{L_2}}{[\omega^2 C L_2\,(1 - \varkappa^2) - 1]\sqrt{L_1}} \quad . \quad . \quad (200)$$

Zunächst sieht man, daß J_1 und J_2 und infolgedessen auch K_2 (Gl. 196d) unendlich groß werden, also Resonanz eintritt, wenn

$$\omega^2 C L_2\,(1 - \varkappa^2) - 1 = 0$$

ist. Bei konstantem $\varkappa$, d. h. bei konstanter Streuung ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$\omega^2 = \frac{1}{C L_2\,(1 - \varkappa^2)},$$

d. h. wenn die Periodenzahl des dem Transformator zugeführten Stromes der Bedingung

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{C L_2\,(1 - \varkappa^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (201)$$

entspricht. Würde der sekundäre Stromkreis allein bestehen, so wäre seine Resonanzbedingung (nach § 173) $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{C L_2}}$. Man erkennt also, daß die Resonanz bei diesem Transformator von der Resonanz der Eigenschwingung des sekundären Kreises und von der Kupplung zwischen den beiden Stromkreisen abhängt. Je schwächer die Kupplung $\varkappa$ ist, desto mehr nähert sich die Resonanzbedingung der des alleinbestehenden sekundären Kreises. Bei voll-

[1]) Mit Ausnahme des Falles $\omega L_2 = \frac{1}{\omega C}$; vgl. S. 333.

ständiger Kupplung ($\varkappa = 1$) tritt Resonanz erst bei unendlich hoher Periodenzahl ein.

Schreibt man die Bedingungsgleichung in der Form

$$\varkappa^2 = 1 - \frac{1}{\omega^2 C L_2},$$

so heißt das, für jede Periodenzahl des dem Transformator zugeführten Stromes, gibt es einen Grad der magnetischen Kupplung oder eine gewisse Streuung, bei welcher die Resonanz eintritt.

Aus Gl. 199 erkennt man ferner ohne weiteres, daß $J_1 = 0$ werden kann. Das ist unter der hier gemachten Voraussetzung ($w_2 = 0$) dann der Fall, wenn

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 C L_2 &= 1 \\ \text{oder} \quad \omega L_2 &= \frac{1}{\omega C} \\ \text{oder} \quad \omega &= \frac{1}{\sqrt{C L_2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (202)$$

Für den sekundären Strom ergibt sich für diesen Fall aus Gl. 200

$$J_2 = K_1 \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{C}{L_1}}$$

und für die sekundäre Klemmenspannung aus dieser und der Gl. 196d

$$K_2 = K_1 \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad \ldots \ldots \quad (203)$$

Wir erhalten also das merkwürdige Ergebnis, daß in diesem besonderen Falle im sekundären Kreise Strom und Spannung vorhanden ist, während der primäre Strom null ist. Es erklärt sich dadurch, daß die Rückwirkung des sekundären Stromes auf den primären gerade gleich und entgegengesetzt dem primären Strom ist, so daß dieser aufgehoben wird. Auch die primäre Phasenverschiebung hat in diesem Falle einen besonderen Wert. Setzt man nämlich die obige Bedingungsgleichung in Gl. 196b ein, so erhält man

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1 w_2}{w_1 w_2 + \omega^2 M^2} = \frac{\omega L_1 w_2}{w_1 w_2 + \omega^2 \varkappa^2 L_1 L_2}.$$

Setzt man nun $w_1 = w_2 = 0$, so wird

$$\varphi_1 = 0.$$

Setzt man hingegen in Gl. 196b zuerst die Widerstände null, so erhält man $\varphi_1 = 90^0$ (Gl. 197). Das heißt also, wenn die Widerstände null sind, verhält sich die Phasenverschiebung wie ein Körper im labilen Gleichgewicht. Für $\omega L_2 = \frac{1}{\omega C}$ ist $\varphi_1 = 0$. Wenn aber der induktive Widerstand ωL_2 im geringsten überwiegt, wird $\varphi_1 = +90^0$; wenn der Kapazitätswiderstand im geringsten überwiegt, wird $\varphi_1 = -90^0$.

Sind die Widerstände nicht null, so ist das Resonanzmaximum von J_1, J_2, K_2 nicht unendlich groß und das Minimum von J_1 nicht null, sondern jenes ist um so kleiner, dieses um so größer, je größer die Widerstände sind. Die Lage des Resonanzmaximums (Gl. 201) wird durch die Widerstände wenig beeinflußt, weil bei dem allein bestehenden sekundären Kreis nach § 173 der Eintritt der Resonanz vom Widerstand ganz unabhängig ist.

II. Die Widerstände dürfen in jenem Falle nicht vernachlässigt werden, wo der induktive Widerstand und der Kapazitätswiderstand des sekundären Kreises sich gegenseitig aufheben, das heißt wo

$$\omega L_2 = \frac{1}{\omega C}$$

oder

$$\omega^2 C L_2 = 1$$

ist. In diesem Falle gehen bei gleichzeitiger Einführung von Gl. 198 die Gleichungen 196a, b, c über in

$$J_1^2 = K_1^2 \frac{w_2^2}{(w_1 w_2 + \omega^2 \varkappa^2 L_1 L_2)^2 + \omega^2 L_1^2 w_2^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1 w_2}{w_1 w_2 + \omega^2 \varkappa^2 L_1 L_2}$$

$$J_2^2 = J_1^2 \frac{\omega^2 \varkappa^2 L_1 L_2}{w_2^2}.$$

Aus diesen und der Gl. 196d ergibt sich dann

$$K_2^2 = K_1^2 \frac{\varkappa^2 L_1 L_2}{C^2 \left[(w_1 w_2 + \omega^2 \varkappa^2 L_1 L_2)^2 + \omega^2 L_1^2 w_2^2\right]}.$$

Wie man sieht, ist J_1 und φ_1 um so größer, je kleiner die Kupplung $\varkappa$ ist. Für K_2 hingegen, wo $\varkappa$ im Zähler und im Nenner vorkommt, findet man ein Maximum für

$$\varkappa^4 = \frac{w_1 w_2 + \omega^2 L_1^2 w_2^2}{\omega^4 L_1^2 L_2^2}.$$

III. Wir betrachten noch die Verhältnisse bei Leerlauf des Transformators, d. h. für

$$C = 0.$$

Dann geht Gl. 196a über in

$$J_{1o}^2 = \frac{K_1^2}{w_1^2 + \omega^2 L_1^2}.$$

Aus dieser und 196c, d und 198 folgt, wenn man schließlich $C = 0$ setzt, für die Leerlaufspannung K_{2o}

$$K_{2o}^2 = K_1^2 \frac{\omega^2 \varkappa^2 L_1 L_2}{w_1^2 + \omega^2 L_1^2}.$$

Da bei einem leerlaufenden Transformator w_1^2 verschwindend klein ist gegen $\omega^2 L_1^2$, so ist

$$K_{2o} = K_1 \varkappa \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}.$$

Vergleicht man damit die sekundäre Spannung bei Gleichheit des induktiven und Kapazitätswiderstandes (Gl. 203), so sieht man, daß diese um das $\frac{1}{\varkappa^2}$fache größer ist als bei Leerlauf, denn $\varkappa$ ist kleiner als 1.

Verfolgt man den Verlauf des primären Stromes, wenn die Periodenzahl von null an wächst, so beginnt er mit dem Werte $\frac{K_1}{w_1}$ (nach Gleichung 196a) und nimmt mit wachsender Periodenzahl ab wie bei jedem Transformator bis in die Nähe der Resonanzbedingung des sekundären Kreises, wo der Strom ein Resonanzmaximum erreicht (Abb. 253). Die Folge dieses anfänglichen Abnehmens und späteren Anstieges ist ein Minimum des Stromes dazwischen. Der sekundäre Strom beginnt mit null, weil bei der Periodenzahl null überhaupt keine Induktion stattfindet, und steigt fortgesetzt bis zu seinem Resonanzmaximum (Abb. 253), das an derselben Stelle liegt, wie das Resonanzmaximum des primären Stromes. Ähnlich ist der Verlauf der sekundären Klemmenspannung.

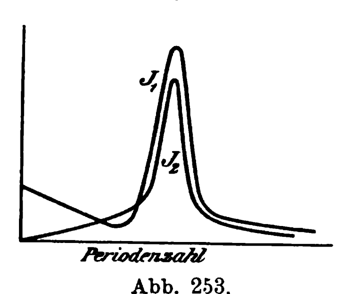


Abb. 253.

Zwölftes Kapitel.

Nichtstationäre Stromzustände.

183. Entstehen und Verschwinden eines Stromes ohne Kapazität.

Wirkt in einem vorläufig noch offenem Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion aber ohne Kapazität eine gleichgerichtete konstante EMK E, so erreicht die Stromstärke einige Zeit nach dem Schließen dieses Stromkreises den Wert

$$J = \frac{E}{w}$$

und behält diesen Wert, so lange als an dem Stromkreis keine Veränderung geschieht. Man sagt, der Strom hat einen stationären Zustand erreicht. Alle bisherigen Untersuchungen über die Gesetze eines Stromes haben sich nur auf den stationären Zustand bezogen.

Vor dem Schließen des Stromkreises war die Stromstärke null. Es entsteht nun die Frage, welchen Verlauf nimmt der Strom, bis zur Erreichung seines stationären Wertes J, und welchen Verlauf beim Öffnen des Stromkreises, bis er wieder auf null gesunken ist.

Die experimentelle Untersuchung hat gezeigt, daß beim Schließen und Öffnen eines Stromkreises ein kurz dauernder Strom induziert wird (Extrastrom), welcher beim Schließen dem von der EMK E ausgehenden Strom entgegengerichtet ist, also sein Entstehen zu hindern sucht, und beim Öffnen gleiche Richtung hat, also das Verschwinden zu hindern sucht. Dies entspricht auch dem Lenzschen Gesetze. Näheren Aufschluß gibt die mathematische Untersuchung.

Setzen wir voraus, daß die Selbstinduktion konstant ist, so gilt auch hier die Spannungsgleichung (Gl. 105, S. 206), wenn wir statt k die hier herrschende konstante EMK E einsetzen; also

$$E = iw + L\frac{di}{dt}.$$

Diese Gleichung gilt ganz allgemein, wie auch der Strom sich ändern möge; sie gilt also auch, wenn der Strom J beim Öffnen des Stromkreises wieder auf den Wert null sinkt. Das letzte Glied ist die induzierte EMK, welche den Extrastrom erzeugt, und die wir mit e_s bezeichnen wollen. Sie ist wie immer gleich der Änderung der Kraftlinienmenge Li, und besteht daher nur, wenn der Strom und dementsprechend sein magnetisches Feld sich ändert. Die Integration dieser Gleichung läßt sich ohne weiteres ausführen, wenn man sie in folgende Form bringt

$$\frac{di}{E - iw} = \frac{dt}{L}.$$

Die Integration gibt

$$-\frac{1}{w} \lg \text{nat} (E - iw) = \frac{t}{L} + C,$$

wobei C die Integrationskonstante bedeutet. Da sie willkürlich ist, setzen wir sie gleich $\frac{1}{w}$ lg nat D. Dann ist

$$\lg \text{nat} (E - iw) + \lg \text{nat}\, D = -\frac{wt}{L}$$

$$\lg \text{nat} [(E - iw) D] = -\frac{wt}{L}.$$

Daraus folgt

$$(E - iw) D = \varepsilon^{-\frac{w}{L}t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (204)$$

wobei ε die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Die Gleichung gilt für jeden Augenblick, gleichgültig ob der Strom zu- oder abnimmt.

Zur Bestimmung der Konstanten D muß unterschieden werden zwischen Entstehen und Verschwinden des Stromes.

I. Entstehen des Stromes.

Rechnen wir die Zeit t gerade von dem Moment an, wo der Stromkreis geschlossen wird, also der Strom noch nicht besteht, so ist für $t = 0$, $i = 0$. Für diesen Moment geht die letzte Gleichung über in

$$ED = 1,$$

also

$$D = \frac{1}{E}.$$

Dies eingesetzt gibt

$$i = \frac{E}{w}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{w}{L}t}\right) = \frac{E}{w} - \frac{E}{w}\varepsilon^{-\frac{w}{L}t} \quad . \quad . \quad (205)$$

oder
$$i = J\left(1 - \varepsilon^{-\frac{w}{L}t}\right) = J - J\varepsilon^{-\frac{w}{L}t} \quad . \quad . \quad (206)$$
wobei J die schließlich eintretende stationäre Stromstärke ist.

Abb. 254 zeigt den Verlauf des Stromes i in zwei Fällen vom Beginn des Stromschlusses an. Beide gelten für denselben Widerstand w; daher ist der endgültige Wert J derselbe. Die Kurve *II* gilt aber für eine größere Selbstinduktion und steigt daher langsamer an als die Kurve *I*.

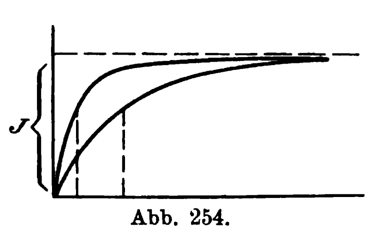


Abb. 254.

Der Ausdruck $E\varepsilon^{-\frac{w}{L}t}$ stellt die induzierte EMK e_s und der Ausdruck $J\varepsilon^{-\frac{w}{L}t}$ den entsprechenden Extrastrom i_s dar. Es ist also $i_s = \frac{e_s}{w}$ und $i = J - i_s$. Der Extrastrom und seine EMK werden erst für $t = \infty$ null. Sie kommen aber dem Nullwert schon nach ganz kurzer Zeit sehr nahe, und zwar um so rascher, je größer der Faktor $\frac{w}{L}$ ist. Man nennt daher diesen Faktor die Zeitkonstante. Der Extrastrom fällt also um so rascher ab, je größer der Widerstand und je kleiner die Selbstinduktion ist. Gäbe es einen Stromkreis, für den $L = 0$ wäre, so würde bei seiner Änderung keine EMK induziert werden, und der Strom sofort den Wert J haben.

Zur Zeit $t = \frac{L}{w}$ ist
$$i = J - \frac{1}{\varepsilon} J = J - 0{,}37\,J = 0{,}63\,J.$$

Zu dieser Zeit erreicht also der Strom etwa zwei Drittel seines endgültigen Wertes. Die gestrichelten Ordinaten in Abb. 254 stellen diesen Wert dar. Zur Zeit $t = 0$ hat die induzierte EMK und der Extrastrom den größten Wert, nämlich E bzw. J. Daher beginnt der Strom i beim Schließen des Stromkreises mit dem Werte null.

II. Verschwinden des Stromes.

Um den ungestörten Verlauf des Stromes bei seinem Verschwinden feststellen zu können, müssen wir annehmen, daß der Widerstand des Stromkreises unverändert bleibt, d. h. daß das Verschwinden nicht dadurch erfolgt, daß der Stromkreis durch einen Ausschalter unterbrochen wird, sondern daß seine EMK plötzlich

verschwindet. Rechnen wir die Zeit t von diesem Augenblick an, so ist für $t = 0$, $E = 0$ und die Gl. 204 geht über in

$$-iwD = \varepsilon^{-\frac{w}{L}t}.$$

In demselben Augenblick ($t = 0$) hat der Strom noch seinen vollen, stationären Wert, nämlich $i = J$. Dies eingesetzt gibt $D = -\frac{1}{wJ}$, mithin

$$i = J\varepsilon^{-\frac{w}{L}t} = \frac{E}{w}\varepsilon^{-\frac{w}{L}t} = i_s \quad . \quad . \quad . \quad (207)$$

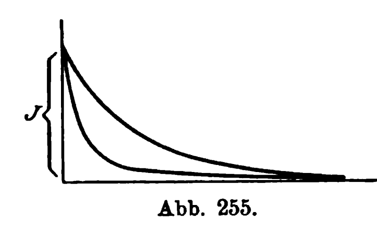


Abb. 255.

Das ist derselbe Extrastrom wie beim Schließen des Stromkreises, Abb. 255 zeigt seinen Verlauf in zwei Fällen mit gleichem Widerstand, aber verschiedener Selbstinduktion.

Die entsprechende EMK ist, wie man sieht

$$e_s = E\varepsilon^{-\frac{w}{L}t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (208)$$

Beide sind gleich den entsprechenden Ausdrücken beim Schließen des Stromkreises und die Zeitkonstante ist hier ein Maß für die Raschheit des Verschwindens des Extrastromes, und weil dieser nach dem Aufhören der EMK mit dem im Stromkreis überhaupt noch vorhandenen Strom identisch ist, ein Maß für das Verschwinden des Stromes überhaupt.

Zur Zeit $t = \frac{L}{w}$ ist $i = 0{,}37\,J$. Zu dieser Zeit ist also der Strom auf etwa ein Drittel seines ursprünglichen Wertes gesunken.

184. Vergleich der Selbstinduktion mit der Trägheit.

Aus dem vorhergehenden und dem Lenzschen Gesetze (§ 125) wissen wir, daß die Selbstinduktion jeder Veränderung des Stromes widerstrebt, indem sie beim Zunehmen des Stromes einen anderen von entgegengesetzter Richtung induziert und beim Abnehmen einen von derselben Richtung. Sie sucht also ebenso wie die Trägheit oder das Beharrungsvermögen schwerer Körper den bestehenden Zustand aufrecht zu erhalten. Besonders auffallend ist dieser Vergleich beim Öffnen und Schließen eines Stromes. Beim Öffnen wird ein gleichgerichteter Strom (Öffnungsextrastrom) induziert, der für einen Augenblick so stark ist, daß er in Form eines Funkens

die Luftstrecke durchschlägt; er sucht den Strom aufrecht zu erhalten, ebenso wie die Trägheit den bestehenden Bewegungszustand eines Körpers aufrecht zu halten versucht. Beim Schließen eines Stromes wird ein Extrastrom von entgegengesetzter Richtung induziert, der sein plötzliches Anwachsen verhindert, ebenso wie ein schwerer Körper nur allmählich auf eine gewisse Geschwindigkeit gebracht werden kann.

Um ein Schwungrad in Drehung zu versetzen, ist eine gewisse Kraft und Zeit notwendig. Die Arbeit, die dabei zur Überwindung der Trägheit aufgewendet werden muß, entspricht beim Schließen eines Stromes jener Arbeit, die zur Herstellung des magnetischen Feldes aufgewendet werden muß. Ist die richtige Geschwindigkeit erreicht, so bedarf es zu ihrer Aufrechterhaltung nur soviel Arbeit, als zur Überwindung des Reibungswiderstandes, beim Strome nur soviel, als zur Überwindung des Leitungswiderstandes notwendig ist. Hört die Bewegung des Rades auf, so gibt es dabei infolge seiner Trägheit soviel Arbeit ab, als beim Inbewegungsetzen aufgewendet wurde. Ebenso sucht das verschwindende magnetische Feld beim Öffnen des Stromes diesen aufrecht zu erhalten, und gibt dabei soviel Arbeit an den Stromkreis zurück, als beim Entstehen aufgewendet wurde.

Die Erzeugung eines periodischen Stromes entspricht dem Versuche, dem Rade eine pendelnde Bewegung zu geben. Dazu ist eine periodisch wechselnde Kraft notwendig. Dieser wirkt entgegen die Kraft des Pendels infolge seiner Trägheit; diese ist am kleinsten bei der größten Ausweichung aus der Ruhelage und am größten, während es durch die Ruhelage geht; dieselbe Beziehung besteht zwischen der induzierten EMK und dem Strome. Ferner sieht man ein, daß die Geschwindigkeit des pendelnden Rades niemals so groß wird, als wenn der größte Wert der Kraft immer in derselben Richtung wirken würde. Die Trägheit scheint ebenso wie die Selbstinduktion den Widerstand zu vergrößern.

185. Entstehen und Verschwinden eines Stromes bei gegenseitiger Induktion.[1]

Treffen die Kraftlinien eines entstehenden oder verschwindenden Stromes auf einen zweiten geschlossenen Stromkreis, so daß in diesem ein sekundärer Strom induziert wird, so erscheint ersterer als primärer Strom, und wir können, um einen Überblick in qualitativer Hinsicht zu gewinnen, darauf die Ergebnisse des § 146 anwenden. Demnach erscheint an Stelle des wahren Ohmschen Widerstandes w_1

[1] Benischke, „Elektrotechnik und Maschinenbau." Wien 1906. S. 923.

der größere äquivalente Widerstand ϱ und an Stelle der wahren Selbstinduktion L_1 die kleinere äquivalente Selbstinduktion λ. Da ersterer im Zähler, letztere im Nenner des negativen Potenzexponenten (der Zeitkonstante) von ε steht, so folgt daraus ein rascherer Verlauf des Extrastromes und der entsprechenden induzierten EMK, als wenn der sekundäre Stromkreis nicht vorhanden ist. Die stationäre Stromstärke $J = \frac{E}{w}$ bleibt unverändert, da sie sich auf jene Zeit bezieht, wo noch keine Änderung eingetreten ist.

Eine strenge Ableitung des Extrastromes bei Anwesenheit eines geschlossenen sekundären Stromkreises ergibt folgende Formeln, wobei sich die Größen mit dem Index $_1$ auf den in Betrachtung stehenden Stromkreis, die mit dem Index $_2$ auf den sekundären Stromkreis beziehen und M den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion bedeutet.

$$i_s = \frac{J}{2}\left[\left(1 + \frac{w_1 L_2 - w_2 L_1}{\beta}\right)\varepsilon^{\gamma t} + \left(1 - \frac{w_1 L_2 - w_2 L_1}{\beta}\right)\varepsilon^{\gamma' t}\right] \quad (209)$$

Hierin bedeuten

$$\beta = \sqrt{(w_1 L_2 - w_2 L_1)^2 + 4 w_1 w_2 M^2}$$

$$\gamma = -\frac{w_1 L_2 + w_2 L_1) + \beta}{2(L_1 L_2 - M^2)}$$

$$\gamma' = -\frac{(w_1 L_2 + w_2 L_1) - \beta}{2(L_1 L_2 - M^2)}.$$

Führt man die magnetische Streuung oder, was noch übersichtlicher ist, die magnetische Kupplung $\varkappa$ ein, die nach § 153 definiert ist durch

$$M^2 = \varkappa^2 L_1 L_2,$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \sqrt{(w_1 L_2 - w_2 L_1)^2 + 4 w_1 w_2 L_1 L_2 \varkappa} \\ \gamma &= -\frac{(w_1 L_2 + w_2 L_1) + \beta}{2 L_1 L_2 (1 - \varkappa^2)} \\ \gamma' &= -\frac{(w_1 L_2 + w_2 L_1) - \beta}{2 L_1 L_2 (1 - \varkappa^2)} \end{aligned}\right\} . \quad (210)$$

Der Einfluß, den die Stärke der magnetischen Kupplung und der sekundäre Widerstand auf i_s ausüben, läßt sich daraus nicht ohne weiteres übersehen. Wir diskutieren daher diese Formeln zunächst hinsichtlich der Kupplung und dann hinsichtlich des sekundären Widerstandes.

Ist $\varkappa = 0$, d. h. sind die beiden Stromkreise voneinander unabhängig, so ist

$$\beta = w_1 L_2 - w_2 L_1 \qquad \gamma = -\frac{w_1}{L_1}$$

und die Gleichung für i_s geht über in Gl. 205 für einen einzelnen Stromkreis.

Ist $\varkappa = 1$, d. h. besteht keine magnetische Streuung, sondern ist die magnetische Kupplung eine vollständige, so ist

$$\beta = w_1 L_2 + w_2 L_1$$

$$\gamma = -\infty$$

$$i_s = \frac{J}{2}\left(1 - \frac{w_1 L_2 - w_2 L_1}{w_1 L_2 + w_2 L_1}\right)\varepsilon^{\gamma' t} \quad . \quad . \quad . \quad (211)$$

Der stärkste Einfluß des sekundären Stromes ist dann vorhanden, wenn $w_2 = 0$. Dann ist $i_s = 0$. Der Strom erreicht also beim Schließen des Stromkreises sofort seinen endgültigen Wert J und wird beim Verschwinden der EMK sofort null. Für alle zwischen diesen äußersten Fällen liegenden Werte der Kupplung $(1 > \varkappa > 0)$ erkennt man aus den Ausdrücken für γ und γ', daß im Vergleich zu Gl. 205 eine verkleinerte Selbstinduktion steht, wie dies schon eingangs dieses Paragraphen aus den Ergebnissen des § 146 gefolgert wurde.

Diskutieren wir hinsichtlich des sekundären Widerstandes, so ist für den Fall, daß $w_2 = 0$ ist:

$$\beta = w_1 L_2$$

$$\gamma = -\frac{w_1}{L_1(1-\varkappa^2)} \qquad \gamma' = 0$$

$$i_s = J\varepsilon^{-\frac{w_1}{L_1(1-\varkappa^2)}t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (212)$$

Man erkennt daraus, daß dieser um so kleiner ist, je größer die magnetische Kupplung $\varkappa$, d. h. je kleiner die Streuung ist. Für $\varkappa = 1$ ist wie oben $i_s = 0$.

Der sekundäre Strom i_2, der während des Verlaufes des Extrastromes im sekundären Stromkreis induziert wird, ist

$$i_2 = -w_1 J \varkappa \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\beta}\left(\varepsilon^{\gamma t} - \varepsilon^{\gamma' t}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (213)$$

Dieser Ausdruck wird für $t = 0$ und $t = \infty$ null. Dazwischen muß er also ein Maximum haben. Man findet seine Lage, wenn man den Differentialquotienten nach der Zeit gleich null setzt.

Für $w_2 = 0$ geht die letzte Gleichung über in

$$i_2 = -J\varkappa\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\left(\varepsilon^{-\frac{w_1}{L_1(1-\varkappa^2)}t} - 1\right) \quad . \quad . \quad (214)$$

186. Funken und Lichtbogen beim Unterbrechen eines Stromkreises. Überspannung.

Zur Aufstellung des Gesetzes, nach welchem der Extrastrom beim Verschwinden eines Stromkreises verläuft, haben wir angenommen, daß die EMK des Stromes plötzlich verschwindet, während sein Widerstand unverändert bleibt. In Wirklichkeit geht aber das Unterbrechen eines Stromes so vor sich, daß der Stromkreis mittels eines Ausschalters geöffnet wird, d. h. in den Stromkreis wird zwischen den sich voneinander entfernenden Kontakten eine Luftstrecke eingeschaltet, deren Länge rasch zunimmt, und deren Widerstand dementsprechend sehr rasch von null bis unendlich wächst, während die EMK bestehen bleibt.

Da nach § 183 beim Verschwinden des Stromes eine EMK e_s induziert wird, welche gleiche Richtung wie der verschwindende Strom und die EMK E der Stromquelle hat, so wirkt zwischen den außer Berührung kommenden Kontakten eine Spannung gleich $E + e_s$, welche den Luftzwischenraum, solange er noch kurz ist, in Form eines Funkens zu überbrücken vermag. Der Funken verlöscht, wenn die Entfernung zwischen den Kontakten so groß geworden ist, daß ihr Widerstand von dieser Spannung nicht überwunden werden kann; damit ist auch der Strom null geworden und seine Unterbrechung tatsächlich vollzogen.

Die Unterbrechung eines Stromes J geht also so vor sich, daß zu dem Widerstande w des Stromkreises noch ein zweiter, durch den Funken repräsentierter Widerstand w' hinzutritt. Mithin ist der Öffnungsextrastrom zu einer gewissen Zeit t nach dem Öffnen des Schalters

$$i_s = J\varepsilon^{-\frac{w+w'}{L}t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (215)$$

So lange der Funken besteht, ist der Stromkreis noch geschlossen. Sein gesamter Widerstand ist jetzt $w + w'$, und daher erzeugt die EMK E der Stromquelle einen Strom $\frac{E}{w + w'}$, der zum Extrastrom hinzukommt, so daß der gesamte Strom im Unterbrechungsfunken ist:

$$i = \frac{E}{w + w'} + \frac{E}{w}\varepsilon^{-\frac{w+w'}{L}t}.$$

Die während des Unterbrechens induzierte EMK ist (nach § 132)

$$e_s = - L\frac{di}{dt} = E\frac{w + w'}{w}\varepsilon^{-\frac{w + w'}{L}t} \quad . \quad . \quad . \quad (216)$$

Man erkennt daraus, daß durch das plötzliche Einschalten eines Widerstandes w' eine EMK induziert wird, deren größter Wert $\left(E\frac{w+w'}{w}\right)$ um das $\left(\frac{w+w'}{w}\right)$-fache größer ist als die EMK E der Stromquelle; man nennt sie daher Überspannung. Physikalisch erklärt sich die Abhängigkeit der induzierten EMK von dem eingeschalteten Widerstand w' dadurch, daß der Strom und daher auch sein magnetisches Feld um so rascher abnimmt, je größer w' ist. Nach § 124 ist aber die induzierte EMK um so größer, je rascher die Änderung des Feldes ist. Allerdings verschwindet sie und der entsprechende Extrastrom jetzt auch rascher, weil jetzt $w + w'$ statt w im negativen Potenzexponenten von ε steht. Da außerdem die EMK E so lange nicht abgeschaltet ist, als nicht der Öffnungsfunken verlöscht ist, so kommt diese noch hinzu, und es kann infolgedessen beim Ausschalten eine beträchtlich höhere Spannung gleich $E + E\frac{w+w'}{w}\varepsilon^{-\frac{w+w'}{L}t}$ auftreten, welche die Isolation des Stromkreises zu zerstören vermag. Dadurch erklären sich z. B. Durchschläge der Isolation beim plötzlichen Unterbrechen des Erregerstromes in der Magnetwickelung größerer Maschinen. Wäre der plötzlich eingeschaltete Widerstand w' unendlich groß, so wäre auch die induzierte EMK unendlich groß. Praktisch ist dieser Fall nicht möglich, weil der Widerstand zwischen den sich öffnenden Schalterkontakten von null an zu wachsen beginnt und erst in dem Augenblick unendlich wird, in dem der Extrastrom null wird.

Beim Vorhandensein eines sekundären Stromkreises ist die im primären Stromkreis induzierte EMK nach § 145

$$e_s = -\left(L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}\right).$$

Wir wollen die Ausrechnung nur für den Fall $w_2 = 0$, also mit den Gl. 212 und 214 ausführen, da sie im allgemeinen Fall unübersichtlich wird. Setzt man für M den Wert $\varkappa\sqrt{L_1 L_2}$ ein und $w_1 + w'$ statt w_1, so erhält man schließlich

$$e_s = E\frac{w_1 + w'}{w_1}\varepsilon^{-\frac{w_1 + w'}{L(1-\varkappa^2)}t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (217)$$

Der größte Wert $E\frac{w_1 + w'}{w_1}$ dieser EMK ist also ebensogroß,

wie wenn kein sekundärer Strom vorhanden ist; sie fällt aber umso schneller ab, je größer die magnetische Kupplung ist. Für $\varkappa = 1$, d. h. für vollständige magnetische Kupplung ist $e_s = 0$, welchen Wert auch w' haben mag.

Entsteht zwischen den Schalterkontakten nebst dem Öffnungsfunken des Extrastromes auch noch ein Lichtbogen durch die EMK E der Stromquelle, so müssen, um den Strom zu unterbrechen, die Kontakte so weit voneinander entfernt werden, bis der Abstand nicht mehr von einem Lichtbogen überbrückt werden kann. Dieser Abstand ist um so größer, je größer die EMK ist und je mehr das Material der Elektroden die Lichtbogenbildung begünstigt. Am günstigsten ist Kohle, am ungünstigsten schwer schmelzbares Metall; wobei aber auch die Masse der Kontakte eine wichtige Rolle spielt. Je größer die Masse ist, desto schwerer erreichen die Fußpunkte des Lichtbogens die für den Lichtbogen nötige Verdampfungstemperatur und desto mehr Spannung und Stromstärke ist zu seiner Bildung erforderlich, und bei desto kürzerem Abstand reißt ein schon entstandener Lichtbogen ab. (Über Lichtbogenbildung vgl. (§ 237 u. f.)

Je länger der Lichtbogen wird, desto langsamer nimmt der Widerstand zwischen den Kontakten zu, desto geringer ist nach dem obigen die Spannungserhöhung durch den Extrastrom. Man benützt dies in solchen Fällen, wo die Spannungserhöhung so groß werden kann, daß sie der Isolation des Stromkreises gefährlich wird, also z. B. beim Unterbrechen des Erregerstromes in der Magnetwickelung elektrischer Maschinen, bei selbsttätigen Ausschaltern u. dgl., indem man die Kontakte aus Kohle herstellt. Ein anderes Mittel zur Verhütung dieser Gefahr besteht darin, daß man parallel zu den Kontakten, zwischen denen die Stromunterbrechung stattfindet, einen induktionsfreien Widerstand w_p (Abb. 256) legt. In diesem Falle wird also der Strom nicht ganz unterbrochen, der Widerstand kann nicht bis Unendlich, sondern nur bis zum Werte w_p ansteigen.

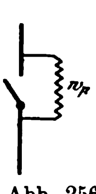


Abb. 256.

Bei der Unterbrechung eines Wechselstromes kommt es ganz darauf an, wie lange es vom Öffnen der Kontakte an dauert, bis der Strom null geworden ist. Spielt sich dieser Vorgang innerhalb einer Zeit t_0 bis t_1 (Abb. 257) ab, die nur einen Teil einer Halbperiode ausmacht, so ist er derselbe wie beim Unterbrechen eines Gleichstromes. Dieser Fall ist aber selten, denn in der Regel wird durch Ausbildung eines Funkens oder eines Lichtbogens der Unterbrechungsvorgang über eine oder mehrere Halb-

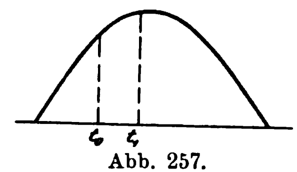


Abb. 257.

perioden ausgedehnt. Dann hört der Strom immer bei einem Durchgang durch null auf.

So einfach die Unterbrechung eines Stromes von niederer Spannung ist, so schwierig ist sie bei hohen Spannungen, wo sich Lichtbögen bis zu 1 m, sogar 2 m Länge bilden können. Dann empfiehlt es sich nicht mehr, die Kontakte in Luft voneinander zu entfernen, sondern unter Öl. Das Öl verhindert erstens durch den Abschluß der Luft, daß das Material der Kontakte so stark verbrennt und verdampft wie in Luft, zweitens, wirkt es abkühlend auf den entstehenden Lichtbogen und erschwert dadurch seine Ausbildung (§ 233), drittens wirkt der stärkere Druck, der unter der Flüssigkeit herrscht, einschnürend auf den Lichtbogen. Besonders rasch wird die Verlöschung des Lichtbogens bewirkt, wenn das Öl zwischen den Kontakten in Bewegung versetzt wird,[1]) weil auf diese Weise der Lichtbogen in ähnlicher Weise zerrissen wird wie in Luft durch Wind oder durch magnetisches Gebläse.[2])

187. Die Wärmearbeit des Extrastromes.

Der beim Unterbrechen eines Stromkreises auftretende Funken bewirkt eine Verbrennung der Kontakte, die namentlich bei den Kommutatoren der Maschinen möglichst vermieden werden soll. Es ist daher von großer Wichtigkeit die Wärme des Funkens zu kennen.

Die Wärmearbeit des Extrastromes während der Zeit dt ist gleich $i_s^2 w' dt$.

Rechnen wir die Zeit t von dem Moment an, wo das Verschwinden des Stromes beginnt, so finden wir die ganze Arbeit A während des Verschwindens des Stromes, wenn wir von 0 bis ∞ integrieren, da nach unendlich langer Zeit der Strom jedenfalls null geworden ist, selbst wenn sein Verschwinden noch so langsam vor sich geht. Es ist also nach Gl. 215

$$A = \int_0^\infty i_s^2 w' dt = \int_0^\infty w' J^2 \varepsilon^{-\frac{2(w+w')}{L}t} dt$$

$$A = J^2 \frac{w' L}{2(w+w')}.$$

Hingegen ist die gesamte vom Extrastrom im Stromkreis und im Funken entwickelte Wärmearbeit

---

[1]) Benischke, „Hochspannungs-Ölschalter", ETZ 1903, S. 613. D.R.-P. 141 961 und 150 912.

[2]) Über den Funken bei oszillatorischer Entladung vgl. § 193. Über den Mechanismus der selbständigen Funkenentladung vgl. § 230—232.

$$A_g = \int_0^\infty i_s^2 (w + w')\,dt = \int (w + w') J^2 \varepsilon^{-\frac{2(w+w')}{L}t}\,dt$$

$$A_g = J^2 \frac{L}{2}.$$

Dieser Ausdruck ist (nach § 119) gleich der magnetischen Arbeit des Stromes J, also jener Arbeit, welche beim Entstehen des Stromes von der Stromquelle aufgewendet werden mußte, um das magnetische Feld des Stromes herzustellen. Da beim Verschwinden des Stromes auch sein magnetisches Feld verschwindet, so setzt sich diese Arbeit in Wärme um. Deshalb kommt im letzten Ausdruck der Widerstand nicht vor. Ist w verschwindend klein gegen w', so ist $A = A_g$, d. h. die gesamte Wärme des Extrastromes konzentriert sich im Funken.

Bei Gegenwart eines sekundären Stromes ergibt sich die Funkenwärme in gleicher Weise aus Gl. 209. Wir berechnen sie hier nur für den Fall $w_2 = 0$, also aus Gl. 212 und erhalten bei gleichzeitigem Ersatz von w_1 durch $w_1 + w'$

$$A = \int_0^\infty w' J^2 \varepsilon^{-\frac{2(w_1+w')}{L(1-\varkappa^2)}t}\,dt = J^2 \frac{w' L (1 - \varkappa^2)}{2(w_1 + w')}.$$

Man sieht, die Funkenwärme wird gegenüber dem obigen Wert umso kleiner, je stärker die magnetische Kupplung ist. Für vollständige Kupplung ($\varkappa = 1$) wird die Funkenwärme null. Natürlich muß auch jetzt die gesamte magnetische Arbeit des Stromes J in Stromwärme umgesetzt werden. Aber nur der durch die letzte Formel angegebene Teil wird durch den Funken in Wärme umgesetzt, während der übrige Teil durch den Strom i_2 im sekundären Stromkreis in Wärme umgesetzt wird.

Geht über den Funken außer dem Extrastrom auch noch ein Strom von der Stromquelle, so kommt zu den vorstehend berechneten Wärmearbeiten noch ein entsprechender Betrag hinzu. Aber auch dieser ist umso kleiner, je größer der Einfluß des sekundären Stromes ist, weil der Funken umso rascher verschwindet, und daher auch der Stromübergang umso kürzer dauert.

Von der magnetischen Arbeit sehen wir, daß sie gleich derjenigen ist, welche von einem Wechselstrom geleistet wird, während er von null bis zum größten Wert (Scheitelwert $\mathfrak{J}$) ansteigt, da J hier ebenfalls den größten Wert der Stromstärke bedeutet. Es kommt eben immer bloß auf den Anfangs- und Endwert des Stromes an; wie er dazwischen verläuft, ist gleichgültig.

Dieser Einfluß des sekundären Stromes auf die Verminderung

der Funkenwärme zeigt sich deutlich bei Kommutatormotoren und bei Kommutatorzählern mit kurzgeschlossenen Stromkreisen. Entfernt oder öffnet man letztere, so werden die Kommutatoren durch die Funkenbildung viel stärker angegriffen.[1])

Bildet die EMK der Stromquelle einen Lichtbogen zwischen den Kontakten, so gelten die vorstehenden Ableitungen natürlich nicht mehr, weil dann eben kein Funken, sondern ein Lichtbogen besteht.

Faßt man die Ergebnisse zusammen, so ergibt sich, daß beim Unterbrechen eines Stromkreises, der mit einem anderen geschlossenen Stromkreis magnetisch gekuppelt ist, der Extrastrom und die von ihm erzeugte Überspannung umso schneller abfällt, und die Funkenwärme umso kleiner ist, je größer der sekundäre Strom und je stärker die magnetische Kupplung ist.

Wie wir in § 164 gesehen haben, wirken die Verluste durch Wirbelströme und Hysterese in Stromkreisen mit Eisenkern (Drosselspulen) ebenso, als wenn ein sekundärer Stromkreis mit entsprechendem Widerstand vorhanden wäre. Es gilt daher auch für das Öffnen eines einzelnen Stromkreises mit Eisenkern, daß der Strom schneller null wird und die Wärme des Unterbrechungsfunkens kleiner ist, als in einer Spule ohne Eisenkern, aber gleicher Selbstinduktion. Das gilt aber nicht von massiven Eisenkernen, weil bei solchen eine elektrodynamische Schirmwirkung auftritt.

188. Entstehen und Verschwinden eines Stromes in Spulen mit massivem Eisenkern.

In § 185 haben wir gesehen, daß durch die Wirkung eines sekundären Stromes ein rascheres Entstehen und Verschwinden des Stromes bewirkt wird. Da nach § 164 Wirbelströme und Hysterese eines Eisenkernes ebenso wirken wie ein sekundärer Strom, so müßte man erwarten, daß in einer Spule mit massivem Eisenkern, in dem die Wirbelströme besonders stark auftreten, das Entstehen und Verschwinden des Stromes besonders rasch erfolgt. Es zeigt sich aber das Gegenteil. Wird der Erregerstromkreis einer großen elektrischen Maschine mit massiven Polen geschlossen, so steigt der Strom ganz langsam an, so daß es unter Umständen bis zu einer Minute lang dauert, bis der Strom seinen endgültigen Wert $\frac{E}{w}$ erreicht hat. Desgleichen zeigt sich beim Ausschalten des Erregerstromes, daß die Spannung der Maschine (bei konstanter Umlaufs-

---

[1]) Benischke, ETZ 1904, S. 1041; 1905 S. 542.

zahl) noch längere Zeit nach dem gänzlichen Verschwinden des Erregerstromes besteht und nur allmählich bis zu dem vom Dauermagnetismus herrührenden Spannungswerte abfällt. Aus diesem Umstande muß man schließen, daß man es überhaupt nicht mit einer auf den Verlauf des Extrastromes beruhenden Erscheinung, sondern mit einer magnetischen Erscheinung zu tun hat, und zwar mit der elektrodynamischen Schirmwirkung der Wirbelströme. Bei einem von Wechselstrom umflossenen Eisenkern bleibt der innerste Teil infolge der Schirmwirkung der Wirbelströme nahezu unmagnetisch (§ 165). In unserem Falle, wo beim Schließen des Stromkreises die Stromstärke von null an wächst, werden Wirbelströme induziert, welche entgegengesetzte Richtung haben und daher auf das Innere des Eisenkörpers eine Schirmwirkung ausüben, so daß anfangs nur die äußeren Schichten magnetisiert werden. In dem Maße wie die Änderung des Stromes abnimmt, werden die Wirbelströme schwächer und die Magnetisierung dringt tiefer ein. Hat der Strom seinen endgültigen, konstanten Wert erreicht, so gibt es keine Wirbelströme mehr und der ganze Eisenkörper ist gleichmäßig magnetisiert.

Umgekehrt ist der Vorgang beim Unterbrechen des Erregerstromes. Die Wirbelströme haben nach dem Lenzschen Gesetze einen solchen Verlauf, daß sie das Verschwinden des magnetischen Feldes zu hindern suchen. Sie verstärken also den Magnetismus im Innern des Eisenkörpers, während in der äußersten Schicht das Feld gleich nach dem Verschwinden des Erregerstromes verschwindet. Die Abnahme des Magnetismus verursacht aber wieder Wirbelströme, welche in den von ihnen umschlossenen Teilen den Magnetismus aufrecht erhalten. Der Magnetismus kann also nur allmählich abnehmen, und zwar von außen nach innen.

Besteht das magnetische Eisengestell einer Maschine aus unterteiltem Eisen (Blech), so können sich Wirbelströme nur innerhalb jedes Blechquerschnittes ausbilden und daher nimmt der Magnetismus nahezu gleichzeitig mit dem Erregerstrom zu und ab.

189. Öffnen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion. Elektrische Schwingung.

Ist ein Kondensator mit einer seiner Potentialdifferenz $\mathfrak{E}_0$ und seiner Kapazität C entsprechenden Elektrizitätsmenge $\mathfrak{Q}_0$ auf irgend eine Weise geladen worden, und bringt man ihn durch die Funkenstrecke F (Abb. 258) über einen Stromkreis mit dem Widerstande w und der Selbstinduktion L zur Entladung, etwa dadurch, daß man die Elektroden der Funkenstrecke

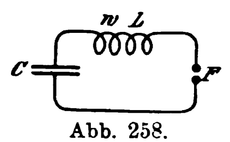


Abb. 258.

einander nähert, so sieht man einen Funken, der sich bei der Betrachtung mittels eines rotierenden Spiegels als aus mehreren Stromübergängen oder Teilfunken bestehend erweist, die aber so rasch aufeinander folgen, daß sie bei direkter Betrachtung als ein einziger Funken erscheinen.

Abb. 259 zeigt eine photographische Aufnahme auf einer rasch bewegten photographischen Platte. Der Funken sprang zwischen zwei feststehenden Elektroden über. Da jene Elektrode, bei welcher der Strom eintritt (negative Elektrode), stärker leuchtet (§ 216) als



Abb. 259. Oszillatorische Entladung auf einer bewegten photographischen Platte aufgenommen.

jene, bei welcher der Strom austritt (positive Elektrode), so erkennt man aus diesem Bilde, daß ein Wechsel der Polarität stattfindet, da bei jedem Übergang (Teilfunken) abwechselnd die eine oder die andere Elektrode stärker leuchtet. Man hat es also mit einer hin- und hergehenden Bewegung der Elektrizität zu tun, die man als oszillatorische Entladung oder elektrische Schwingung bezeichnet, da die Ladung zwischen den beiden Kondensatorplatten durch die Verbindungsleitung und Funkenstrecke hin- und herschwingt (vgl. auch Abb. 265).

Das erklärt sich daraus, daß durch die erste Entladung ein Strom (Extrastrom) induziert wird, so wie beim Beginn jedes Stromes (§ 183). Durch diesen findet nun eine neuerliche Ladung statt, und zwar, wie man leicht einsieht, im entgegengesetzten Sinne wie vorher. Diese Ladung entladet sich wieder, und so setzt sich das Spiel fort und würde nie aufhören, wenn nicht die Entladungsdrähte einen gewissen Widerstand besäßen. Dieser verursacht einen Umsatz der elektrischen Arbeit in Wärme, so daß in der Regel nur einige derartige wechselnde Entladungen zustande kommen. Ist der Widerstand sehr groß, so wird schon bei der ersten Entladung die ganze elektrische Arbeit in Wärme umgesetzt, und es kommt zu keiner oszillatorischen Entladung. Der Vorgang ist genau so, wie bei einem Pendel oder einer Flüssigkeit in einer U-förmigen Röhre (Abb. 260) oder einer elastischen Feder. Die Trägheit (von der wir schon in § 184 gesehen haben, daß sie dieselbe Rolle spielt wie die Selbstinduktion) verursacht ein Hinausschwingen über die Ruhelage. Ist aber der Bewegungswiderstand sehr groß, so geht das Pendel oder die Flüssigkeit langsam in die Ruhelage zurück, ohne eine Schwingung auszuführen (aperiodische Dämpfung). Die folgende mathematische Betrachtung gibt nähere Aufschlüsse.



Abb. 260.

Sobald die Entladung des Kondensators über die Funkenstrecke F (Abb. 258) beginnt, fließt im Entladungsstromkreis ein Strom i. Die Summe aus dem Ohmschen Spannungsabfall wi und und dem induktiven Spannungsabfall $L\frac{di}{dt}$ muß in jedem Augenblick gleich der an den Klemmen des Kondensators herrschenden Spannung e (Kondensatorspannung)[1] sein, also

$$e = wi + L\frac{di}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (218)$$

nun ist nach § 27

$$q = eC,$$

wenn q die in jedem Augenblick vorhandene, der Spannung e entsprechende Ladung bedeutet.

Ferner ist nach Gl. 177

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{de}{dt}$$

und daher

$$\frac{di}{dt} = -C\frac{d^2e}{dt}.$$

[1]) In § 170 und folgende haben wir die Kondensatorspannung mit e_c bezeichnet. Der Einfachheit halber lassen wir jetzt den Index c weg.

Mithin geht die obige Spannungsgleichheit über in

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{w}{L}\frac{de}{dt} + \frac{e}{LC} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (219)$$

Diese Differentialgleichung hat dieselbe Form, wie die für ein gedämpftes Pendel bei kleinen Ausschlägen. Ein Integral derselben ist

$$e = B\varepsilon^{\alpha t},$$

wobei ε die Basis der natürlichen Logarithmen und t die Zeit vom Beginn der Entladung an bedeutet, und B und α zwei Größen sind, deren Bedeutung sich im folgenden ergibt.

Bildet man $\frac{de}{dt}$ und $\frac{d^2 e}{dt}$ und setzt alle 3 Werte in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$B\varepsilon^{\alpha t}\left(\alpha^2 + \frac{w}{L}\alpha + \frac{1}{LC}\right) = 0.$$

Da B nicht null sein kann, da sonst auch e null wäre, so muß der Klammerausdruck null sein. Dieser ist eine quadratische Gleichung, so daß sich für α folgende zwei Werte ergeben

$$\alpha_1 = -\frac{w}{2L} + \sqrt{\frac{w^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{w}{2L} - \sqrt{\frac{w^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Die allgemeinste Lösung für e muß beiden Werten Rechnung tragen; sie lautet daher

$$e = B\varepsilon^{\alpha_1 t} + D\varepsilon^{\alpha_2 t} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (220)$$

Sind die Wurzelausdrücke reell, so sind α_1 und α_2 negativ, und die Spannung e wird daher mit wachsender Zeit immer kleiner, bis sie für $t = \infty$ schließlich null ist. e nimmt um so rascher ab, je größer α, d. h. je größer w und je kleiner L ist. Das Verhältnis $\frac{w}{L}$ haben wir in § 183 Zeitkonstante genannt. Diese kommt also auch hier in Betracht. Während der ganzen Zeit bleibt e positiv. Die Entladung erfolgt also stetig abnehmend, ohne periodische Schwankungen, d. h. aperiodisch, und zwar in Form einer Exponentialkurve wie in Abb. 255. Dieser Fall (Wurzelausdrücke reell), ist dann vorhanden, wenn

$$\frac{w^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}.$$

oder

$$w^2 \geqq \frac{4L}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (221)$$

ist, d. h. wenn der Ohmsche Widerstand einen gewissen von der Selbstinduktion und der Kapazität abhängigen Wert übersteigt.

Ist hingegen

$$w^2 < \frac{4L}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (222)$$

so sind die Wurzelausdrücke imaginär und man kann schreiben

$$\alpha_1 = -\frac{w}{2L} + \iota\omega$$

$$\alpha_2 = -\frac{w}{2L} - \iota\omega$$

wobei

$$\iota = \sqrt{-1}$$

und

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{w^2}{4L^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (223)$$

Dann geht Gl. 220 über in

$$e = \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}\left[B\varepsilon^{\iota\omega t} + D\varepsilon^{-\iota\omega t}\right]$$

$$e = \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}\left[(B + D)\cos\omega t + (B\iota - D\iota)\sin\omega t\right]$$ [1])

Setzt man

$$B + D = M \qquad \text{und} \qquad B\iota - D\iota = N,$$

so ist

$$e = \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}(M\cos\omega t + N\sin\omega t).$$

Die Werte der Größen M und N ergeben sich auf folgende Weise. Zur Zeit $t = 0$ ist die Ladung und daher auch die Spannung des Kondensators noch unverändert, also $e = \mathfrak{E}_0$, wenn $\mathfrak{E}_0$ diese, vor Beginn der Entladung herrschende Spannung bedeutet. Dann ergibt sich

$$\mathfrak{E}_0 = M.$$

[1]) Weil nach einem mathematischen Lehrsatz

$$\varepsilon^{-\iota\omega t} = \cos\omega t + \iota\sin\omega t$$

und

$$\varepsilon^{\iota\omega t} = \cos\omega t - \iota\sin\omega t.$$

Nach einer der vorstehenden Gleichungen ist

$$i = -C\frac{de}{dt} = +\frac{wC}{2L}\varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}(M\cos\omega t + N\sin\omega t)$$

$$-C\varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}(-\omega M\sin\omega t + \omega N\cos\omega t).$$

Zur Zeit $t = 0$ ist aber diese Stromstärke null, da die Entladung eben erst beginnt. Es folgt also daraus

$$0 = \frac{w}{2L}M - \omega N$$

$$N = \frac{w}{2\omega L}M = \frac{w}{2\omega L}\mathfrak{E}_0.$$

Mithin ist

$$e = \mathfrak{E}_0\varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}\left(\cos\omega t + \frac{w}{2\omega L}\sin\omega t\right) \quad . \quad . \quad (224)$$

Daraus ersieht man, daß sich die Spannung, und weil $q = eC$ ist, auch die Ladung periodisch ändert. Für $t = 0$ ist $e = \mathfrak{E}_0$. Für alle Werte von ωt aber, für welche $\cos\omega t = 1$ und $\sin\omega t = 0$ ist, erreicht die Spannung abwechselnd positive und negative Maxima, wie folgende Tabelle zeigt.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Für } t = 0 \text{ ist } e = \mathfrak{E}_0 \\ \text{,, } \omega t = \pi \text{ ,, } e_1 = -\mathfrak{E}_0\varepsilon^{-\frac{w\pi}{2\omega L}} = \mathfrak{E}_1 \\ \text{,, } \omega t = 2\pi \text{ ,, } e_2 = +\mathfrak{E}_0\varepsilon^{-\frac{w2\pi}{2\omega L}} = \mathfrak{E}_2 \\ \text{,, } \omega t = 3\pi \text{ ,, } e_3 = -\mathfrak{E}_0\varepsilon^{-\frac{w3\pi}{2\omega L}} = \mathfrak{E}_3 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (224\text{a})$$

Die obere Kurve in Abb. 261 zeigt den Verlauf dieser Spannung und man erkennt daraus den Charakter der **gedämpften** Schwingung, da jede folgende Amplitude kleiner ist als die vorhergehende, weil der negative Potenzexponent von ε mit wachsender Zeit immer größer wird. Für $t = \infty$ wird schließlich $e = 0$. Praktisch aber sind die Amplituden in der Regel schon nach ganz kurzer Zeit verschwindend klein. Die Kurve, welche die Scheitelpunkte verbindet, heißt **Scheitelkurve**; sie ist gegeben durch den Faktor vor der Klammer in Gl. 224, also durch $\mathfrak{E}_0\varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}$; sie ist also eine Exponentialkurve und läßt erkennen, wie rasch die Scheitelwerte infolge der Dämpfung abnehmen.

Die Periode, nach welcher sich dieselbe Phase der Schwingung wiederholt, ist 2π. Der im Argument der periodischen Funktion stehende Faktor ω ist also

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu,$$

wenn τ die Dauer einer Periode und ν die Anzahl der Perioden oder ganzen Schwingungen in einer Sekunde bedeutet. Dann ist nach Gl. 223

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{w^2}{4L^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (225)$$

Für die Stromstärke in dem Entladungsstromkreis ergibt sich aus $i = -C\frac{de}{dt}$ mit Berücksichtigung von Gl. 223

$$i = \frac{\mathfrak{E}^0}{\omega L}\varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}\sin\omega t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (226)$$

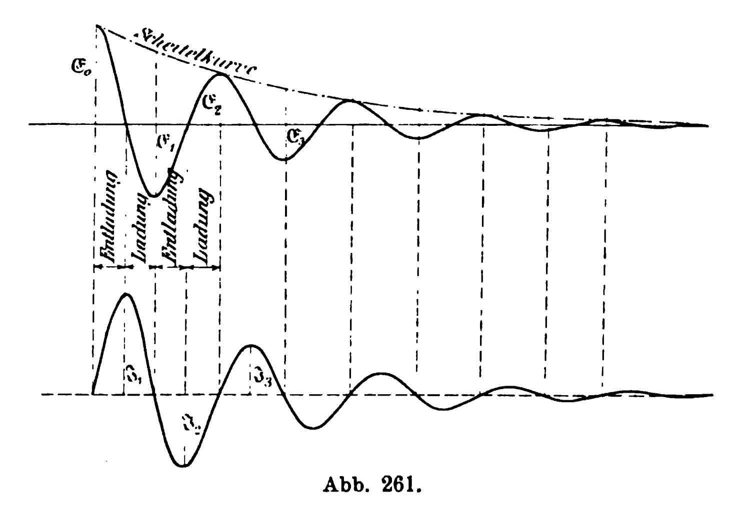


Abb. 261.

Die untere Kurve in Abb. 261 zeigt den Verlauf dieses Entladestromes und die linke Hälfte der Abb. 265 die oszillographische Aufnahme eines solchen.

Setzt man

$$\frac{\mathfrak{E}_0}{\omega L} = \mathfrak{J}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (227)$$

so bedeutet $\mathfrak{J}_0$ einen Wert der Stromstärke, der zwar der vor Beginn der Entladung herrschenden Spannung $\mathfrak{E}_0$ entspricht, aber in Wirklichkeit nicht vorkommt. Denn für $t = 0$ ist $i = 0$. Der tatsächlich erste und größte Scheitelwert $\mathfrak{J}_1$ tritt ein für $\omega t = \frac{\pi}{2}$ und ist (nach Gl. 226)

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{E}_0}{\omega L} \varepsilon^{-\frac{\pi w}{4 \omega L}} = \mathfrak{J}_0 \varepsilon^{-\frac{\pi w}{4 \omega L}} \\ \text{Der nächste Scheitelwert für } \omega t = \frac{3\pi}{2} \text{ ist} \\ \mathfrak{J}_2 = -\frac{\mathfrak{E}_0}{\omega L} \varepsilon^{-\frac{3\pi w}{4 \omega L}} = -\mathfrak{J}_0 \varepsilon^{-\frac{3\pi w}{4 \omega L}} \\ \qquad \text{und so weiter.} \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (227\text{a})$$

Die Gl. 226 für die Stromstärke gilt natürlich nur unter derselben Voraussetzung wie die entsprechende Spannungsgleichung (224), nämlich für $w^2 < \frac{4L}{C}$. Ist dies nicht der Fall, so verläuft der Strom aperiodisch, ebenso wie die Spannung. Die linke Hälfte der Abb. 262 zeigt den Verlauf des Stromes für einen solchen Fall.[1]) Sie ist bei Beginn der Entladung null, steigt rasch bis zu einem Maximum und fällt dann allmählich auf null. Je größer der Widerstand ist, desto kleiner ist das Maximum und desto langsamer erfolgt der Abfall.

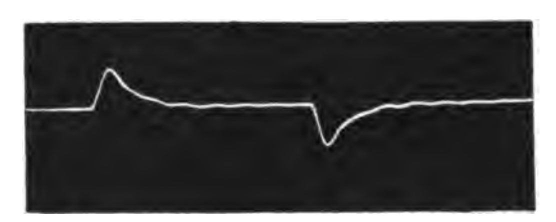


Abb. 262. Oszillographische Aufnahme des Stromes einer aperiodischen Entladung und darauffolgender Ladung.

Vergleicht man die Ausdrücke für Spannung und Strom bei oszillatorischer Entladung (Gl. 224 und 226) und die entsprechenden Wellenzüge in Abb. 261, so sieht man, daß eine Phasenverschiebung zwischen beiden besteht. Bezeichnet man sie mit φ, so kann man nach einem Satz der Trigonometrie die Gl. 224 in die Form

$$e = \mathfrak{X} \sin(\omega t + \varphi)$$

bringen, wobei

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\frac{w}{2 \omega L}} = \frac{2 \omega L}{w}.$$

Die Phasenverschiebung ist also um so größer, je größer der induktive Widerstand ωL und je kleiner der Ohmsche Widerstand ist. Da bei oszillatorischen Entladungen ω in der Regel sehr groß ist, so ist φ nahezu 90°. Daraus folgt, daß der Entladestrom in der Regel nahezu ganz wattlos ist. Dagegen ist bei einer aperi-

[1]) Wittmann, Annal. d. Phys. 12, S. 373, 1903.

odischen Entladung die wattlose Komponente klein gegenüber der Wattkomponente.

Bei den meisten oszillatorischen Entladungen ist in Gl. 223 das Glied $\frac{w^2}{4L^2}$ so klein gegen $\frac{1}{LC}$, daß es vernachlässigt werden kann. Es ist also

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ \nu &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \\ \tau &= 2\pi\sqrt{LC} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (228)$$

Es kann dann auch das zweite Glied in Gl. 224 vernachlässigt werden, so daß

$$e = \mathfrak{E}_0\, \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} \cos \omega t \quad \ldots\ldots (229)$$

Für den Strom ergibt sich nach Einsetzung des obigen Wertes von ω

$$i = \frac{\mathfrak{E}_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}}\, \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t} \sin \omega t \quad \ldots\ldots (230)$$

Unter jener Voraussetzung ist also die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung volle 90^0, da diese nach einem Sinus, jener nach einem Cosinus verläuft.

Die obige Gl. (228) für die Periodenzahl läßt sich in die Form

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

bringen. Dann geht die Gl. 227 über in

$$\mathfrak{J}_0 = \omega C \mathfrak{E}_0,$$

das ist dieselbe Gleichung wie in § 170 für Strom und Kondensatorspannung in einem Stromkreis mit Kondensator.

Im Eingang dieses Paragraphen wurde gesagt, daß der ganze oszillatorische Entladungsvorgang darin besteht, daß sich der Kondensator abwechselnd entladet und wieder ladet. Jede Entladung und Ladung spielt sich, wie man aus Abb. 261 erkennt, während einer Viertelperiode ab. Wenn der Strom den ersten Scheitelwert $\mathfrak{J}_1$ erreicht, und die Kondensatorspannung zum erstenmal durch null geht, ist die erste Entladung vollendet, und es beginnt eine neue Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen. Diese ist voll-

endet, wenn der Strom durch null geht und die Spannung den Wert $\mathfrak{E}_1$ erreicht usf.

Da die Ladung eines Kondensators gleich dem Produkte aus Kapazität und Spannung ist, so folgt aus den Gl. 224a für die aufeinanderfolgenden Scheitelwerte der Ladungen

$$\mathfrak{Q}_0 = C\mathfrak{E}_0$$

$$\mathfrak{Q}_1 = C\mathfrak{E}_1 = -\,C\mathfrak{E}_0\,\varepsilon^{-\frac{w\pi}{2\omega L}} = -\,\mathfrak{Q}_0\,\varepsilon^{-\frac{w\pi}{2\omega L}}$$

$$\mathfrak{Q}_2 = C\mathfrak{E}_2 = +\,C\mathfrak{E}_0\,\varepsilon^{-\frac{w\,2\pi}{2\omega L}} = +\,\mathfrak{Q}_0\,\varepsilon^{-\frac{w\,2\pi}{2\omega L}}$$

und so fort.

Mit Hilfe der ersten dieser Gleichungen lassen sich nun die Scheitelwerte des Stromes (Gl. 227a) in folgender Weise ausdrücken.

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{Q}_0}{\omega L C}\,\varepsilon^{-\frac{\pi w}{4\omega L}} \quad \ldots \ldots \quad (231)$$

und so fort.

Ist der Widerstand klein, so daß die Gl. 228 gelten, so ist

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{Q}_0}{\sqrt{LC}}\,\varepsilon^{-\frac{\pi w}{4\omega L}} \quad \ldots \ldots \quad (232)$$

oder

$$\mathfrak{J}_1 = \omega\mathfrak{Q}_0\,\varepsilon^{-\frac{\pi w}{4\omega L}} \quad \ldots \ldots \quad (233)$$

und so fort.

Aus der letzten Gleichung erkennt man, daß bei gleicher Ladung die Stromstärke um so größer ist, je größer die Schwingungszahl ν ist, weil $\omega = 2\pi\nu$. Das erklärt sich daraus, daß die Dauer einer Viertelperiode, während welcher sich immer die Entladung und Ladung vollzieht, dann auch um so kürzer ist, weil $\tau = \frac{1}{\nu}$ ist. Theoretisch kann man also mit beliebig kleinen Ladungen beliebig große Stromstärken erzielen.

Da nur die erste Ladung $\mathfrak{Q}_0$ bei der Spannung $\mathfrak{E}_0$ zugeführt werden braucht, so ist die gesamte aufgewendete Arbeit (nach § 32) gleich $\frac{\mathfrak{Q}_0\mathfrak{E}}{2}$ oder $\frac{\mathfrak{Q}^2}{2C}$. Je kleiner der Widerstand ist, desto mehr Schwingungen kommen zustande, desto länger dauert es, bis diese Arbeit ganz in Wärme umgesetzt ist.

190. Schließen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion.

Wir haben nun den Fall zu untersuchen, daß ein Stromkreis mit einem Kondensator und mit Selbstinduktion plötzlich an eine Stromquelle von konstanter EMK E angeschlossen wird, z. B. dadurch, daß der Schalter S (Abb. 263) geschlossen wird. Es entsteht dadurch ein von null beginnender Strom, der so lange zunimmt, als bis der Kondensator die seiner Kapazität C und der EMK der Stromquelle E entsprechende Ladung erhalten hat. Die Potentialdifferenz der Kondensatorplatten (Kondensatorspannung) bezeichnen wir wieder mit e.

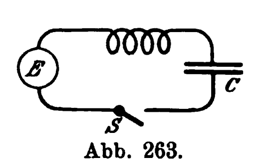


Abb. 263.

Im Gegensatz zu Abb. 258, wo keine äußere EMK vorhanden ist, wirkt hier in jedem Augenblick die um den Betrag der EMK E verminderte Spannung, also $e - E$. Diese ist es, welche den Ohmschen und induktiven Spannungsabfall[1]) zu decken hat. Es ist also

$$e - E = iw + L\frac{di}{dt}.$$

Nun ist wie im vorigen Paragraph

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{de}{dt}.$$

Die Spannungsgleichung geht also über in

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{w}{L}\frac{de}{dt} + \frac{e}{LC} = \frac{E}{LC}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat dieselbe Form wie die für die Ladung eines Kondensators. Ihre Integration erfolgt in ähnlicher Weise. Wenn

$$w^2 \geq \frac{4L}{C}$$

ist, so erfolgt die Ladung aperiodisch, d. h. die Kondensatorspannung nimmt von null an stetig zu, bis sie gleich der EMK E der ladenden Stromquelle geworden ist. Sie verläuft als Exponentialkurve wie in Abb. 254.

[1]) Es kommt natürlich Widerstand und Selbstinduktion des ganzen Stromkreises einschließlich der Stromquelle in Betracht.

Ist aber $w^2 < \frac{4L}{C}$, so erfolgt die Ladung periodisch (oszillatorisch) und die Kondensatorspannung verläuft nach der Gleichung

$$e = E - E\varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}\left(\cos\omega t + \frac{w}{2\omega L}\sin\omega t\right).$$

Man sieht, das zweite Glied ist gleich dem Verlauf der Spannung bei der Entladung. Für $t = 0$ ist das zweite Glied gleich E und daher $e = 0$. Man findet den ganzen Verlauf von e sofort, wenn man die Spannungswelle in Abb. 261 von dem konstanten Werte E abzieht. Es ergibt sich so der Wellenzug in Abb. 264.

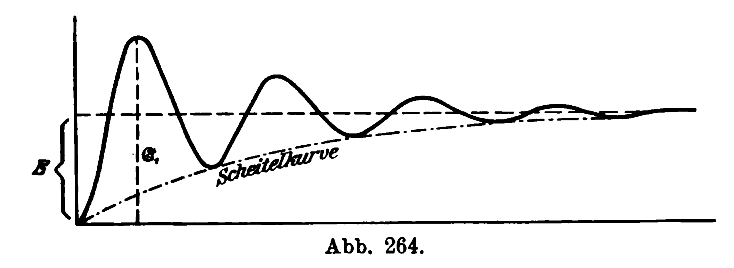


Abb. 264.

Die Scheitelkurve $E\varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}$ läßt wiederum erkennen, wie rasch die Spannung bis zum endgültigen Werte ansteigt.

Für die Stromstärke ergibt sich in gleicher Weise wie im vorigen Paragraphen

$$i = -\frac{E}{\omega L}\varepsilon^{\frac{w}{2L}t}\sin\omega t,$$

d. h. die Stromstärke verläuft in gleicher Weise wie bei der Entladung, erscheint aber hier mit negativen Vorzeichen, weil der Strom jetzt in den Kondensator hineinfließt, während er bei der Entladung aus dem Kondensator herausfließt. In Abb. 262 zeigt die zweite Hälfte den Verlauf des Stromes bei aperiodischer Ladung, in Abb. 265 bei periodischer Ladung durch oszillographische Aufnahmen dargestellt.[1])

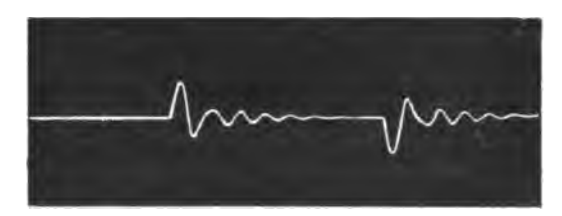


Abb. 265. Oszillographische Aufnahme des Stromes einer periodischen Entladung und darauffolgender Ladung.

[1]) Die wagerechte gerade Linie ist natürlich kein Strom, sondern die Nulllinie.

Ist in Gl. 223 das zweite Glied so klein, daß es vernachlässigt werden kann, so gelten für ν, e und i die entsprechenden vereinfachten Formeln wie bei der Ladung.

191. Eigenschwingung und erzwungene Schwingung.

Es wurde schon in § 189 darauf hingewiesen, daß die Differentialgleichung 219 dieselbe Form hat wie für ein Pendel oder überhaupt einen schwingenden Körper. Daher hat auch Gl. 225 für die Periodenzahl einer gedämpften elektrischen Schwingung dieselbe Form wie für ein gedämpftes Pendel, und Gl. 228 für die Periodenzahl einer ungedämpften elektrischen Schwingung $\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)$ dieselbe Form wie für ein ungedämpftes Pendel $\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{T}}\right)$. An Stelle der Trägheit T tritt die Selbstinduktion L, wie wir schon in § 184 gesehen haben, und an Stelle der Antriebskraft (Direktionskraft) D tritt der reziproke Wert der Kapazität $\frac{1}{C}$.

Die Bewegung der Elektrizität bei Entladung eines Kondensators über einen Stromkreis mit Selbstinduktion erfolgt also nach denselben Gesetzen wie die Bewegung eines Pendels, das einmal aus der Ruhelage gebracht wurde. Man bezeichnet daher auch eine solche elektrische Schwingung als freie Schwingung oder Eigenschwingung des betreffenden Stromkreises. Dagegen entspricht eine periodische Bewegung der Elektrizität, die dadurch erzeugt wird, daß ein Stromkreis an eine Wechselstromquelle angeschlossen wird, einer schwingenden Bewegung, welche einem Pendel durch eine äußere Kraft (Kurbel oder dgl.) aufgezwungen wird. Man kann daher jeden gewöhnlichen Wechselstrom als erzwungene Schwingung betrachten.

In § 173 haben wir gefunden, daß in einem Stromkreis mit Kapazität C und Selbstinduktion L ein plötzliches Anwachsen der Stromstärke stattfindet, wenn die Periodenzahl der Bedingung $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$ entspricht, also gleich der Eigenschwingung des Stromkreises ist, während bei jeder kleineren oder größeren Frequenz die Stromstärke sehr viel kleiner ist. Diese Erscheinung wurde wegen ihrer Ähnlichkeit mit akustischen Erscheinungen als elektrische Resonanz bezeichnet. Wir gewinnen nun einen tieferen Einblick in diese Erscheinung. Durch die elektrische Schwingung, welche dem Stromkreis von der äußeren Stromquelle aufgedrückt wird, wird die Eigenschwingung dieses Stromkreises

angeregt, und es entsteht eine neue, resultierende Schwingung, die man als erzwungene Schwingung bezeichnet. Ist die Periodenzahl der Stromquelle gleich der der ungedämpften Eigenschwingung, so kommt es zur Resonanz und man erhält eine erzwungene Schwingung von großem Scheitelwert.

Würde die Eigenschwingung allein bestehen, wie in § 189, so würde sie nach einiger Zeit verschwinden, weil sie vom Ohmschen Widerstand aufgezehrt, d. h. ihre Arbeit in Wärme umgesetzt wird. Die erzwungene Schwingung hingegen besteht so lange, als die äußere Stromquelle wirkt, weil diese den Verlust immer ersetzt. Das gilt auch, wenn von der aufgedrückten Schwingung die Eigenschwingung zur Resonanz angeregt wird. Daher kommt für den Eintritt der Resonanz nicht die Periodenzahl der gedämpften, sondern die der ungedämpften Schwingung (Gl. 228) in Betracht, selbst wenn der Widerstand des Stromkreises noch so groß ist. Nur die Höhe der Resonanz, das ist in diesem Fall die Stromstärke, ferner die Kondensatorspannung und die induktive Spannung ist vom Widerstand abhängig.

192. Die Dämpfung einer elektrischen Schwingung.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, daß die Elektrizitätsbewegung beim Öffnen und Schließen eines Stromkreises mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität, oder mit anderen Worten das Entladen und Laden eines Kondensators über Widerstand und Selbstinduktion nach denselben Gesetzen vor sich geht, wie die Schwingung eines gedämpften Pendels oder dgl. Wäre der Widerstand w des ganzen Stromkreises null, so würde die Differentialgleichung (219) übergehen in die eines ungedämpften Pendels. Die Gleichung für die Kondensatorspannung (224) würde übergehen in

$$e = \mathfrak{E}_0 \cos \omega t,$$

und die für den Strom (226) in

$$i = \frac{\mathfrak{E}_0}{\omega L} \sin \omega t,$$

d. h. es würde durch das Entladen oder Laden eines Kondensators ein ewig dauernder Wechselstrom eingeleitet werden, der aber vollständig wattlos ist, weil er nach dem Sinus, die Spannung aber nach dem Cosinus verläuft, so daß zwischen beiden genau 90^0 Phasenverschiebung besteht. Es wäre dann so wie bei einem ungedämpften Pendel, das, einmal angestoßen, ewig fortschwingen würde. Sowie aber der geringste Ohmsche Widerstand in dem Stromkreis vorhanden ist, nehmen die Scheitelwerte beständig ab, wie aus den Abb. 261 und 265 zu ersehen ist.

Das Verhältnis zweier auf derselben (positiven oder negativen) Seite aufeinanderfolgender Scheitelwerte ist konstant und eignet sich daher als Maß für die Größe der Dämpfung. Man bezeichnet es als Dämpfungsverhältnis x. Es ist also (nach den Gl. 224a)

$$x = \frac{e}{e_2} = \frac{e_2}{e_4} = \frac{e_1}{e_3} = \cdots\cdot = \varepsilon^{\frac{\pi w}{\omega L}}$$

oder da

$$\omega = 2\pi\nu \quad \text{ist}$$

$$x = \varepsilon^{\frac{w}{2\nu L}}.$$

Da ε eine reine Zahl (2,72) ist, so liegt das Maß für die Dämpfung im Potenzexponenten. Man kann ihn besonders erhalten, wenn man den natürlichen Logarithmus von x bildet. Es ist also

$$\log \text{nat}\, x = \frac{\pi w}{\omega L} = \frac{w}{2\nu L} = \Lambda.$$

Man bezeichnet diesen Wert als logarithmisches Dekrement (logarithmische Abnahme) der Schwingung. Für ω oder ν kann man den Wert aus Gl. 223 oder 225 einsetzen. Für den Fall, daß w klein ist, kann man Gl. 228 einsetzen und dann ist

$$\Lambda = \pi w \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \ldots\ldots \quad (234)$$

Man ersieht daraus, daß die Dämpfung um so kleiner ist, je kleiner der Widerstand ist, was wir schon aus dem vorigen erkannt haben, daß sie aber auch um so kleiner ist, je kleiner die Kapazität und je größer die Selbstinduktion ist. Ferner ist von Wichtigkeit, daß in diesem Ausdruck für Λ die Spannung nicht vorkommt; sie hat also keinen Einfluß auf die Dämpfung. Dagegen hat bei gleicher Dämpfung der ganze Schwingungsvorgang um so mehr Perioden, d. h. er dauert um so länger, je größer die Spannung ist, weil da der erste Scheitelwert um so größer ist. Bei gleicher Spannung dauert der ganze Schwingungsvorgang um so länger, je kleiner die Dämpfung ist.

Will man bei unveränderter Schwingungsdauer τ eine möglichst kleine Dämpfung erzielen, so hat man zwei Wege: erstens Verminderung des Widerstandes w, da dieser, solange die Bedingung 222 gilt, keinen Einfluß auf die Schwingungsdauer hat, zweitens Verminderung der Kapazität C und gleichzeitige proportionale Vergrößerung der Selbstinduktion L; dann wird aus diesen beiden Ursachen das Verhältnis $\frac{C}{L}$ im logarithmischen Dekrement Λ kleiner, während das Produkt LC in der Schwingungsdauer ungeändert bleibt.

Was den Widerstand w anbelangt, so kann dieser nicht beliebig klein gemacht werden, da er aus dem Widerstand des Leitungsdrahtes und des Funkens besteht. In der Regel ist jener sehr klein gegenüber diesem, so daß eine Verminderung jenes auf w wenig Einfluß hat.

Die Dämpfung bei der Entladung eines Kondensators beruht darauf, daß die im Kondensator vorhandene elektrische Arbeit bei ihrem Wechsel zwischen elektrischer und magnetischer Arbeit einen Verlust erleidet, und zwar dadurch, daß sie sich in Wärme umsetzt oder aus dem Schwingungskreis heraustritt. Der Umsatz in Wärme erfolgt durch den Widerstand des ganzen Stromkreises, also zum Teil in den Leitungsdrähten, zum Teil im Funken. Hier ist die Wärmeentwicklung unter Umständen so bedeutend, daß eine oberflächliche Verbrennung der Elektroden eintritt. Ein weiterer Umsatz in Wärme findet im Dielektrikum des Kondensators (§ 178) und beim Vorhandensein eines Eisenkörpers durch magnetische Hysterese und Wirbelströme statt. Das Austreten der elektrischen Arbeit aus dem Schwingungskreis findet statt durch Übergang der Elektrizität in die umgebende Luft (Ausstrahlung) oder durch Nebenschlüsse über mangelhafte isolierte Teile des Stromkreises, die insbesondere auch zwischen den Kondensatorplatten eines Luftkondensators von geringem Abstand eintreten. Diese und die Ausstrahlung sind um so größer, je höher die Spannung, je größer die leitende Oberfläche des Schwingungskreises ist und je mehr Spitzen und Kanten er hat. Sie können fast ganz beseitigt werden, wenn man den Schwingungskreis (hauptsächlich Kondensator und Funkenstrecke) unter Öl bringt.

Als wichtigste und unvermeidlichste Ursache der Dämpfung bleibt dann der Funken.

193. Der Dämpfungswiderstand des Funkens.

Die Abnahme einer Schwingung (Dämpfung) erfolgt natürlich nur dann nach dem durch Gl. 234 ausgedrückten Gesetz, wenn w, C und L während des Schwingungsvorganges konstant sind. Das ist z. B. der Fall beim Schließen eines Stromkreises (Abb. 263), wenn beim Einrücken des Schalters S kein Funken auftritt, d. h. wenn die Spannung E nicht zu groß ist, denn sonst überschlägt sie bei der Annäherung der Schalterkontakte den Abstand bevor sie zur Berührung kommen. Beim Öffnen des Stromkreises tritt immer ein Funken auf, der um so länger ist und daher auch um so länger dauert, je höher die Spannung ist und je geeigneter die Elektroden

nach Form und Stoff zur Ausbildung eines Funkens sind.[1]) Die Unterbrechung ist erst dann ganz vollzogen, wenn der Widerstand zwischen den Kontakten unendlich groß ist, d. h. wenn der Funken verlöscht ist. Bis dahin stellt sich der Vorgang der Unterbrechung so dar, daß der gesamte Widerstand des Schwingungskreises von dem Werte an, den die Leitungsdrähte haben, bis unendlich wächst. Mit anderen Worten, der für die Dämpfung in Betracht kommende Widerstand des Funkens wächst von null bis unendlich. Es muß daher eine raschere Abnahme der Schwingung als nach Abb. 261 eintreten. Die Schwingung hört auch schon früher auf, als bevor der Widerstand unendlich geworden ist, und zwar bei einem Durchgang des Stromes durch null, wenn die Spannung, die infolge der Dämpfung ebenfalls abnimmt (Abb. 261), bereits so klein geworden ist, daß sie die Funkenstrecke nicht mehr überbrücken kann (Minimum-Spannung § 230). Daher verläuft die Schwingung beim Unterbrechen nicht so allmählich in die Nulllinie wie in Abb. 261, sondern bricht viel plötzlicher ab, wie Abb. 266 zeigt.

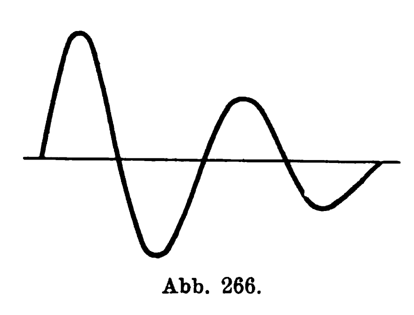


Abb. 266.

Eine Zunahme des Funkenwiderstandes während der Entladung findet aber auch dann statt, wenn die Entladung des Kondensators nicht durch Unterbrechung des Stromkreises eingeleitet wird, sondern dadurch, daß bei feststehenden Elektroden die Spannung so weit gesteigert wird, bis sie die Funkenstrecke überschlägt. Durch den Strom der elektrischen Schwingung wird die Luftstrecke so stark erhitzt, daß der vor dem Übergang unendlich große Widerstand der Luftstrecke auf einen verhältnismäßig kleinen Wert sinkt (vgl. § 226). Da aber der Strom rasch abnimmt (Abb. 261), so nimmt auch die Temperatur des Funkens rasch ab und sein Widerstand steigt. Gleichzeitig sinkt die Spannung bis sie die Funkenstrecke nicht mehr überbrücken kann. Daher fällt erstens die Scheitelkurve rascher ab als nach der Theorie und zweitens bricht sie bei einem Durchgang durch null plötzlich ab wie in Abb. 266.

Der Widerstand des Funkens hängt natürlich sehr von der Funkenlänge (Elektrodenabstand) ab. In Abb. 267 ist er in Ab-

[1]) Über die äußeren Verhältnisse eines Funkens vergl. §§ 186, 187 und 230—232.

hängigkeit von der Funkenlänge bei gleicher Entladespannung für vier verschiedene Kapazitäten dargestellt.[1])

Wie man sieht, nimmt er namentlich bei größerer Kapazität anfangs sehr langsam zu. Daraus ergibt sich eine wichtige Folgerung für die Erzielung eines möglichst kleinen Funkenwiderstandes. Nach Abb. 353 sind z. B. bei 11 mm Funkenstrecke zwischen zwei Kugeln etwa 30 000 Volt Funkenspannung nötig. Diese kann man ersetzen durch drei hintereinander geschaltete Funkenstrecken von je 2,5 mm, da jede 10000 V. braucht. Nach Abb. 267 hat aber (bei 1100 cm Kapazität) die 10 mm Funkenstrecke einen Widerstand von etwa 15 Ohm, die drei hintereinander geschalteten hingegen einen Widerstand von $3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$ Ohm, also nur den 25. Teil. Man hat also in der Unterteilung einer Funkenstrecke in mehrere von insgesamt gleicher Funkenspannung ein wirksames Mittel zur Verminderung der Dämpfung, das in der Funkentelegraphie mit Erfolg angewendet wird.

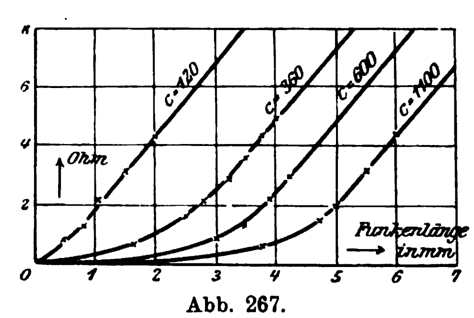


Abb. 267.

Unter gewissen Verhältnissen kann hingegen bei kurzen Funkenstrecken eine geringe Abnahme des Widerstandes mit wachsender Funkenlänge eintreten, so daß es unter Umständen eine gewisse Länge gibt, bei welcher der Widerstand ein Minimum ist. Dieses liegt zwischen 3 und 6 mm.[2])

Aus Abb. 267 geht auch noch hervor, daß der Widerstand um so kleiner ist, je größer die Kapazität ist. Das erklärt sich daraus, daß bei gleicher Spannung eine um so größere Elektrizitätsmenge und elektrische Arbeit zur Entladung kommt, je größer die Kapazität ist. Mit der ganzen Arbeit wächst aber auch der in Wärme umgesetzte Anteil, die Funkenstrecke erhält eine höhere Temperatur, und mit der Temperatur nimmt der Widerstand ab.

Der Funkenwiderstand hängt nach Drude[3]) aber auch von der Selbstinduktion L des Schwingungskreises ab, und zwar nimmt er mit dieser ab; dadurch ist es möglich, daß trotz der Gleichung 234 durch Verkleinerung der Kapazität und Vergrößerung der Selbstinduktion keine Änderung in der Dämpfung eintritt, weil diese

[1]) Nach Messungen von Slaby ETZ 1904, S. 917.

[2]) Rempp, Annal. d. Phys. 17, S. 627, 1905.

[3]) Annal. d. Phys. 15, S. 709, 1904. Vgl. auch Heydweiller ebenda 19, S. 650, 1906.

Änderungen auf den Funkenwiderstand im entgegengesetzten Sinne einwirken. Ja es zeigt sich sogar, daß unter gewissen Umständen die Dämpfung von der Länge der Funkenstrecke, sowie von Kapazität und Selbstinduktion unabhängig ist. Dann bleibt als dämpfungsverminderndes Mittel nur die Unterteilung der Funkenstrecke.

Der Funkenwiderstand hängt aber auch von dem Stoff der Elektroden ab. Nach Messungen von Slaby mit kugelförmigen Elektroden von 10 mm Durchmesser nimmt der Widerstand unter sonst gleichen Umständen in folgender Reihenfolge ab: Kupfer, Aluminium, Messing, Eisen, Zink, Platin, Stahl, Blei, Cadmium, Silber, Zinn.

Von größerem Einfluß ist das Dielektrikum zwischen den Elektroden, in dem der Funken überspringt. Vergleicht man z. B. Funkenstrecken in Luft und unter Petroleum, so ist sie im letzteren Falle bei gleicher Spannung etwa 7mal[1]) kürzer als in Luft, der Funkenwiderstand hingegen nach den Messungen von Slaby etwa 10mal größer als in Luft.

Daß auch die Form der Elektroden einen gewissen Einfluß auf den Funkenwiderstand hat, geht schon daraus hervor, daß die Funkenspannung bis zu einem gewissen Grade davon abhängt.

Es ist schon erwähnt worden, daß mit der Stromstärke die Funkenwärme wächst und damit der Funkenwiderstand abnimmt. Wenn es daher gelingt die über den Funken gehende Stromstärke zu vergrößern, muß der Funkenwiderstand abnehmen. Die Vergrößerung der Stromstärke gelingt durch Vergrößerung der Ladespannung, und dadurch der anfänglichen Ladung $\mathfrak{Q}_0$. Damit wächst nach Gl. 233 auch die Stromstärke. Mit der Spannung wächst aber auch die Ausstrahlung, so daß die zweite Ursache der Dämpfung wächst, wenn auch der Funkenwiderstand abnimmt. Dagegen gelingt die Vergrößerung des Stromes durch Kupplung zweier oder mehrerer Schwingungskreise von gleicher Schwingungszahl und gleicher Phase über dieselbe Funkenstrecke, ohne daß ein anderer schädlicher Einfluß auftritt.

194. Überspannung beim Schließen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion.

Wie man aus Abb. 264 ersieht, erreicht die Spannung bei jedem positiven Scheitelwert einen höheren Wert als die EMK E der Stromquelle, und zwar um soviel höher als der betreffende

[1]) Ändert sich natürlich etwas mit der Art des Öles.

Scheitelwert der gedämpften Sinuswelle beträgt. Der erste und höchste Scheitelwert tritt ein für $\omega t = \pi$, nämlich

$$\mathfrak{E}_1 = E + E \varepsilon^{-\frac{w\pi}{2\omega L}}.$$

Der größte Wert, der überhaupt möglich ist, nämlich $\mathfrak{E}_1 = 2E$, würde eintreten, wenn $w = 0$ wäre. Sonst sind $\mathfrak{E}_1$ und alle folgenden Scheitelwerte um so kleiner, je größer die Dämpfung ist, d. h. je größer nach Gl. 234 Widerstand und Kapazität und je kleiner die Selbstinduktion ist.

Dieses Auftreten einer höheren Spannung als die EMK der Stromquelle kann eine Durchbrechung der Isolation des Stromkreises, oder des Dielektrikums zur Folge haben. Diese Gefahr ist um so geringer, je größer die Dämpfung ist, weil dann die Scheitelwerte um so kleiner sind und in um so geringerer Zahl auftreten. Wenn aber bloß ein einziger höherer Scheitelwert auftritt, so ist die Gefahr der Durchbrechung der Isolation gering, weil dazu immer eine gewisse Zeit erforderlich ist. Ist aber die Dämpfung gering, so daß viele langsam abnehmende Scheitelwerte auftreten, die nur wenig kleiner sind als die EMK der Stromquelle, so ist die Gefahr bedeutend größer.

Das Durchbrechen des Dielektrikums eines Kondensators bei der Ladung desselben ist dann häufig zu bemerken, wenn es aus Luft besteht. Daraus erklärt sich, warum bei Funkeninduktoren und anderen Apparaten zur Erzeugung von Funkenentladungen plattenförmige Elektroden eine bessere Wirkung geben als kugelförmige oder spitzenförmige, weil jene eine größere Kapazität darstellen. Es tritt infolgedessen beim Entstehen der EMK, die ja als eine Ladung der Elektroden zu betrachten ist, eine höhere Spannung auf als die von der Stromquelle erzeugte, so daß es schon bei einer kleineren EMK zu einer Funkenentladung kommt. Der Unterschied ist besonders deutlich, wenn man einmal plattenförmige und einmal spitzenförmige Elektroden mittels eines Schalters plötzlich an die Stromquelle anschließt. Bei ersteren erhält man unter gleichen Verhältnissen größere Schlagweiten als bei letzteren. Bei jenen erhält man daher die richtigen, von Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand unabhängigen Schlagweiten nur, wenn man die EMK der Stromquelle langsam steigert.

195. Umformung elektrischer Schwingungen. Tesla-Transformator.

Die durch Entladung eines Kondensators über einen Stromkreis mit Selbstinduktion auftretenden Schwingungen können (nach § 189. Gl. 224a) keine höhere Spannungsamplitude haben als die ursprüng-

liche Kondensatorspannung, das ist die Spannung der Stromquelle, die zum Laden des Kondensators dient. Will man die Schwingungen auf höhere Spannung bringen, so muß man sie mittels eines Transformators umformen. Abb. 268 zeigt diese Anordnung schematisch. Mittels der Drähte *a b*, die zu einer geeigneten Stromquelle führen (Funkeninduktor, Wechselstromtransformator), wird der Kondensator C_1 geladen, bis die Funkenstrecke *F* von der Spannung überschlagen wird. Dadurch wird der Kondensator wieder entladen, und zwar oszillatorisch, wenn die Bedingungsgleichung (Gl. 222) erfüllt ist.

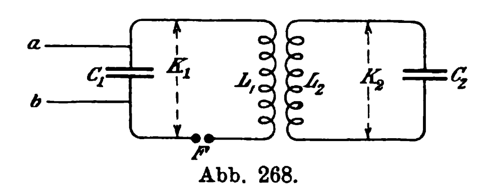


Abb. 268.

Diese elektrischen Schwingungen werden durch den Transformator $L_1 L_2$ umgeformt und man erhält im allgemeinen in der sekundären Wickelung elektrische Schwingungen von höherer Spannung, wenn die Windungszahl der sekundären Wickelung eine höhere ist als die der primären.

Man erkennt aber aus dieser Anordnung (nach dem Ergebnis des § 173), daß der Kondensator C_2 nur dann einen stärkeren Strom durchläßt, wenn er in einem solchen Verhältnis zur sekundären Selbstinduktion L_2 steht, daß Resonanz eintritt. Man kann zwar den Kondensator C_2 weglassen und erhält auch noch Resonanz im sekundären Kreis, weil bei der hohen Periodenzahl, die im primären Kreis auftritt, schon die Kapazität der Wickelung und der angeschlossenen Leitungen einen merklichen Kapazitätswiderstand darstellt.

Aus § 146 wissen wir, daß bei gegenseitiger Induktion der sekundäre Strom auf den primären zurückwirkt. Daraus kann man schließen, daß die Schwingung, die im sekundären Kreis ausgelöst wird, auch im primären auftritt. Nach der in § 191 gegebenen Darstellung kann man den Vorgang so darstellen: Durch die magnetische Kupplung zwischen den beiden Wickelungen wird die im primären Kreis durch Entladung des Kondensator C_1 erzeugte Schwingung dem sekundären Kreis aufgezwungen. Diese erzwungene Schwingung regt den sekundären Kreis zu einer Eigenschwingung an, und diese wird wiederum dem primären Kreis aufgezwungen, so daß man in jedem Stromkreis zwei Schwingungen hat.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Stromkreisen wird durch die Kraftlinien hergestellt, welche von beiden Wickelungen umschlossen werden; es ist also eine magnetische Kuppelung. Sie wird wie bei jedem Transformator durch den Koeffizienten der

gegenseitigen Induktion M zahlenmäßig ausgedrückt, dessen Zusammenhang mit den Selbstinduktionskoeffizienten der beiden Wickelungen (§ 153) bestimmt ist durch

$$M^2 = \varkappa^2 L_1 L_2,$$

wobei $\varkappa$ den Kupplungsfaktor bedeutet. $\varkappa$ und M sind um so kleiner, je größer die magnetische Streuung beider Stromkreise ist, d. h. je mehr Kraftlinien es gibt, die nur zu einem der beiden Stromkreise gehören.

Nach § 145 gilt für den primären Stromkreis

$$w_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = k_1$$

$$w_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = k_2.$$

Sind die Ohmschen und induktiven Widerstände der äußeren Verbindungsdrähte verschwindend klein,[1] so ist k_1 gleich der Spannung am Kondensator C_1 und k_2 gleich der Spannung am Kondensator C_2, wie in Abb. 268 angenommen wurde. Dann ist (Gl. 183)

$$k_1 = -\frac{1}{\omega^2 C_1} \frac{di_1}{dt}$$

$$k_2 = -\frac{1}{\omega^2 C_2} \frac{di_2}{dt}.$$

Mithin

$$w_1 i_1 + \left(L_1 - \frac{1}{\omega^2 C_1}\right) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$w_2 i_2 + \left(L_2 - \frac{1}{\omega^2 C_2}\right) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0.$$

Die Behandlung dieses allgemeinen Falles würde hier zu weit führen.[2] Wir betrachten den einfacheren Fall, wo die beiden Widerstände verschwindend klein sind, da sich daraus das Wichtigste erkennen läßt. Es sei also

$$w_1 = w_2 = 0.$$

Dann lassen sich die letzten beiden Gleichungen ohne weiteres integrieren und man erhält

[1]) Daher wurde auch im Vergleich zu § 145 $L_{21} = L_2$ gesetzt.

[2]) Siehe darüber: Oberbeck, Annal. d. Phys. 55, S. 623, 1895. Domalig und Kolacek, ebenda 57, S. 731, 1896. Drude, ebenda 13, S. 512, 1904.

$$\left.\begin{aligned}\left(L_1 - \frac{1}{\omega^2 C_1}\right) i_1 + M i_2 = 0 \\ \left(L_2 - \frac{1}{\omega^2 C_2}\right) i_2 + M i_1 = 0\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (235)$$

Oder wenn man für M den Faktor der magnetischen Kupplung $\varkappa$ einführt

$$i_2 = - i_1 \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{\varkappa \omega \sqrt{L_1 L_2}} \quad . \; . \; . \; . \quad (236)$$

$$i_2 = - i_1 \frac{\varkappa \omega \sqrt{L_1 L_2}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \quad . \; . \; . \; . \quad (237)$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen i_1 und i_2, so erhält man folgende Gleichung für ω

$$\omega^4 - \omega^2 \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2}{(1 - \varkappa^2) L_1 L_2 C_1 C_2} + \frac{1}{(1 - \varkappa^2) L_1 L_2 C_1 C_2} = 0.$$

Daraus erhält man zwei verschiedene Werte für ω, die wir mit ω_a und ω_b bezeichnen

$$\omega_a^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 - \sqrt{(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4 \varkappa^2 L_1 L_2 C_1 C_2}}{2 (1 - \varkappa^2) L_1 L_2 C_1 C_2} \quad (238)$$

$$\omega_b^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 + \sqrt{(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4 \varkappa^2 L_1 L_2 C_1 C_2}}{2 (1 - \varkappa^2) L_1 L_2 C_1 C_2} \quad (239)$$

In jedem der beiden Stromkreise treten also zwei Schwingungen von verschiedener Periodenzahl auf.[1]) Daß sie in jedem auftreten müssen, folgt daraus, daß die letzten Gleichungen aus der Vereinigung der Gleichungen 236 und 237, von denen die erste für den primären, die zweite für den sekundären Kreis gilt, erhalten wurden. Ferner folgt es aus dem Grundgesetz des Transformators, wonach die Periodenzahlen in beiden Kreisen unbedingt dieselben sind. Zwei verschiedene Schwingungen in jedem

[1]) Die beiden Schwingungen würden nur dann in eine übergehen, wenn die Wurzel in den Gleichungen 238, 239 verschwinden würde, d. h. wenn

$$\varkappa^2 = - \frac{(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2}{4 L_1 L_2 C_1 C_2}$$

würde.

Dieser Fall hat aber keine physikalische Bedeutung, denn dieser Ausdruck kann niemals negativ werden, weil alle Größen, auch der Zähler immer positiv sind. Eine negative Kupplung hätte auch keinen Sinn.

Stromkreis treten sogar dann auf, wenn jeder der beiden Stromkreise für sich allein bestehend dieselbe Eigenschwingung hätte, d. h. wenn

$$L_1 C_1 = L_2 C_2$$

wäre. Dann ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} \omega_a^2 &= \frac{1}{(1+\varkappa) L_1 C_1} \\ \omega_b^2 &= \frac{1}{(1-\varkappa) L_1 C_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (240)$$

Nur für den Sonderfall $\varkappa = 0$ gehen beide Schwingungen in eine über, nämlich

$$\omega = \frac{1}{L_1 C_1}.$$

Aus den Gl. 238 und 239 geht hervor, daß die Periodenzahlen von der magnetischen Kupplung $\varkappa$ abhängen. Wir betrachten den Fall, wenn die Kupplung eine vollständige ist, d. h. wenn keine magnetische Streuung zwischen den beiden Stromkreisen besteht. Für diesen Fall ist

$$\varkappa = 1$$

und die Gl. 238 und 239 gehen über in

$$\omega_a^2 = \frac{0}{0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (241)$$

$$\omega_b^2 = \infty \quad \ldots \ldots \ldots \quad (242)$$

Die Bedeutung des unbestimmten Ausdruckes $\frac{0}{0}$ für ω_a^2 erhält man, wenn man auf die Gl. 236 und 337 zurückgeht und $\varkappa = 1$ setzt. Dann erhält man eine lineare Gleichung für ω^2 und dieser Wert ist

$$\omega_a^2 = \frac{1}{L_1 C_1 + L_2 C_2} \quad \ldots \ldots \quad (243)$$

In den beiden Stromkreisen besteht also in diesem Falle eine Schwingung, deren Periodenzahl einen Mittelwert aus den Eigenschwingungen beider darstellt. Diesen Fall praktisch zu verwirklichen ist unmöglich, weil eine gänzliche Vermeidung der Streuung bei einem Transformator unmöglich ist. Hier aber kommt es nicht nur auf die magnetische Kupplung zwischen den Wicklungen des Transformators, sondern der ganzen Stromkreise einschließlich der Verbindungsleitungen an, deren Kraftlinien mit dem anderen Stromkreis nicht gekuppelt sind. Dagegen ist eine solche vollständige Kupplung bei mechanischen Schwingungen leicht möglich (vergl.

§ 197). Die zweite Schwingung kommt praktisch nicht in Betracht, denn wenn ihre Periodenzahl (Gl. 242) auch nicht unendlich groß ist, so ist sie doch so groß, daß sie sich der Beobachtung entzieht, da auch ihre Amplituden sehr klein sind.

Wir betrachten auch den anderen äußersten Fall der magnetischen Kupplung, nämlich

$$\varkappa = 0;$$

der ist vorhanden, wenn die beiden Stromkreise voneinander unabhängig sind. Dann gehen die Gl. 238 und 239 über in

$$\omega_a^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \quad \ldots\ldots \quad (244)$$

$$\omega_b^2 = \frac{1}{L_2 C_2} \quad \ldots\ldots \quad (245)$$

Jeder Stromkreis hat also seine unveränderte Eigenschwingung, wie nicht anders zu erwarten war.

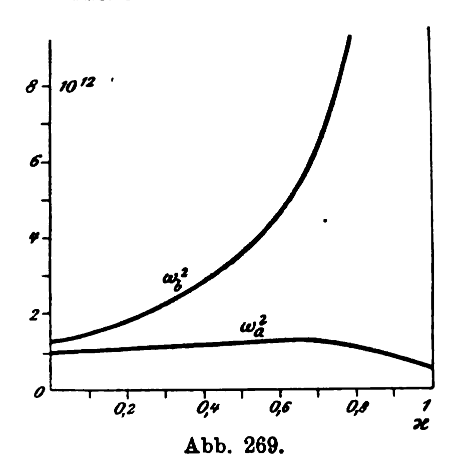


Abb. 269.

Abb. 269 zeigt die Abhängigkeit der beiden Schwingungen von der magnetischen Kupplung $\varkappa$ für $L_1 C_1 = 10^{-12}$ und $L_2 C_2 = \frac{3}{4} \cdot 10^{-12}$.

Das Vorstehende gilt strenge genommen nur für ungedämpfte Schwingungen, da wir die Widerstände gleich null gesetzt haben. Angenähert gilt es aber auch für gedämpfte Schwingungen, da der Widerstand (nach Gl. 225) auf die Schwingungszahl wenig Einfluß hat, wenn er nicht so groß ist, daß sich die Kondensatorentladung der Aperiodizität nähert.

Wir betrachten nun die sekundäre Stromstärke und Klemmenspannung. Die Gl. 237 bildet das Analogon zu Gl. 143a für einen gewöhnlichen Transformator. Sie besagt, daß die beiden Stromstärken in jedem Augenblick einander entgegengesetzt sind und in einem bestimmten Verhältnis stehen. Das gilt also auch für die Scheitelwerte und daher ist

$$\mathfrak{J}_2 = -\mathfrak{J}_1 \frac{\varkappa \omega \sqrt{L_1 L_2}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \quad \ldots\ldots \quad (246)$$

Da die Klemmenspannungen nach der Voraussetzung mit den Kondensatorspannungen identisch sind, so ist nach § 170 (Gl. 181)

$$\mathfrak{K}_2 = \frac{\mathfrak{J}_2}{\omega C_2} \qquad \mathfrak{K}_1 = \frac{\mathfrak{J}_1}{\omega C_1}$$

und daher

$$\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1 \frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} \cdot \frac{C_1}{C_2} = -\mathfrak{K}_1 \frac{\varkappa \omega C_1 \sqrt{L_1 L_2}}{C_2 \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} \quad . \quad . \quad (247)$$

Dann folgt aus den beiden letzten Gleichungen

$$\mathfrak{J}_2 = -\mathfrak{K}_1 \frac{\varkappa \omega^2 C_1 \sqrt{L_1 L_2}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (248)$$

Aus Gl. 236 folgt

$$\mathfrak{J}_1 = -\mathfrak{J}_2 \frac{\varkappa \omega \sqrt{L_1 L_2}}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (249)$$

und nach Einsetzung der Gl. 248

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{K}_1 \frac{\varkappa^2 \omega^3 C_1 L_1 L_2}{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} \quad . \quad . \quad (249a)$$

Man erkennt aus diesen Gleichungen ohne weiteres, daß $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ und $\mathfrak{K}_2$ unendlich groß werden, also Resonanz eintritt, wenn

$$\omega L_2 = \frac{1}{\omega C_2} \quad \text{oder} \quad \omega^2 = \frac{1}{L_2 C_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (250)$$

ist, d. h. wenn die Resonanzbedingung für den alleinstehenden Sekundärkreis, entsprechend seiner Eigenschwingung, erfüllt ist.

$\mathfrak{J}_1$ wird aber auch noch in einem zweiten Falle unendlich groß, nämlich für

$$\omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1} \quad \text{oder} \quad \omega^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (251)$$

d. h. wenn die Resonanzbedingung für den allein bestehenden Primärkreis, entsprechend seiner Eigenschwingung erfüllt ist.

Sind die Widerstände nicht null, so werden $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{J}_2$ und $\mathfrak{J}_1$ natürlich nicht unendlich groß, sondern um so kleiner, je größer die Widerstände sind. Die Lage des Maximums hinsichtlich der Periodenzahlen wird aber nur wenig geändert, weil letztere von den Widerständen wenig abhängig sind.

196. Resonanz zwischen zwei gekuppelten Stromkreisen.

Wie sehr $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{J}_2$ von der Kupplung $\varkappa$ abhängen, kann man aus den vorstehenden Formeln nicht ersehen, weil $\varkappa$ auch in ω enthalten ist (Gl. 238, 239). Wir betrachten daher wieder die beiden äußersten Fälle. Ist

$$\varkappa = 1,$$

das heißt, ist die Kupplung eine vollständige, so erhält man nach Einsetzung der Gl. 243 für ω in Gl. 247

$$\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

und da sich die Selbstinduktionskoeffizienten so verhalten wie die Quadrate der Windungszahlen, so ist

$$\frac{\mathfrak{K}_2}{\mathfrak{K}_1} = \frac{N_2}{N_1} = \ddot{u}.$$

Die Klemmenspannungen verhalten sich also wie die Windungszahlen. Für das Verhältnis der Ströme ergibt sich auf gleiche Weise

$$\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1} = \frac{C_2}{C_1}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{C_2}{C^1}\cdot\frac{N_2}{N_1} = \frac{C_2}{C_1}\ddot{u}.$$

Ist

$$\varkappa = 0,$$

das heißt, sind die beiden Stromkreise voneinander unabhängig, so ist $\mathfrak{K}_2 = 0$. Ist $\varkappa$ sehr klein, aber noch nicht null, so gilt für die erregende Schwingung, welche durch die Entladung des Kondensators C_1 erzeugt wird, sehr angenähert die Gl. 228. Setzt man also $\omega^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ in Gl. 247 ein, so erhält man

$$\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1 \frac{\varkappa C_1 \sqrt{L_1 L_2}}{L_1 C_1 - L_2 C_2}$$

$$\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_1 \frac{\varkappa C_2 \sqrt{L_1 L_2}}{L_1 C_1 - L_2 C_2}$$

Man ersieht daraus, daß $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{J}_2$ unendlich groß ist, wenn

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (252)$$

ist; und aus Gl. 249 ergibt sich, daß wegen $\mathfrak{J}_2$ auch $\mathfrak{J}_1$ unendlich groß wird. Es tritt also Resonanz ein, wenn die beiden Stromkreise — jeder für sich allein betrachtet — auf gleiche Periodenzahl abgestimmt sind. Wir haben hier also eine

Resonanz zwischen beiden Stromkreisen, die von der Periodenzahl unabhängig ist, während sich die beiden früheren Resonanzfälle (Gl. 250 und 251) nur auf die Verhältnisse im sekundären bezw. primären Kreise beziehen und auf den in § 173 behandelten Fall zurückgehen. Sind die Widerstände nicht null, so ist das Resonanzmaximum natürlich nicht unendlich, sondern um so kleiner, je größer die Widerstände sind.

Die beiden letzten Gleichungen gelten aber nur unter der Voraussetzung, daß die Kupplung nahezu null ist. Andererseits haben wir oben gesehen, daß für vollständige Kupplung ($\varkappa = 1$) das Verhältnis der Spannungen lediglich durch das Übersetzungsverhältnis bestimmt wird, also keine Resonanz eintritt. Wir müssen daraus schließen, daß bei den dazwischen liegenden Werten von $\varkappa$ die Resonanz um so weniger ausgeprägt erscheint, je stärker die Kupplung zwischen den beiden Stromkreisen ist. Nach einem treffenden Ausdruck von M. Wien bekommt das System der beiden Stromkreise, von denen jeder für sich allein resonanzfähig ist, durch die Kupplung eine Scheu vor der Resonanz, die um so stärker ist, je stärker die Kupplung ist, so daß bei nahezu vollständiger Kupplung ($\varkappa = 1$) überhaupt keine Resonanz bemerkbar ist. Dagegen ist sie um so schärfer, je näher sich die Kupplung dem Werte null nähert. Aus der Schärfe der Resonanz kann aber noch nicht auf die Höhe der sekundären Spannung geschlossen werden.

So stellt z. B. die Kurve *I* in Abb. 270 eine schärfere Resonanz dar als *II*, trotz gleicher Höhe und *III* zeigt trotz kleinerer Höhe eine schärfere Resonanz als *II*. Die Höhe der sekundären Spannung ist eben nicht nur von der Resonanz abhängig, sondern auch von der Kupplung, wie Gl. 247 zeigt. Je stärker die Kupplung ist, d. h. je kleiner die Streuung ist, desto größer ist nach dem Grundgesetze jedes Transformators die im sekundären Kreis induzierte EMK. Während also mit zunehmender Kupplung die Scheu vor der Resonanz wächst, nimmt die sekundäre EMK zu, so daß die höchste sekundäre Klemmenspannung bei einem Zwischenwerte der Kupplung eintritt.

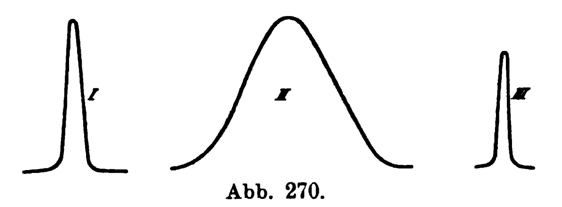


Abb. 270.

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, daß im allgemeinen in jedem Stromkreis zwei Schwingungen auftreten, selbst dann, wenn die Eigenschwingungen jedes der beiden Stromkreise dieselben wären (Gl. 240). Nur für den Fall, daß außerdem noch

die Kupplung nahezu null ist, gehen die Gl. 240 in eine über und daher kann auch nur eine Resonanz eintreten. In allen anderen Fällen, wo zwei Schwingungen in jedem Stromkreis auftreten, tritt auch an zwei verschiedenen Stellen Resonanz ein, und zwar sowohl im primären, wie im sekundären Kreis. Im primären Kreis tritt die eine Resonanz ein für $\omega^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ (Gl. 251), die andere für $\omega^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$ (Gl. 250). Im sekundären Kreis tritt die eine Resonanz ein für $\omega^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$ (Gl. 250). Während aber der Eintritt dieser Resonanzen von der Kupplung unabhängig ist, ist der Eintritt der zweiten Resonanz im sekundären Kreise von der Kupplung abhängig. Ist die Kupplung nahezu null, so tritt sie (nach Gl. 252) für $L_2 C_2 = L_1 C_1$, d. h. für $\omega = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2}$ ein. In diesem Falle gehen beide Resonanzen in eine über und treten in beiden Kreisen gleichzeitig auf.

Auf diesem wichtigen Satze beruht die Anwendung der Resonatoren oder Wellenmesser; das sind geeichte Hilfstromkreise, die man anwendet, um die Periodenzahl in einem vorhandenen Schwingungskreise festzustellen. Man bringt sie zu diesem Zwecke in sehr schwache Kupplung (Annäherung oder einpolige Verbindung) mit dem zu untersuchenden Schwingungskreis und verändert die Eigenschwingung des Wellenmessers so lange bis Resonanz eintritt. Aus der Eichung des letzteren erkennt man die vorhandene Periodenzahl (vgl. § 203).

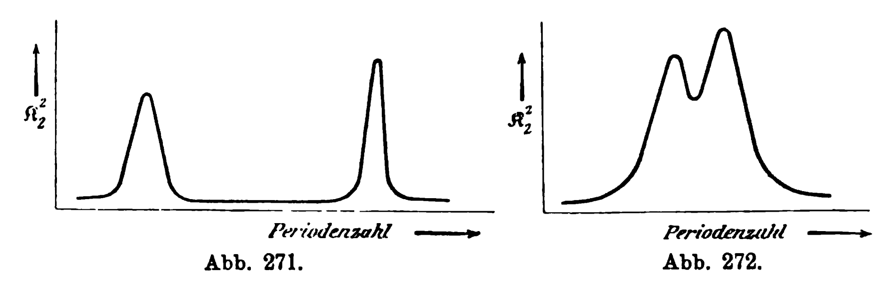


Abb. 271. Abb. 272.

Ist die Kupplung nicht sehr schwach, so treten entsprechend den beiden Schwingungen in jedem Stromkreis zwei verschiedene Resonanzstellen auf, die um so weiter auseinanderrücken, je stärker die Kupplung ist. Verändert man also die Periodenzahlen, wozu (nach Gl. 238, 239) schon die Veränderung von C_1 oder C_2 genügt, so kommt zuerst die eine, dann die andere Schwingung zur

Resonanz und man erhält für die sekundäre Spannung oder für die Stromstärken den in Abb. 271 dargestellten Verlauf. Die Höhe der Resonanz ist im allgemeinen verschieden. Je stärker die Kupplung, desto stärker die Scheu vor der Resonanz, desto unschärfer werden die Resonanzen, und desto weiter rücken sie auseinander. Je schwächer die Kupplung ist, desto schärfer werden die Resonanzen, und desto näher rücken sie zusammen, so daß sie ineinander übergehen können, wie Abb. 272 zeigt, und schließlich ganz zusammenfallen.

197. Allgemeine Betrachtung über die Schwingungen gekuppelter Systeme.

Dasselbe Ergebnis wie im Vorhergehenden, wonach bei sehr schwacher Kupplung Resonanz eintritt, wenn die im primären Stromkreis erzeugte Schwingung gleiche Frequenz hat wie die Eigenschwingung des sekundären Kreises, haben wir auch bei dem in § 182 behandelten Problem (Resonanztransformator) erhalten, wo ein Transformator in gewöhnlicher Weise an eine Wechselstromquelle angeschlossen ist, und der sekundäre Kreis Kapazität und Selbstinduktion enthält, also zu Eigenschwingungen befähigt ist. Auch dort haben wir gesehen, daß Resonanz eintritt, wenn die Frequenz der Wechselstromquelle gleich der Eigenschwingung des sekundären Kreises ist. Ein wesentlicher Unterschied aber liegt darin, daß bei jenem Falle in jedem Kreis nur eine Schwingung auftritt, während bei dem zuletzt behandelten Falle in jedem Kreis zwei Schwingungen auftreten, die nur für $\varkappa = 1$ in eine zusammenfallen (Gl. 243).

In § 191 haben wir gesehen, daß die elektrischen Schwingungen nach denselben Gesetzen vor sich gehen, wie mechanische Schwingungen. Das gilt auch für Schwingungen gekuppelter Systeme. Sehr deutlich kann man dies an folgendem Apparat zeigen (Abb. 273). Zwei Pendel I und II mit den Drehpunkten O_1 und O_2 sind durch einen Faden B_1, B_2, der durch das Gewicht G gespannt wird, miteinander verbunden. Der Faden muß im Ver-

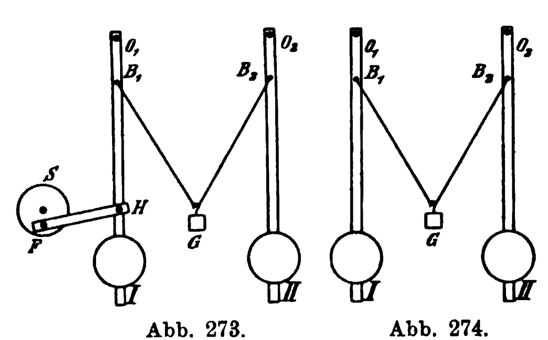


Abb. 273. Abb. 274.

hältnis zu den Ausschlägen der beiden Pendel sehr lang sein, damit er ihre Bewegung nicht hindert. Die durch das Gewicht bewirkte Spannung des Fadens stellt die Kupplung zwischen den beiden Pendeln dar. Durch Veränderung dieses Gewichtes kann die Stärke der Kupplung verändert werden. Ist kein Gewicht vorhanden, so besteht keine Kupplung ($\varkappa = 0$). Wird der Faden durch einen in den Punkten $B_1 B_2$ drehbaren Stab ersetzt, so ist die Kupplung eine vollständige ($\varkappa = 1$), die man in der Mechanik als starre Kupplung bezeichnet. Das Pendel I wird durch Drehung der Scheibe S mit Hilfe der um die Punkte F, H drehbaren Stange in periodische Bewegung versetzt. Es wird ihm also eine Schwingung aufgedrückt. Das entspricht genau dem in § 182 behandelten Fall, wo dem primären Stromkreis durch eine äußere Stromquelle ein periodischer Strom aufgedrückt wird. Die Schwingung des Pendels I wird nun wieder durch die Fadenkupplung $B_1 B_2$ dem Pendel II aufgedrückt, wodurch dieses zur Eigenschwingung angeregt wird. Aus dieser und der aufgedrückten Schwingung entsteht eine resultierende, die erzwungene Schwingung. Hat die aufgedrückte Schwingung dieselbe Periodenzahl wie die Eigenschwingung, so tritt Resonanz ein, d. h. das Pendel II macht sehr große Ausschläge. Das Pendel I hingegen kann keine größeren Ausschläge ausführen, als ihm aufgezwungen werden, da die starre Kupplung FH Eigenschwingungen verhindert.

Besteht ein kleiner Unterschied zwischen den Periodenzahlen der aufgedrückten und der Eigenschwingung des Pendels II, so führt es Schwebungen aus, welche durch Interferenz der aufgedrückten und der Eigenschwingung entstehen. Ist die Kupplung nicht sehr schwach, sondern stärker, so tritt auch Resonanz ein, aber nicht, wenn die Periodenzahl der aufgezwungenen Schwingung gleich der Eigenschwingung von II ist, sondern bei einer um so höheren Periodenzahl, je stärker die Kupplung ist (Gl. 201). Die Resonanz wird aber auch um so unschärfer. Es besteht auch da die durch die Kupplung bewirkte Scheu vor der Resonanz. Ist die Kupplung eine vollständige (starre), so gibt es keine Resonanz mehr, sondern das Pendel führt genau dieselbe Bewegung aus wie I, also die aufgedrückte Schwingung.

Für den Fall, daß die Widerstände nicht null sind, d. h. für gedämpfte Schwingungen, werden die Gleichungen (196—199) so unübersichtlich, daß man allgemeine Folgerungen daraus nicht ziehen kann. Um so leichter läßt sich der Einfluß der Dämpfung bei diesen mechanischen Schwingungen übersehen, wenn man die Pendel in einer Flüssigkeit schwingen läßt. Je zäher diese ist, desto größer ist die Dämpfung. Wenn der Bewegungswiderstand,

der dadurch der Schwingung entgegengesetzt wird, nicht so groß ist, daß die Bewegung schon nahezu aperiodisch ist (Bedingungsgleichung 222), so hat er auf die Periodenzahl (Gl. 225) wenig Einfluß. Um so stärker ist sein Einfluß auf die Amplitude der Resonanz. Diese ist um so kleiner, je größer die Dämpfung ist. Der Grund liegt darin, daß die Eigenschwingung um so kleinere Ausschläge hat und um so eher verschwindet, je größer die Dämpfung ist. Das hat weiter zur Folge, daß die Resonanz nicht erst bei vollständiger Kupplung ($\varkappa = 1$), sondern schon bei schwächerer Kupplung aufhört. Die Scheu vor der Resonanz kommt um so stärker und bei um so schwächerer Kupplung zur Geltung, je größer die Dämpfung ist.

Von diesem Fall, wo die primäre Schwingung durch eine äußere Kraft erzeugt wird, unterscheidet sich der in § 195 und 196 behandelte Fall (Tesla-Transformator) dadurch, daß die Schwingung im primären Kreise durch Entladung des Kondensators C_1 erzeugt wird, also keine von außen aufgedrückte ist. Abb. 274 zeigt das entsprechende mechanische Modell. Wird das Pendel I aus der Ruhelage gebracht, so führt es eine Schwingung aus, welche durch die Kupplung $B_1\,B_2$ dem Pendel II aufgedrückt wird. Dies gerät dadurch auch in eine Schwingung, die wiederum dem Pendel I aufgedrückt wird. Infolgedessen wird die Bewegung jedes Pendels durch zwei Schwingungen dargestellt. Diese gehen bei jedem Pendel nur dann in eine über, nämlich in die Eigenschwingung des betreffenden Pendes (Gl. 244 und 245), wenn die Kupplung nahezu null ist. In diesem Falle tritt Resonanz ein, wenn beide Pendel dieselbe Eigenschwingung haben (Gl. 250). Hingegen weichen die beiden Schwingungen, die jedes Pendel ausführt, um so mehr von den Eigenschwingungen ab, je stärker die Kupplung ist. Gleichzeitig wird die Resonanz um so unschärfer. Werden die beiden Pendel durch eine in den Punkten $B_1\,B_2$ drehbare Stange verbunden, d. h. ist die Kupplung eine vollständige ($\varkappa = 1$), so gibt es keine Resonanz, sondern beide führen dieselbe Bewegung aus. Die Periodenzahl der einen Schwingung ist dann gleich einem von beiden Eigenschwingungen bestimmten Werte (Gl. 243), die der anderen ist unendlich groß (Gl. 242), ist also praktisch nicht vorhanden. Ist eines der beiden Pendel gedämpft, so gilt auch da, daß seine Resonanz um so weniger ausgeprägt ist, je größer die Dämpfung ist. Infolgedessen verschwindet die Resonanz nicht erst bei vollständiger Kupplung, sondern bei um so schwächerer Kupplung, je größer die Dämpfung ist. Sind beide Pendel gedämpft, so wird die Resonanz noch mehr beeinträchtigt; die Scheu vor der Resonanz kommt noch mehr zur Geltung.

Ein sehr charakteristisches Beispiel dafür, wie selbst bei allerschwächster Kupplung eine scharfe Resonanz eintritt, jedoch nur bei genauer Übereinstimmung der Eigenschwingungen, bieten zwei auf gleichen Ton abgestimmte Stimmgabeln oder Saiten. Hier besteht die Kupplung nur aus der Luft, die sich zwischen ihnen befindet. Wird die eine angeschlagen, so entstehen Wellen in der Luft, die auf die andere auftreffen und diese in Schwingung versetzen. Das tritt nicht ein, wenn sie nicht ganz gleich abgestimmt sind.

In gleicher Weise verhalten sich zwei parallelgeschaltete Synchronmaschinen. Die Kupplung besteht hier aus dem Ausgleichsstrom, welcher zwischen den beiden Maschinen verkehrt. Die als „Pendeln" der Maschinen bekannte Erscheinung ist nichts anderes, als die Interferenz zwischen der aufgezwungenen und der Eigenschwingung. Zur Resonanz kommt es nicht, weil bei normal erregten Maschinen die Kupplung durch den Ausgleichsstrom und die Dämpfung zu stark ist.

198. Mittel zur Erzeugung elektrischer Schwingungen.

Die einzigen Bedingungen für das Zustandekommen elektrischer Schwingungen durch Entladung eines Kondensators bestehen darin, daß der Kondensator auf irgend eine Weise mit einer gewissen Elektrizitätsmenge $\mathfrak{Q}_0$ geladen wird, und daß für die drei Elemente des Entladungskreises die Bedingungsgleichung (222)

$$w^2 < \frac{4L}{C}$$

erfüllt ist.

Die Ladung des Kondensators geschieht am einfachsten dadurch, daß man die Platten oder Belegungen des Kondensators mit einer Stromquelle in Verbindung bringt. Dabei ist es gleichgültig, ob der Anschluß unmittelbar an den Platten liegt (Abb. 275) oder ob Selbstinduktion und Widerstand dazwischen liegt (Abb. 276), so daß die Anschlüsse zu beiden Seiten der Funkenstrecke F liegen.

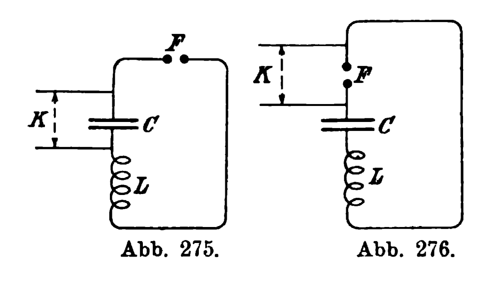


Abb. 275. Abb. 276.

Die einfachste Stromquelle für die Ladung des Kondensators ist eine Elektrisiermaschine, weil sie das einfachste Mittel zur Erzeugung von genügend hoher Spannung ist; je höher die Spannung

ist, desto höher ist die Ladung $\mathfrak{Q}_0$ des Kondensators und desto größer die Stromstärke der elektrischen Schwingung. Die Entladung des Kondensators geschieht am einfachsten durch Annäherung der Elektroden der Funkenstrecke aneinander, oder indem man die Funkenstrecke so kurz einstellt, daß die Spannung selbst überschlägt. Ist die Elektrisiermaschine fortgesetzt im Gang, so erfolgt nach der ersten Entladung gleich eine neue Ladung, die sich wieder entladet, wenn die Funkenspannung erreicht ist. Man erhält so eine Reihe aufeinanderfolgender Entladungen. Solche erhält man auch mittels Funkeninduktoren (vgl. § 199).

Gleichstrommaschinen und Batterien kommen kaum in Betracht, weil ihre verfügbaren Spannungen in der Regel zu klein sind. Dagegen kommt Wechselstrom häufig zur Anwendung, weil man diesen mittels Transformatoren auf höhere Spannung umformen kann. Abb. 277 zeigt das Schema einer solchen Anordnung. Ist $\mathfrak{K}_2$ der Scheitelwert der sekundären Spannung, mit der der Kondensator geladen wird, so muß die Funkenstrecke *F* so eingestellt werden, daß sie von ihm mit Sicherheit überschlagen wird. Dem ersten Funken folgt häufig sogleich ein dauernder Lichtbogen. Der Lichtbogen erzeugt aber keine Schwingungen; er ist i n a k t i v und muß daher vermieden werden. Er tritt nicht auf, wenn die Spannung $\mathfrak{K}_2$ beim ersten Stromübergang so weit herabsinkt, daß sie den Lichtbogen nicht aufrecht zu erhalten vermag.

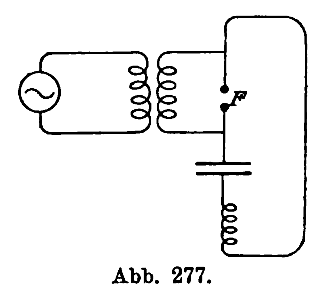


Abb. 277.

Um diesen Abfall der Spannung zu erreichen; kann man entweder den Transformator mit so viel Streuung versehen, daß sein induktiver Spannungsabfall beträchtlich ist, oder man schaltet ihm einen Widerstand oder eine Drosselspule vor, die beim Auftreten des Stromes einen ihr proportionalen Teil der Spannung abdrosselt. Ist der Lichtbogen auf diese Weise gleich nach Auftreten des Stromes wieder erloschen, so steigt die Spannung wieder auf ihren ursprünglichen, bei Leerlauf des Transformators bestehenden Wert und kann die Funkenstrecke von neuem überschlagen. Auf diese Weise erhält man rasch aufeinanderfolgende a k t i v e Funken, d. h. solche, die aus elektrischen Schwingungeu bestehen. In der Regel kann man inaktive Entladungen (Lichtbögen) und aktive Entladungen (oszillatorische Funken) schon äußerlich durch das Aussehen und das Geräusch unterscheiden. Abb. 278 zeigt eine inaktive Entladung eines Transformators bei 50000 V. Leerlaufspannung (effektiv),

Abb. 279 mehrere aktive Funken desselben Transformators bei derselben Spannung, dem aber jetzt eine Drosselspule im primären Stromkreis vorgeschaltet war. Die inaktive Entladung gibt ein zischendes, die aktive ein knatterndes oder prasselndes Geräusch.



Abb. 278. Inaktive Entladung (Lichtbogen) eines Transformators.



Abb. 279. Aktive Funkenentladung eines Transformators.

Eine noch schnellere Unterbrechung des Stromes, als sie durch den Spannungsabfall von selbst eintritt, erreicht man dadurch, daß man den Funken in ein magnetisches Feld bringt, indem man die Funkenstrecke derart zwischen zwei entgegengesetzte Pole stellt, daß die Kraftlinien senkrecht zur Funkenbahn verlaufen, so daß

man ein magnetisches Gebläse hat (§ 85). Man braucht dann dem Transformator nichts vorzuschalten und erreicht selbst bei einem Transformator von geringer Streuung aktive Funken in rascher Aufeinanderfolge.

Manchmal folgen die Funkenentladungen so rasch aufeinander, daß sie dem Auge als Lichtbogen erscheinen. Nur durch das knatternde Geräusch oder durch eine photographische Aufnahme erkennt man, daß es sich um rasch aufeinanderfolgende Funken handelt. Abb. 279a zeigt eine solche Aufnahme.[1]) Es sind die

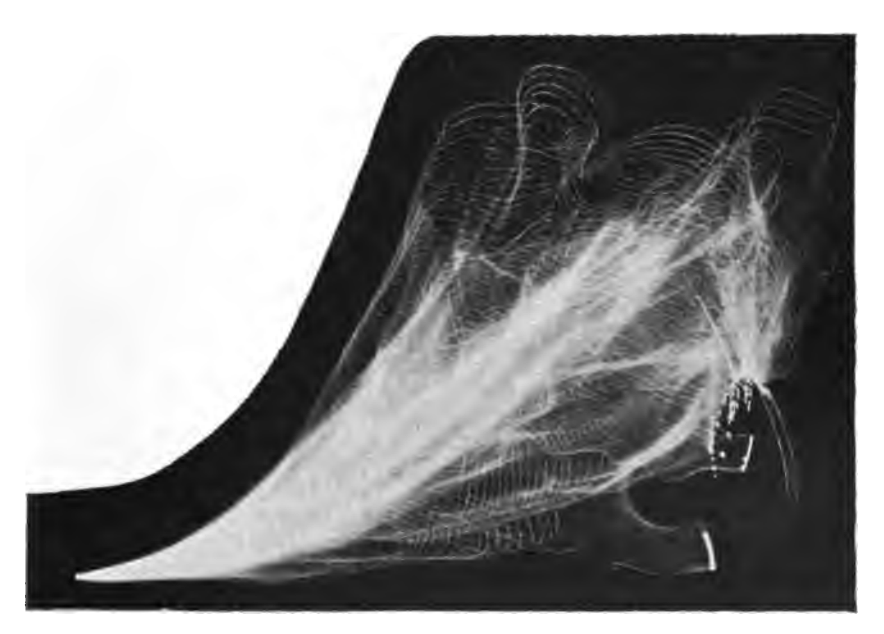


Abb. 279a. Funkenentladung eines Induktors mit elektrolytischem Unterbrecher.

Funken eines Induktors zwischen einer Spitze und einer Platte. Die primäre Unterbrechung erfolgte durch einen elektrolytischen Unterbrecher (vgl. folgenden Paragraphen). Infolge der Raschheit der aufeinanderfolgenden Funken (Dauer der Aufnahme 1 Sekunde), verlaufen sie in nahezu parallelen Bahnen, deren Endpunkte auf der Platte (rechts) wandern.

Zur Erzeugung sehr kräftiger elektrischer Schwingungen, wie sie zur Funkentelegraphie auf große Entfernung erforderlich sind, eignet sich besonders der in § 182 behandelte Resonanztransformator.

[1]) Nach J. F. Koch, ETZ 1906, S. 707.

Wir haben dort gesehen, daß ein Resonanzmaximum der sekundären Spannung eintritt, wenn die Periodenzahl des primären Stromes der Bedingung

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL_2(1-\varkappa^2)}}$$

entspricht. Wird also die Periodenzahl des dem Transformator zugeführten Wechselstromes auf diesen Wert eingestellt, so steigt die sekundäre Spannung plötzlich auf einen hohen Resonanzwert, mit dem der Kondensator geladen wird. Ist die Funkenstrecke F (Abb. 280) so eingestellt, daß sie von der gewöhnlichen Spannung nicht überschlagen wird, sondern erst von der Resonanzspannung, so wird der Kondensator mit der dieser hohen Spannung entsprechenden großen Ladung entladen. Sowie aber der Strom übergeht, verändert sich sofort die magnetische Kupplung $\varkappa$ des Transformators, weil die Streuung mit der Stromstärke zunimmt. Aus demselben Grunde verändert sich auch die Selbstinduktion L_2. Die Resonanzbedingung ist nun nicht mehr erfüllt und die Spannung fällt plötzlich auf ihren gewöhnlichen Wert herab, so daß der Funken bei F ebenso plötzlich abreißt. Damit ist auch der Strom wieder null geworden, die Kupplung und die Selbstinduktion erhalten wieder ihren ursprünglichen Wert, die Spannung steigt auf ihren Resonanzwert und überschlägt wieder die Funkenstrecke. Der Abfall des Resonanzwertes geht so rasch vor sich, daß ein magnetisches Gebläse bei der Funkenstrecke überflüssig ist.

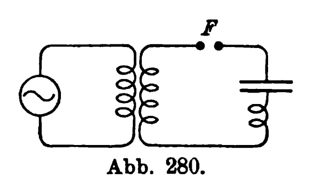


Abb. 280.

Über den Lichtbogen als Schwingungserzeuger vgl. § 243.

199. Funkeninduktoren und ihre Unterbrecher.

Einer der ältesten und seit seiner Erfindung nur wenig veränderten Apparate ist der Funkeninduktor von Rhumkorff. Er besteht aus einer an eine Gleichstromquelle angeschlossenen primären Wickelung (Abb. 281) und einer in der Funkenstrecke F endigenden sekundären Wickelung. Im primären Stromkreis liegt noch ein Unterbrecher U. Wird der Stromkreis durch diesen geschlossen, so entsteht ein Strom nach den in § 183 behandelten Gesetzen, der von null bis zu dem von Spannung und Widerstand

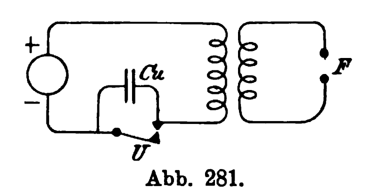


Abb. 281.

bestimmten Wert ansteigt. Dadurch wird in der sekundären Wickelung eine EMK induziert, welche bei offenem Kreis gleich $M\frac{di_1}{dt}$, bei geschlossenem Kreis gleich $M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$ ist. Diese EMK dauert natürlich nur so lange, als die Änderung des primären Stromes dauert. Hat dieser seinen endgültigen Wert erreicht, so ist die sekundäre EMK null. Wird nun der primäre Stromkreis durch den Unterbrecher U geöffnet, so wird nach demselben Gesetz wieder eine EMK in der sekundären Wickelung induziert. Der Abfall des primären Stromes beim Öffnen erfolgt aber rascher als der Anstieg beim Schließen, weil beim Öffnen noch ein rasch wachsender Widerstand w' in den Stromkreis eingeschaltet wird, wie dies in § 186 näher erläutert wurde. Infolgedessen ist die sekundäre EMK nach obigem Gesetz beim Öffnen größer als beim Schließen. Abb. 282 zeigt den Verlauf des primären Stromes und der sekundären EMK beim aufeinanderfolgenden Schließen und Öffnen des Stromes. Man sieht, daß die EMK beim Öffnen größer ist als beim Schließen.

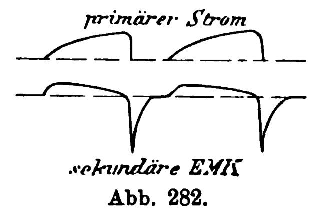


Abb. 282.

Der Abfall des Stromes beim Unterbrechen kann noch mehr beschleunigt werden, wenn man den Funken möglichst verkürzt, indem man parallel zum Unterbrecher einen Kondensator C_u (Abb. 281) von großer Kapazität schaltet. Dieser nimmt einen großen Teil der Elektrizitätsmenge auf, welche an den Kontakten des Unterbrechers auftritt und den Funken erzeugt. Die Elektrizität hat hier ein Reservoir, in das sie abströmen kann, und braucht sich nicht des Weges über die Funkenstrecke zu bedienen. Der Strom fällt infolgedessen rascher auf null. Um die günstigste Wirkung zu erzielen, muß der Kondensator in einem gewissen Verhältnis zur Stromstärke stehen. Die Verkleinerung des Funkens hat auch eine Verkleinerung seiner Wärme zur Folge, so daß die Kontakte weniger abgenutzt werden. Auch in anderen Fällen wird dieses Mittel häufig angewandt zur Verkleinerung von Öffnungsfunken.

Die Einschaltung des Kondensators in den primären Stromkreis während des Öffnens hat noch eine weitere Folge. Der Öffnungsfunken ist jetzt oszillatorisch (nach § 189), wie Abb. 283 nach einer photographischen Aufnahme mit der Braunschen Röhre (§ 280) zeigt. Bei Abwesenheit des Kondensators hingegen erfolgt

die Abnahme des Stromes aperiodisch (nach § 189), wie Abb. 284 [1]) zeigt. Man sieht, daß im ersten Falle der Abfall des Stromes rascher er-

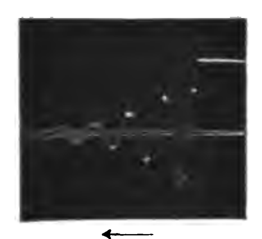


Abb. 283. Öffnungsstrom eines Funkeninduktors mit Kondensator.



Abb. 284. Öffnungsstrom eines Funkeninduktors ohne Kondensator.

folgt als im zweiten und bis unter die Nullinie reicht. Die Änderung des Stromes $\frac{di_1}{dt}$ und daher die EMK ist also größer als bei Abwesenheit eines Kondensators. Die sekundäre EMK nimmt aber nun auch denselben Verlauf. Bei geeigneter Einstellung der sekundären Funkenstrecke gehen also hier mehrere Teilfunken über. Dient die sekundäre EMK zum Laden eines Kondensators C_2 in einem Stromkreis mit Selbstinduktion (Abb. 285), so ruft jeder Teilfunken eine sekundäre oszillatorische Entladung über die sekundäre Funkenstrecke F_2 hervor, wenn diese entsprechend eingestellt ist.

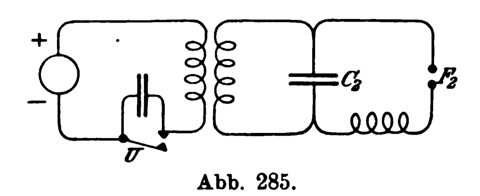


Abb. 285.

Die sekundäre EMK hängt aber nicht nur von $\frac{di_1}{dt}$, sondern auch von der gegenseitigen Induktion M ab. Diese ist um so größer, je größer die magnetische Kupplung zwischen den beiden Wickelungen ist, d. h. je kleiner die Streuung ist. Dafür gelten dieselben Gesetze wie für einen Transformator (§ 153). Der Eisenkern muß unterteilt sein, nicht nur wegen der Verluste durch Wirbelströme, sondern auch deshalb, weil bei einem massiven Eisenkern die Stromstärke beim Unterbrechen nicht rasch genug abfallen würde (§ 188). Um die Wirbelströme noch mehr zu vermindern, und weil es bei einem Funkeninduktor nicht auf die Größe des Magnetisierungsstromes ankommt wie bei einem Transformator, verwendet man vorzugsweise offene Eisenkerne.

---

[1]) Abb. 283 und 284 aus Zenneck: „Elektromagn. Schwingungen und drahtlose Telegraphie". Stuttgart 1905.

Aus der Rolle, welche der Abfall des primären Stromes beim Öffnen spielt, erklärt sich die Wichtigkeit des Unterbrechers. Es sind folgende Arten hauptsächlich in Gebrauch:

1. Hammer-Unterbrecher. Der Kontakt wird durch elektromagnetische Anziehung eines Ankers (Hammers) geöffnet und nach dem Verschwinden des Stromes durch eine Feder wieder geschlossen. Abb. 286a[1]) zeigt den Verlauf des primären Stromes bei einem



Abb. 286a. Primärer Strom eines Funkeninduktors bei Hammerunterbrecher.



Abb. 286b. Primärer Strom eines Funkeninduktors bei elektrolytischem Unterbrecher.

solchem Unterbrecher mit parallel geschaltetem Kondensator. Daher treten bei jeder Unterbrechung Schwingungen auf wie in Abb. 283. An einer Stelle sieht man, daß der Unterbrecher schlecht gearbeitet und den Strom nicht geöffnet hat. Abb. 287a zeigt den Verlauf des sekundären Stromes über eine kurze Funkenstrecke.[2])

2. Turbinen-Unterbrecher (Boas). Ein durch Zentrifugalkraft aus einer Düse austretender Quecksilberstrahl trifft bei seiner Drehung abwechselnd auf die Zähne und Zwischenräume eines mit breiten Zähnen versehenen feststehenden Ringes. Wenn der Strahl auf einen Zahn auftrifft, ist der Stromkreis geschlossen, wenn er durch einen Zwischenraum geht, ist er geöffnet. Die Unterbrechung erfolgt rascher als beim Hammerunterbrecher, und die Anzahl der Unterbrechungen kann viel höher gesteigert werden. Abb. 287b zeigt den Verlauf des sekundären Stromes[2]) bei diesem Unterbrecher.

3. Elektrolytische Unterbrecher (Wehnelt). In ein Gefäß mit verdünnter Schwefelsäure taucht eine Bleiplatte (Abb. 288) und

---

[1]) Wehnelt und Donath, Annal. d. Phys. 69, 1899. Die Schwingungen sind hier infolge ihrer großen Geschwindigkeit nur schwach sichtbar.

[2]) Nach Aufnahmen von E. Ruhmer mittels des Glimmlicht-Oszillographen (§ 280). Die äußeren Konturen der Lichtflächen stellen den Verlauf des Stromes dar. Die oberen, höheren entsprechen immer dem Öffnen, die unteren dem Schließen des primären Stromes.

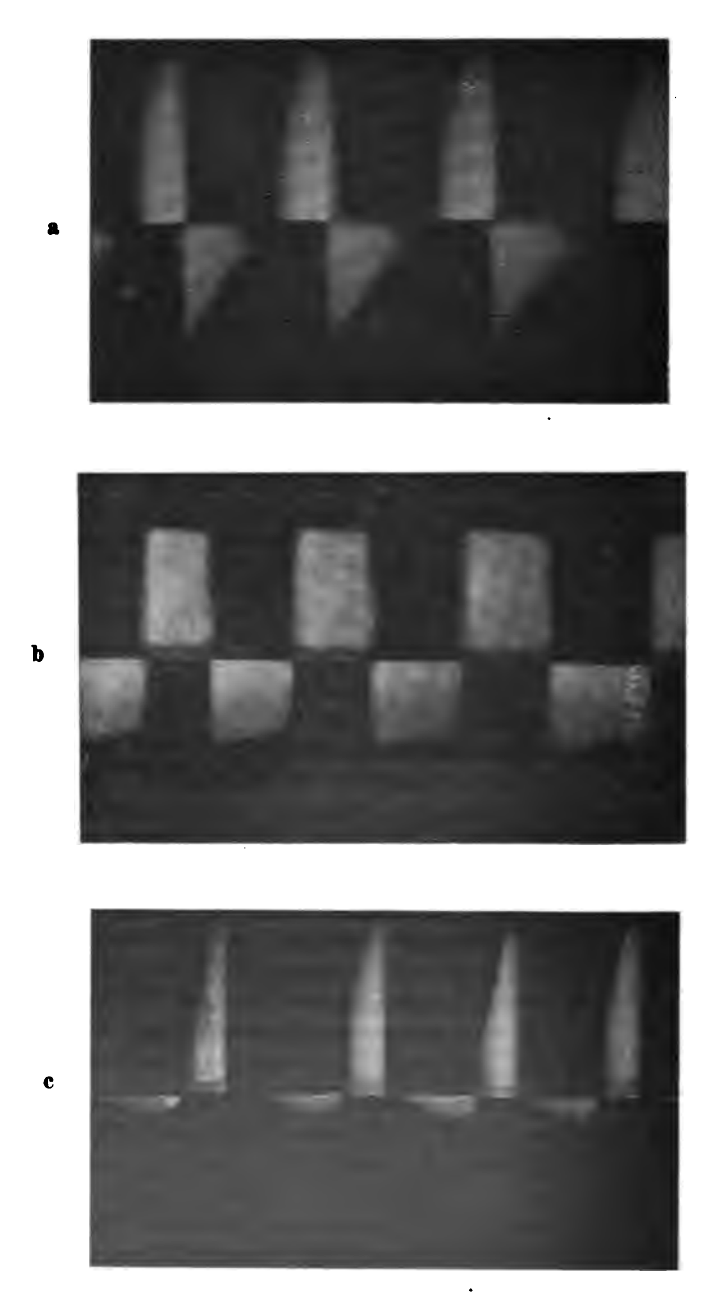


Abb. 287. Sekundärer Strom eines Funkeninduktors: a) bei **Hammerunterbrecher**, b) bei Turbinenunterbrecher, c) bei elektrolytischem **Unterbrecher.**

eine Platinspitze. Die Stromzuführung zu letzterer geht durch eine isolierende Röhre, so daß der Strom nur aus der Spitze austreten kann. Infolgedessen ist der Querschnitt der Flüssigkeit, durch den der Strom eintreten muß, sehr klein und es wird hier eine so große Wärme entwickelt, daß Verdampfung und Zerlegung in Wasserstoff und Sauerstoff (Knallgas) eintritt. Dadurch wird der Widerstand noch größer, so daß explosivartige Verbrennung des Knallgases eintritt und dadurch die Flüssigkeit von der Platinspitze wegschleudert und der Strom unterbrochen wird. Durch die nachdrängende Flüssigkeit wird der Strom wieder geschlossen. Da die Unterbrechung also nur auf Wärmewirkung beruht, müßte es gleichgültig sein, ob die Spitze positive oder negative Elektrode ist. Die Erfahrung lehrt aber, daß dieser Unterbrecher nicht gut arbeitet, wenn die Spitze negative Elektrode ist. Wahrscheinlich liegt das daran, daß der hier elektrolytisch ausgeschiedene Wasserstoff von der Flüssigkeit sofort absorbiert wird, während der Sauerstoff, der elektrolytisch ausgeschieden wird, wenn die Spitze positive Elektrode ist, nicht so rasch absorbiert wird. Bei diesem Unterbrecher geschieht das Öffnen so plötzlich, und das Öffnen und Schließen folgt so rasch aufeinander, daß ein parallel zu ihm geschalteter Kondensator keine Verbesserung mehr bringt. Abb. 286b[1]) zeigt den Verlauf des primären Stromes, Abb. 287c den des sekundären Stromes bei diesem Unterbrecher.



Abb. 288. Elektrolytischer Unterbrecher.

200. Elektrische Strom- und Spannungskupplung.

In §§ 182 und 195 wurden elektrische Schwingungen behandelt, deren Stromkreise durch die Kraftlinien des gemeinsamen magnetischen Feldes miteinander gekuppelt sind. Die Kupplung kann aber auch durch den Strom erfolgen. Abb. 289 zeigt die elektrische Stromkupplung eines Schwingungskreises CL mit einem Leiterstück AB, durch das von einer äußeren Stromquelle ein periodischer Strom geschickt wird. Dieser Fall entspricht dem in § 182, weil auch hier die primäre Schwingung eine erzwungene ist. Ein Teil

---

[1]) Wehnelt und Donath, l. c.

des Stromes kann über LC fließen und erregt dadurch die Eigenschwingung des geschlossenen Kreises $LCAB$. Die Kupplung ist um so stärker, je größer die Spannung zwischen den Verzweigungspunkten AB ist, weil dann um so mehr Strom über LC fließt.

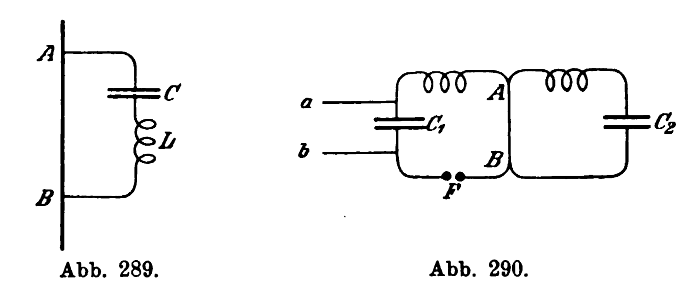


Abb. 289. Abb. 290.

Abb. 290 zeigt die Stromkupplung zweier Stromkreise, die beide zu Eigenschwingungen befähigt sind. Sie entspricht dem in § 195 behandelten Fall. Die Kupplung ist um so stärker, je größer der Widerstand des gemeinsamen Leiterstückes zwischen den Punkten AB ist gegenüber den scheinbaren Widerständen der übrigen Teile. Der Kondensator C_1 wird durch die Drähte ab geladen, bis ein Überschlag über die Funkenstrecke F eintritt. Dieser Fall entspricht dem, daß eine Stimmgabel auf einen Resonanzkasten befestigt ist, die durch Anschlagen zum Schwingen gebracht wird. Der Resonanzkasten entspricht dem sekundären Schwingungskreis.

Auch durch die elektrische Spannung kann eine Kupplung stattfinden. Dazu ist nichts weiter erforderlich, als daß der Schwingungskreis LC (Abb. 291) in einem Punkte A an eine periodisch veränderliche Spannung (Potential gegen die Umgebung) angeschlossen ist; z. B. an einen Pol eines Funkeninduktors oder Transformators, oder an eine Platte eines Kondensators, der oszillatorisch entladen wird. Die elektrische Spannungskupplung

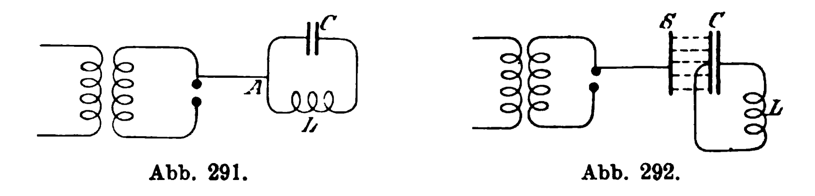


Abb. 291. Abb. 292.

kann aber auch ohne direkte Verbindung durch die elektrischen Kraftlinien erfolgen. Abb. 292 zeigt eine solche Anordnung. An einen Pol eines Funkeninduktors oder dgl. ist eine Platte S angeschlossen, welcher eine Platte des Kondensators C des Schwin-

gungskreises LC gegenübersteht. Durch die Kraftlinien (gestrichelte Linien) welche von der Platte S ausgehen und auf C enden, werden im Kondensator C periodische Ladungen induziert.

Bei allen schwingungsfähigen Stromkreisen, wie sie in §§ 182 und 195 und hier vorkommen, ist es nicht notwendig, daß die Kapazität in Form von Kondensatoren (Leydener Flaschen) und die Selbstinduktion in Form von Spulen vorhanden ist. Für sehr hohe Periodenzahlen hat schon jeder Leiter eine merkliche Kapazität und Selbstinduktion, die aber nicht an bestimmten Stellen des Stromkreises wie Kondensatoren und Spulen konzentriert sind, sondern über den ganzen Leiter verteilt sind. Ein solcher Schwingungskreis hat aber nicht nur eine einzige, sondern mehrere Eigenschwingungen, von denen jede ein Vielfaches der niedrigsten Periodenzahl ist, ebenso wie ein gleichmäßig mit Masse versehener Stab mehrere Eigenschwingungen hat, während einer, bei dem die Masse zum größten Teil am Ende konzentriert ist, nur eine einzige hat.

201. Stehende elektrische Wellen.

Ein Wechselstrom, der in einem Leiter fließt, ist eine fortschreitende elektrische Schwingung oder fortschreitende elektrische Welle. Sie entspricht einer Flüssigkeitswelle, die sich fortbewegt, oder der fortschreitenden Welle eines Seiles mit losem Ende, dessen Anfang in periodische Bewegung versetzt wird. Trifft eine fortschreitende Welle auf eine Stelle, welche diese Bewegung nicht mitzumachen vermag, so kehrt die Bewegung gewissermaßen um (wird reflektiert), und es entsteht eine stehende Welle. Das tritt ein, wenn Flüssigkeitswellen auf eine feste Wand auftreffen (Flüssigkeit in einem Gefäß, die durch Erschütterungen in Schwingungen versetzt wird) oder bei dem erwähnten Seile, wenn sein Ende fest gemacht wird. Stehende Wellen bilden sich ferner auf Saiten, die an beiden Enden befestigt sind (Abb. 293), oder bei Pfeifen, die an einem Ende geschlossen sind. Der Unterschied gegenüber fortschreitenden Wellen besteht darin, daß bei diesen alle Punkte nacheinander dieselbe Bewegung ausführen, während es bei den stehenden Wellen bestimmte Punkte K (Abb. 293) gibt, die in Ruhe bleiben, während die in der Mitte dazwischen liegenden B, die größte Ausweichung aus der Ruhelage ausführen. Die ersteren heißen Knoten, die letzteren Bäuche. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Knoten oder Bäuche ist eine halbe

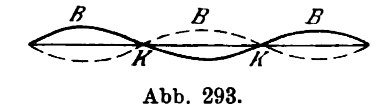
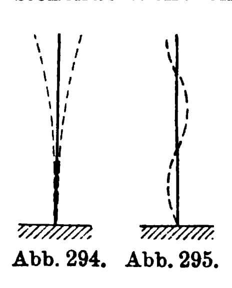


Abb. 293.

Wellenlänge $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. Der Abstand zwischen einem Knoten und dem nächsten Bauch ist eine Viertelwellenlänge $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$. Die einfachste stehende Welle bildete ein Stab, der an einem Ende festgeklemmt ist (Abb. 294), und dessen anderes Ende aus der Ruhelage gebracht wird. Das gibt gerade eine Viertelwellenlänge. Ist der Stab gleichmäßig stark (Masse gleichmäßig verteilt), so kann er auch in Wellen von kürzerer Wellenlänge schwingen, wie Abb. 295 zeigt, wenn er genügend rasche Stöße erhält. Immer aber ist das feste Ende ein Knoten, das freie Ende ein Bauch, so daß nur solche Wellen möglich sind, wo die Länge des Stabes gleich $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4} \ldots$ Wellenlängen ist. Die größte Welle $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$ bezeichnet man als Grundschwingung, die anderen als Oberschwingungen. Ist aber der größte Teil der Masse am Ende konzentriert, so hat der Stab nur eine einzige Eigenschwingung, die Grundschwingung.


Abb. 294. Abb. 295.

Wie schon erwähnt, bilden sich stehende Wellen dann aus, wenn die fortschreitende Wellenbewegung an einer Stelle ein Hindernis findet, über das hinaus sich die Bewegung nicht fortsetzen kann. Daher bilden sich **stehende elektrische Wellen**, wenn man an die Elektroden einer Funkenstrecke zwei lineare Leiter (Abb. 296) anschließt, deren Enden isoliert sind, und sie nun mit Hilfe einer geeigneten Stromquelle (Elektrisiermaschine, Funkeninduktor u. dgl.) ladet, bis an der Funkenstrecke ein Überschlag stattfindet. Die Entladung erfolgt oszillatorisch, indem die Ladung zwischen den beiden Hälften über die Funkenstrecke hin und her schwingt. Daher ist die Bewegung der Elektrizität, d. h. die Stromstärke hier am stärksten, an den Enden aber null. An der Funkenstrecke besteht also ein Bauch, an den Enden je ein Knoten der **Stromschwingung**. Während des Stromüberganges ist die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden null, zwischen den Enden aber am größten. An der Funkenstrecke besteht also ein Knoten, an den Enden zwei entgegengesetzte Bäuche der Span-

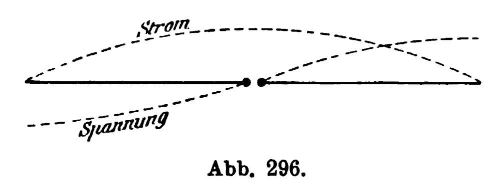


Abb. 296.

nungswelle. Die Wellenlänge der Eigenschwingung eines solchen Leiters mit gleichmäßig verteilter Kapazität und Selbstinduktion ist also wie bei einem schwingenden Stab (Abb. 294) gleich der vierfachen Länge eines der beiden Leiter. Außerdem können wie bei einem Stab Oberschwingungen von höherer Ordnung stattfinden, wie Abb. 297 eine zeigt.

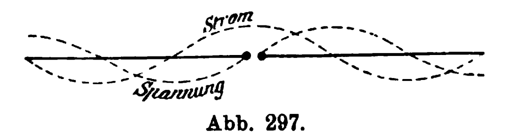


Abb. 297.

Nach einem Grundgesetz der Wellenlehre, das man ohne weiteres einsieht, ist der Weg, um den eine Wellenbewegung in einer Sekunde vorwärts schreitet, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einer Welle gleich dem Produkte aus einer ganzen Wellenlänge λ und der Anzahl der ganzen Schwingungen ν in einer Sekunde (Periodenzahl). Also

$$v = \nu \lambda.$$

Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elektrischen Welle gleich $3 \cdot 10^{10}$ cm (Lichtgeschwindigkeit) ist, so folgt daraus, daß bei einem Wechselstrom von 50 Perioden eine Wellenlänge gleich $\frac{3 \cdot 10^{10}}{50} = 6 \cdot 10^{8} = 6000$ km ist. Um also eine Viertelwelle auf einem Draht zu erhalten, müßte er 1500 km lang sein. Hat man hingegen eine Periodenzahl gleich 10^{8}, so ist eine Wellenlänge gleich $\frac{3 \cdot 10^{10}}{10^{8}} = 300$ cm. Eine Viertelwelle demnach gleich 75 cm. Mit so raschen Schwingungen kann man also in einem Versuchsraum mehrere Wellenlängen auf einem ausgespannten Draht erhalten.

Will man bloß die Grundschwingung erhalten, so muß man an einem Ende des Drahtes einen Kondensator anbringen, dessen

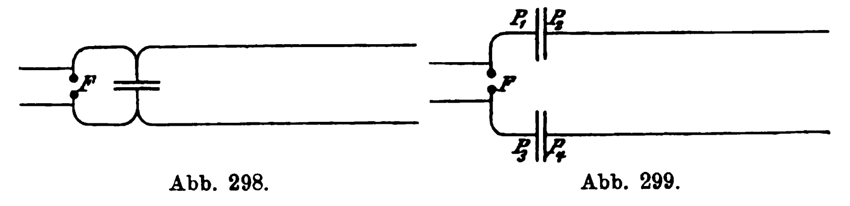


Abb. 298. Abb. 299.

Kapazität erheblich größer ist, als die des Drahtes. Die Erregung der Schwingung geschieht durch direkte Spannungskupplung (Abb. 298) oder durch elektrische Kraftlinienkupplung (Abb. 299). Bei ersterer ist bloß ein Kondensator enthalten, durch dessen Entladung über die Funkenstrecke F die Schwingung erzeugt wird. Die beiden Drähte sind an die Kondensatorplatten direkt an-

geschlossen. Bei Abb. 299 besteht die Kapazität des Schwingungskreises nur aus den beiden Platten P_1 und P_3. Diesen stehen die Platten P_2 und P_4 gegenüber, welche durch die elektrischen Kraftlinien mit den ersteren elektrisch gekuppelt sind (Lechersche Anordnung). Man kann aber die Plattenpaare P_1, P_2 und P_3, P_4 auch als zwei in einen Schwingungskreis wie Abb. 296 hintereinander geschaltete Kondensatoren auffassen.

202. Elektromagnetische Wellen im Dielektrikum.

Bei jeder Bewegung der Elektrizität in einem Stromleiter entstehen magnetische Kraftlinien (§ 76) und elektrische Kraftlinien (§ 116). Die magnetischen Kraftlinien eines veränderlichen Stromes haben aber auch elektrische Verschiebungsströme im Dielektrikum zur Folge und die elektrischen Kraftlinien erzeugen andererseits magnetische Kraftlinien (§ 180). Elektrische Schwingungen in irgend welchen Leitern erzeugen also ein ziemlich kompliziertes magnetisches und elektrisches Feld, das man in seiner Gesamtheit als elektromagnetisches Feld bezeichnet und das sich mit derselben Periodizität ändert wie die Schwingung, von der es erzeugt wird. Hertz hat den Beweis erbracht, daß dieses Feld nicht in jedem Augenblick und nicht an jedem Punkte denselben Schwingungszustand hat, sondern daß es sich als fortschreitende Welle mit einer gewissen, der Lichtgeschwindigkeit gleichkommenden Geschwindigkeit fortpflanzt, wenn es nicht durch eine leitende Fläche aufgehalten wird. An einer solchen wird die elektromagnetische Welle reflektiert, und es bilden sich stehende Wellen aus.

Die elektromagnetischen Wellen sind polarisiert, wie die Lichtwellen, d. h. es sind transversale Wellen, während die Stromwellen in einem Leiter longitudinale Wellen sind. Die elektromagnetischen Wellen werden auch beim Übergang von einem Dielektrikum zu einem anderen gebrochen wie Lichtwellen. Beim senkrechten Auftreffen auf eine Grenzfläche eines anderen Dielektrikums gehen sie zum Teil durch, zum Teil werden sie reflektiert, wie Lichtwellen beim Auftreffen auf einen durchsichtigen Körper.

203. Wellenanzeiger und Wellenmesser.

Jeder sekundäre Stromkreis, in dem eine periodische EMK induziert wird, ist ein Anzeiger dafür, daß ein periodisch veränderliches Feld vorhanden ist. Das Vorhandensein einer sekundären EMK oder eines sekundären Stromes kann durch verschiedene Meßinstrumente nachgewiesen werden. Außerdem gibt es Erscheinungen, die un-

mittelbar das Vorhandensein einer elektromagnetischen Welle und daher auch einer Schwingung in einem Leiter, von dem sie ausgeht, anzeigen.

Der wichtigste Wellenanzeiger ist der Fritter oder Kohärer. In einem Glasröhrchen (Abb. 300) befinden sich zwischen zwei Metallelektroden kleine Metallkörner (Feilicht). Werden die Elektroden in den Stromkreis einer Batterie und eines Galvanometer eingeschaltet, so geht kein Strom hindurch, weil die vielen lockeren Berührungsstellen zwischen den Metallkörnern einen unendlich großen Widerstand darstellen. Sowie aber elektromagnetische Wellen auf den Fritter auftreffen, sinkt der Widerstand so bedeutend herab, daß das Galvanometer einen deutlichen Strom anzeigt. Hören die elektromagnetischen Wellen wieder auf, so bleibt der Strom bestehen. Erschüttert man aber den Fritter durch einen leisen Schlag, so hört der Strom auf, weil der Widerstand des Fritters wieder unendlich groß wird. Man nimmt an, daß durch elektromagnetische Wellen ein Zusammenbacken der Metallkörner an den Berührungsstellen stattfindet (daher der Name), während sie durch eine Erschütterung wieder auseinander gerissen werden. Eine befriedigendere Erklärung gibt es noch nicht.

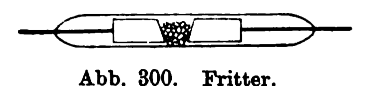


Abb. 300. Fritter.

Fast ebenso empfindlich ist der elektrolytische Wellenanzeiger.[1]) Zwei Platindrähte, die mit einer Batterie und einem Galvanometer G verbunden sind (Abb. 301), tauchen in verdünnte Schwefelsäure. Ist die EMK der Batterie gerade etwas größer als die Polarisation zwischen Platin und verdünnter Schwefelsäure, so geht ein schwacher Strom hindurch. Treffen elektromagnetische Wellen auf diese Zelle auf, so wird der Strom bedeutend stärker, geht aber von selbst wieder auf seinen früheren Wert zurück, wenn die Wellen aufhören. Die Empfindlichkeit ist um so größer, je kleiner die Berührungsstelle der positiven Elektrode und der Flüssigkeit ist. Man verwendet daher für diese Elektroden einen Draht kleinsten Querschnittes, der bis zur Spitze in eine Glasröhre eingeschlossen ist.

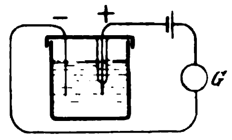


Abb. 301. Elektrolytischer Wellenanzeiger.

Grobe, aber sehr deutliche Wellenanzeiger sind Geißlersche oder Hittorffer Röhren (§ 216), und zwar auch solche ohne Elektroden. Sie leuchten auf, wenn zwischen ihren Enden eine Spannung (Potentialdifferenz) besteht. Sie müssen also, um wirken zu

[1]) Schlömilch, ETZ 1903, S. 959.

können, so in das Feld der elektromagnetischen Welle gebracht werden, daß sie parallel zu den elektrischen Kraftlinien liegen.[1])

Vorrichtungen, welche nicht nur das Vorhandensein elektrischer Wellen nachweisen, sondern auch ihre Periodenzahl zu erkennen gestatten, bezeichnet man als Wellenmesser, oder da sie alle auf Resonanz beruhen, als Resonatoren. Dagegen bezeichnet man die Vorrichtungen, von welchen die Wellen ausgehen, als Oszillatoren.

Die ersten derartigen Apparate sind von Hertz angewendet worden. Der einfachste besteht aus einem kreisförmig oder viereckig zusammengebogenen Draht (Abb. 302), dessen Enden eine Funkenstrecke bilden. Die eine Elektrode sitzt gewöhnlich an einer Stellschraube, um eine empfindliche Einstellung zu ermöglichen. Entsteht darin eine stehende Welle, deren Spannungsknoten in der Mitte des Drahtes bei *M* liegt und deren Bäuche an den Enden liegen, so springen in der Funkenstrecke kleine Funken über, weil die beiden Schwingungsbäuche an den Enden entgegengesetztes Vorzeichen haben. Es ist also nichts anderes als die in Abb. 296 dargestellte Drahtanordnung zusammengebogen, wobei die Schwingungen nicht durch Entladung einer Funkenstrecke, sondern durch Resonanz erzeugt werden, wenn sie sich in einem Raum befindet, der von elektromagnetischen Schwingungen durchzogen wird, oder durch elektrische Kupplung mit einem Schwingungserzeuger gekuppelt ist. Die Resonanz tritt ein, wenn die elektromagnetischen Wellen bzw. ihr Erzeuger eine solche Periodenzahl hat, daß eine halbe Welle gleich der Länge dieses Resonators ist, denn das ist seine Eigenschwingung. Nach § 201 können zwar auch kürzere Wellen (höhere Periodenzahl) in einem solchen Draht als Eigenschwingung auftreten. Sie sind aber so viel schwächer als die Grundwelle, daß Fünkchen nur von dieser erzeugt werden. Die Kupplung dieses Resonators mit dem Oszillator kann magnetisch oder elektrisch sein. Im ersteren Falle muß er so stehen, daß seine Fläche von den magnetischen Kraftlinien des elektromagnetischen Feldes getroffen wird. Im zweiten Fall muß eine leitende Verbindung des Oszillators mit einer Stelle des Resonators hergestellt werden wie in Abb. 291. Das darf aber nicht bei *M* geschehen, denn hier ist der Knoten der Spannungswelle, sondern bei *A* oder *B*. Die Kupplung ist um so stärker, je näher die Verbindung einem Spannungsbauch liegt.

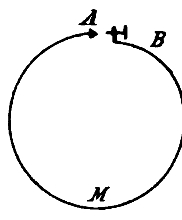


Abb. 302. Hertzscher Resonator.

[1]) Über andere Wellenanzeiger (Bolometer, Thermoelement, magnetischer Wellenanzeiger von Marconi) vgl. Zenneck „Elektromagn. Schwingungen und drahtlose Telegraphie“.

Eine stehende Welle besteht natürlich nur, wenn kein Funken übergeht. Sowie ein solcher auftritt, ist die Welle eine fortschreitende, denn der Funken ist ein Leiter, durch den der offene Stromkreis des Resonators zu einem geschlossenen wird.

Zu einer elektrischen Kupplung durch die elektrischen Kraftlinien müssen Resonator und Oszillator (wenigstens zum Teil) parallel liegen (Abb. 303). Diese Anordnung ist also ganz symmetrisch. Die Welle im Oszillator und im Resonator ist wie in Abb. 296 oder 297. Wenn im Oszillator ein Funken bei F_2 überschlägt, geht im Resonator ein Funken bei F_1 über.

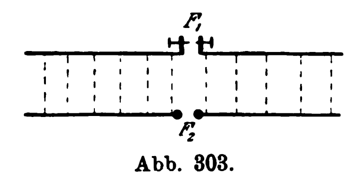


Abb. 303.

Um möglichst ausgeprägte Resonanz und nur die Grundschwingung zu erhalten, verwendet man statt der Resonatoren mit verteilter Kapazität und Selbstinduktion, wie die eben besprochenen, solche mit an einer Stelle konzentrierten Kapazität (Kondensator) wie in Abb. 291 und 292. Als Anzeiger des Eintrittes der Resonanz kann entweder ein Elektrometer an die Kondensatorklemmen angelegt werden, denn die Kontensatorspannung steigt in gleicher Weise an wie der Strom, oder es wird die Wärmewirkung des Stromes

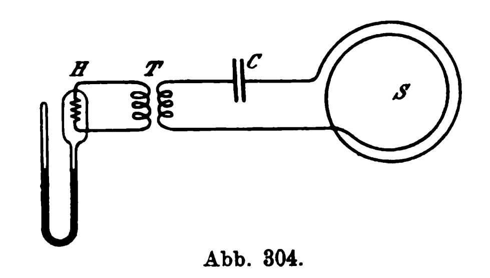


Abb. 304.

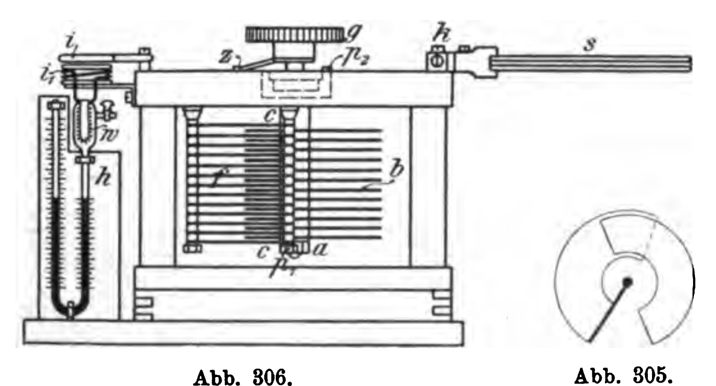


Abb. 306. Abb. 305.

benutzt, wie bei dem Wellenmesser der „Gesellschaft für drahtlose Telegraphie“[1]), wo ein Widerstandsdraht in die Kugel H

[1]) Dönitz, ETZ 1903, S. 920.

(Abb. 304) eines Luftthermometers eingeschlossen ist. Dieser Draht ist aber, um durch seinen Widerstand nicht die Resonanz unscharf zu machen, nicht in den Resonanzkreis selbst eingeschaltet, sondern unter Zwischenschaltung eines Transformators *T*. Die Kupplung mit dem Felde des Schwingungserzeugers geschieht in der aus ein oder mehreren Drahtwindungen bestehenden Schleife *S*. Tritt Resonanz ein, so erwärmt der Widerstandsdraht die Luft im Luftthermometer und die Flüssigkeit in der **U**-Röhre steigt. Um die Resonanz für verschiedene Periodenzahlen einstellen zu können, ist der Kondensator *C* und damit die Eigenschwingung des Kreises veränderlich gemacht. Der Kondensator besteht nämlich aus mehreren übereinander liegenden, halbkreisförmigen Platten (Abb. 305), die mehr oder weniger ineinander geschoben werden können. In Abb. 306, die einen solchen Apparat zeigt, ist dieser mehrplattige Kondensator im senkrechten Querschnitt zu sehen. Man kann also durch Drehung des Knopfes die Kapazität verändern, bis die Eigenschwingung dieses Kreises mit der ankommenden Schwingung gleich ist und daher Resonanz eintritt. Den Eintritt der Resonanz erkennt man, wie schon erwähnt, an dem Luftthermometer. Aus der Stellung des Knopfes kann man auf einer geeichten Skala die Eigenschwingungszahl ablesen.

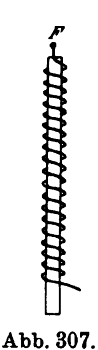


Abb. 307.

Ein anderer empfindlicher Wellenmesser ist der Multiplikationsstab von Slaby.[1]) Er besteht aus einem langen Draht, der auf einen isolierenden Stab aufgewickelt ist (Abb. 307). Durch die nebeneinanderliegenden Windungen erhält er eine größere Selbstinduktion und Kapazität als bei gerader Ausspannung, und es tritt eine Steigerung der Spannung ein (daher der Name). Bringt man ein Ende durch einen Draht in elektrische Kupplung mit dem zu untersuchenden Oszillator, so entsteht hier ein Strombauch, am anderen Ende aber ein Spannungsbauch, der sich durch leichtes Funkensprühen an dem damit verbundenen Knopf *F* bemerkbar macht.

204. Das Wesen der drahtlosen Telegraphie.

Das Wesen der Funkentelegraphie beruht auf der Induktion sekundärer Ströme in der Empfangstation durch primäre Ströme, die in der Sendestation erzeugt werden. Die Träger dieser Ströme sind lotrechte Drähte (Abb. 308) von möglichst großer Höhe, um über die

[1]) Slaby, ETZ 1903, S. 1007.

verschiedenen Objekte auf der Erde, die der Ausbreitung der Kraftlinien hinderlich sind, hinwegzukommen. Am unteren Ende des Sendedrahtes werden durch kräftige Funkenentladungen Schwingungen erzeugt, die im Draht eine stehende Welle bilden; es ist also die eine Hälfte der Abb. 296 lotrecht gestellt, während die andere Hälfte durch einen Anschluß an die Erde ersetzt wird. Infolge der großen Kapazität der Erde kann zwischen Funkenstrecke und Erde dieselbe Bewegung der Elektrizität stattfinden wie zwischen Funkenstrecke und Draht, so daß Symmetrie besteht wie in Abb. 296. Durch den periodischen Strom, den die im Draht auf und ab schwingende Elektrizität darstellt, werden magnetische Kraftlinien erzeugt, die den Draht konzentrisch umgeben (wie in Abb. 76) und sich bis ins Unendliche ausbreiten, wenn sie nicht vorher auf Leiter auftreffen. Treffen und schneiden sie den lotrechten Draht des Empfängers, so induzieren sie in ihm Ströme von gleicher Art, also auch eine stehende Welle. Wir haben es demnach mit zwei parallelen, durch magnetische Kraftlinien gekuppelten Leitern zu tun. In den Empfängerdraht ist unten, also in der Nähe des Bauches der Stromschwingung ein Wellenanzeiger, z. B. ein Fritter eingeschaltet (Abb. 308). Durch die im Draht entstehende Welle wird der Fritter leitend und dadurch der aus einer Batterie und einem Relais bestehende Ortsstromkreis geschlossen. Von dem Sendedraht gehen auch elektrische Kraftlinien aus, so daß man strenge genommen von einer elektromagnetischen Welle im Sinne des § 202 sprechen muß, welche die Kupplung zwischen Sender und Empfänger bewirkt. Man kommt aber bei der Erklärung mit der alleinigen Berücksichtigung der magnetischen Kraftlinien aus. Daß sie tatsächlich die Hauptrolle spielen, also die Kupplung im wesentlichen eine magnetische ist, geht daraus hervor, daß man durch Erhöhung der Spannung im Sendedraht keine erhebliche Steigerung der Wirkung erzielt, wohl aber durch Vergrößerung der im Sendedraht hin und her schwingenden Elektrizitätsmenge, d. h. der Stromstärke der Welle. Eine Vergrößerung der Stromstärke könnte nach § 189, Gl. 227 durch Erhöhung der Ladespannung erreicht werden. Prak-

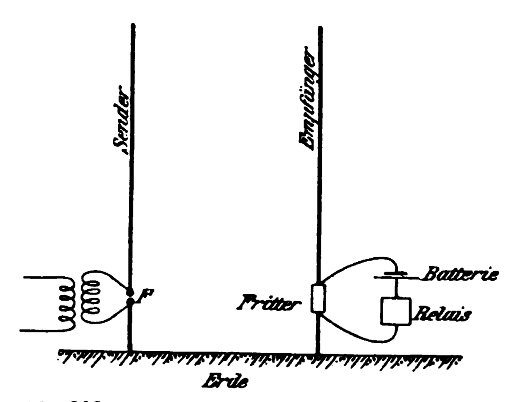


Abb. 308. Einfacher Sender und Empfänger.

tisch wird aber dadurch eine Steigerung der Wirkung nicht erzielt, weil auch die Dämpfung eine wichtige Rolle spielt. Diese wächst aber mit der Spannung aus zwei Gründen: erstens, weil bei Erhöhung der Spannung die Funkenlänge vergrößert werden muß und damit der Funkenwiderstand wächst, zweitens, weil mit der Spannung auch die Ausstrahlung der Elektrizität aus dem Sendedraht zunimmt (§ 192).

Dagegen gelingt eine wirksame Vergrößerung der Stromstärke und damit auch eine Verminderung des Funkenwiderstandes (§ 193) durch Kupplung des Sendedrahtes mit einem geschlossenen Schwingungskreis, dessen Gesetze in § 189 abgeleitet wurden. Abb. 309 zeigt eine solche Senderanordnung. Ein aus zwei hintereinandergeschalteten Kondensatoren und einer Selbstinduktion bestehender geschlossener Schwingungskreis wird durch Anschluß an eine Stromquelle (Funkeninduktor oder Transformator) geladen und über die Funkenstrecke *F* oszillatorisch entladen. Mit ihm ist der stark gezeichnete Sendedraht elektrisch gekuppelt (§ 200), und es kommt nun in ihm eine viel größere Elektrizitätsmenge zur Schwingung als ohne den geschlossenen Schwingungskreis. Er steht zu letzterem in einem ähnlichen Verhältnis wie eine Stimmgabel zu ihrem Resonanzkasten. Abb. 310 zeigt die entsprechende Empfängerschaltung. Der Fritter *Fr*, der Kondensator *C* und die Selbstinduktion *L* bilden einen geschlossenen Schwingungskreis, der mit dem Empfängerdraht gekuppelt ist. An den Fritter ist wieder der Ortsstromkreis angeschlossen wie in Abbild. 308. Die Kupplung des geschlossenen Schwingungskreises mit dem Sendedraht kann auch eine magnetische sein, wie Abb. 311 zeigt. Bei der entsprechenden Empfängerschaltung tritt an Stelle der Funkenstrecke der Wellenanzeiger. Abb. 312 zeigt noch eine andere Schaltung, wo der Wellenanzeiger

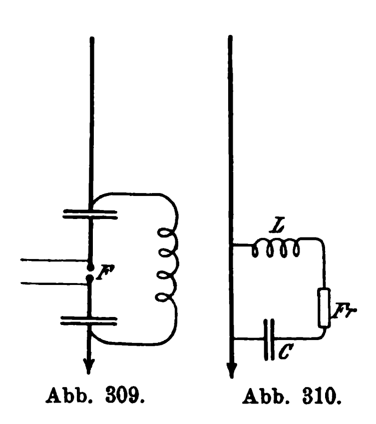


Abb. 309. Abb. 310.

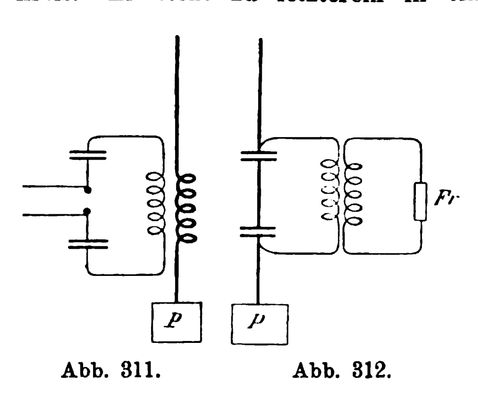


Abb. 311. Abb. 312.

Fr magnetisch gekuppelt ist mit dem geschlossenen Schwingungskreis, der mit dem Empfängerdraht elektrisch gekuppelt ist.

Eine weitere Steigerung der im Sendedraht schwingenden Elektrizitätsmenge wird durch die von Braun[1]) angegebenen Mehrfachsysteme erzielt. Abb. 313 und 314 zeigen derartige Schaltungen. Hier sind zwei geschlossene Schwingungskreise mit dem Sendedraht gekuppelt; im ersteren Falle elektrisch, im zweiten Falle magnetisch. Natürlich müssen die Schwingungen in den beiden Kreisen nicht nur gleiche Schwingungszahl haben, sondern auch in gleicher Phase sein, wenn sie sich in ihrer Wirkung auf den Sendedraht unterstützen sollen. Die gleiche Schwingungszahl ergibt sich durch gleiche Kapazität und Selbstinduktion, die Phasenübereinstimmung stellt sich von selbst dadurch ein, daß beide Schwingungskreise mit demselben Sendedraht ziemlich stark gekuppelt sind. Bei Abb. 313 besteht die Kupplung im Funkenwiderstand, der größer ist als der Widerstand der Leitungen, und in dem Umstand, daß beide Funkenstrecken im Sekundärkreis der Stromquelle hintereinandergeschaltet sind, also mit diesem einen einzigen Stromkreis bilden. Dadurch wird gleichzeitig der in § 193 besprochene Umstand nutzbar gemacht, daß bei gleicher Gesamtspannung die Dämpfung der unterteilten Funkenstrecken kleiner ist als die einer einzigen. Bei Abb. 314 sind die beiden Funkenstrecken zur Stromquelle parallel geschaltet, so daß außer der magnetischen Kupplung der beiden Schwingungskreise mit dem gemeinsamen Sendedraht, auch noch eine unmittelbare elektrische Kupplung zwischen den beiden Funkenstrecken besteht. Es gibt noch zahlreiche andere Schaltungen, die sich durch Kombination der verschiedenen Grundarten ergeben, worauf hier nicht eingegangen werden kann.[2])

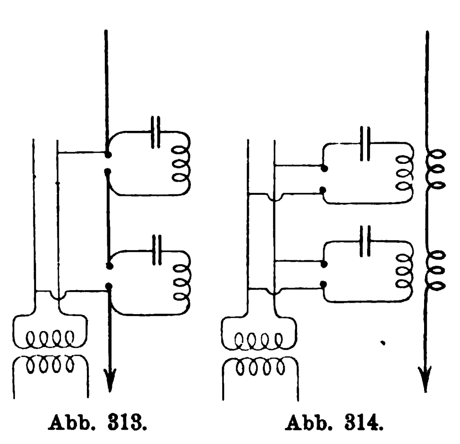


Abb. 313. Abb. 314.

[1]) Braun, Physikal. Zeitschr. 5, S. 193, 1904.

[2]) Vgl. ETZ 1904, S. 523; 1906, S. 79. Näheres über die Funkentelegraphie bei: Righi u. Dessau, „Die Telegraphie ohne Draht". Zenneck, „Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie".

Dreizehntes Kapitel.

Zusammengesetzte Wellenformen.

205. Die wichtigsten Wellenformen.

Bisher wurde bei allen Betrachtungen über Wechselströme vorausgesetzt, daß der Verlauf des Stromes, der Spannung und des magnetischen Feldes einer einfachen Sinuswelle entspricht. Bei der praktischen Anwendung der Wechselströme ist dies selten der Fall, sondern meist ist schon die EMK eines Stromerzeugers, eine aus mehreren Sinus- oder Cosinuswellen zusammengesetzte Wellenform. Wir betrachten die einfachsten Fälle.

Abb. 315 zeigt eine stumpfe Wellenform *III*, welche aus zwei Sinuswellen *I* und *II* zusammengesetzt ist. Jede Ordinate von *III* ist gleich der Summe der Ordinaten von *I* und *II*. Der mathematische Ausdruck von *I* ist $\mathfrak{A}_1 \sin \omega t$, der von *II* ist $\mathfrak{A}_3 \sin 3\omega t$, weil sie dreimal so viel Perioden hat. Mithin ist der mathematische Ausdruck von *III*

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3\omega t.$$

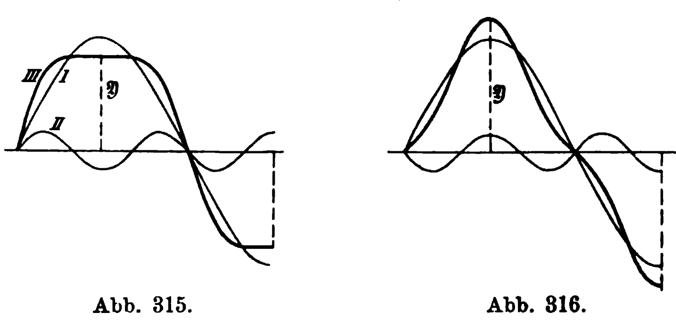


Abb. 315. Abb. 316.

Wie man ohne weiteres sieht, ist der Scheitelwert dieser Welle

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3.$$

Diesen erhält man auch rechnerisch aus der Gleichung für *III*, wenn man $\omega t = 90^0$ setzt. Das ist aber nicht der Fall, wenn die Wellenform gesattelt ist (Abb. 323). Dann liegt der Scheitelwert nicht in der Mitte und muß besonders bestimmt werden.

Die spitze Wellenform in Abb. 316 besteht aus denselben Gliedern wie die vorige; aber die dreifache Welle beginnt mit negativen Werten. Ihre Gleichung ist also

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t - \mathfrak{A}_3 \sin 3\omega t$$

und ihr Scheitelwert

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_3.$$

Betrachtet man eine Welle von der Form

$$y = \mathfrak{A}_1 \cos \omega t + \mathfrak{A}_3 \cos 3\omega t,$$

so findet man aus der Addition der beiden Einzelwellen (Abb. 317) eine Welle von gleicher Gestalt wie in Abb. 316, nur liegt hier der Anfang ($\omega t = 0$) beim Scheitelwert, d. h. jene ist gegen diese um 90^0 verschoben. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_1 \sin(\omega t + 90) - \mathfrak{A}_3 \sin 3(\omega t + 90) \\ &= \mathfrak{A}_1 \sin(\omega t + 90) - \mathfrak{A}_3 \sin(3\omega t + 270) \\ &= \mathfrak{A}_1 \cos \omega t + \mathfrak{A}_3 \cos 3\omega t. \end{aligned}$$

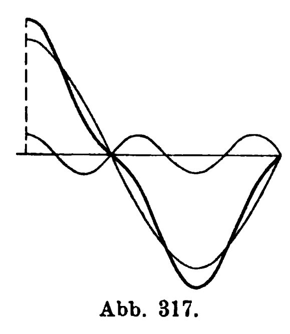


Abb. 317.

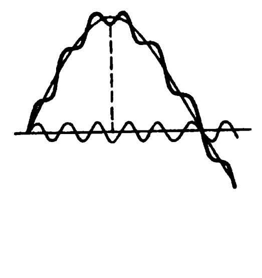


Abb. 318.

Wie man in den vorstehenden Abbildungen das Glied dritter Ordnung aus der Abstumpfung bzw. Zuspitzung der Welle erkennen kann, so kann man stark ausgeprägte Glieder höherer Ordnung aus den Einbuchtungen erkennen. So findet man aus Abb. 318, daß sie ein Glied elfter Ordnung enthält, denn jeder positive Scheitel elfter Ordnung erzeugt eine Ausbuchtung, jeder negative Scheitel eine Einbuchtung in der resultierenden Welle. Solcher Aus- und Einbuchtungen zählt man in einer halben Welle elf, entsprechend den elf halben Wellen. Ist das Glied elfter Ordnung negativ, so folgt auf den Nullpunkt nicht eine Ausbuchtung, sondern eine Einbuchtung.

Sind mehrere Glieder höherer Ordnung vorhanden, so kann man sie nicht so leicht erkennen, sondern nur durch graphische oder rechnerische Auflösung (§ 214).

206. Beziehung zwischen Spannungswellen und magnetischen Wellen. Unsymmetrische Wellen.

Die Wellenformen in Abb. 315 und 316 stehen in einer wichtigen Beziehung zueinander. Stellt z. B. die erstere eine magnetische Welle

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}_1 \sin \omega t + \mathfrak{Z}_3 \sin 3\omega t$$

vor, so ist die von ihr induzierte Spannungswelle (nach § 125)

$$e = -\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -\omega \mathfrak{Z}_1 \cos \omega t - 3\omega \mathfrak{Z}_3 \cos 3\omega t$$
$$= -\mathfrak{E}_1 \cos \omega t - \mathfrak{E}_3 \cos 3\omega t.$$

Diese Wellenform ist identisch mit der in Abb. 317, nur um 180° verschoben oder um die wagerechte Achse gedreht. Diese ist aber wiederum identisch mit der in Abb. 316, wie wir oben gesehen haben. Umgekehrt findet man, daß eine magnetische Welle von der Form

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}_1 \sin \omega t - \mathfrak{Z}_3 \sin 3\omega t$$

(Abb. 316) eine Spannungswelle von der Form in Abb. 315 erzeugt. Im allgemeinen erzeugt also eine stumpfe magnetische Welle eine spitze Spannungswelle und umgekehrt.

Ferner erkennt man, daß zwischen den Scheitelwerten der Spannung und des magnetischen Feldes einer Welle $x$ter Ordnung folgende Beziehung besteht

$$\mathfrak{E}_x = x\,\omega\,\mathfrak{Z}_x.$$

Wir betrachten in dieser Hinsicht noch einige andere Fälle, z. B.

$$e = \mathfrak{E}_1 \sin \omega t + \mathfrak{E}_2 \sin 2\omega t.$$

Das ist die in Abb. 319 dargestellte Welle. Die entsprechende magnetische Welle ist

$$\mathfrak{z} = -\int e\,dt = \frac{\mathfrak{E}_1}{\omega} \cos \omega t + \frac{\mathfrak{E}_2}{2\omega} \cos 2\omega t.$$

Das ist die in Abb. 320 dargestellte Welle. Eine Maschine, welche die obige Spannungswelle erzeugen sollte, müßte also aufeinanderfolgende Pole von verschiedener Kraftlinienmenge haben und die Abstände der Nullpunkte müßten bei beiden Wellenhälften verschieden sein. Das ist aber unmöglich, denn dieselben Kraftlinien,

die bei einem Pol austreten, treten beim anderen wieder ein, und die Geschwindigkeit der Maschine ist während jeder Halbwelle dieselbe. Aus demselben Grunde können auch höhere Glieder von gerader Ordnung nicht vorkommen. Auf andere Weise aber können solche Wellenformen entstehen (vgl. § 242 II, Abb. 375).

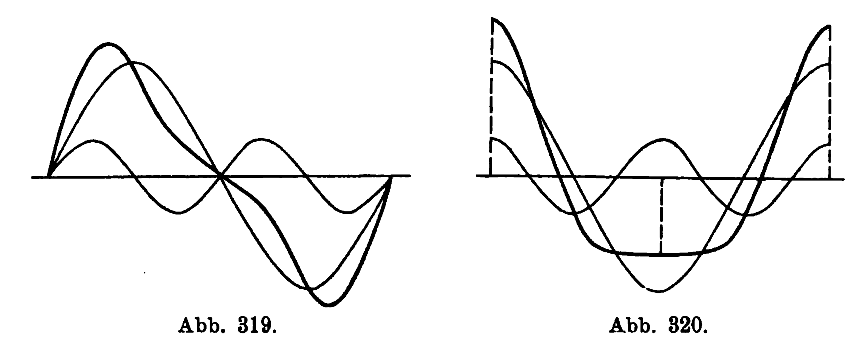


Abb. 319. Abb. 320.

Unsymmetrische Wellen, bei denen zum Unterschiede von den beiden letzten die entgegengesetzten Ordinatenwerte immer um 180° auseinanderliegen, kommen häufig vor; diese sind aber immer auf gemeinsames Vorkommen von sin- und cos-Gliedern zurückzuführen. Z. B. ist die in Abb. 321 dargestellte Welle:

$$e = \mathfrak{E}_1 \sin \omega t + \mathfrak{E}_3 \cos 3\,\omega t.$$

Die entsprechende magnetische Welle ist

$$\mathfrak{z} = -\int e\,dt = \frac{\mathfrak{E}_1}{\omega} \cos \omega t - \frac{\mathfrak{E}_3}{3\omega} \sin 3\omega t.$$

Abb. 321. Abb. 322.

Das ist die in Abb. 322 dargestellte Welle. Solche kommen zustande, wenn die Maschine Strom liefert und die eine Hälfte jedes Poles durch die Ankerrückwirkung geschwächt oder verstärkt wird.

Die vorletzte Wellenform e kann auch durch folgende dargestellt werden

$$
\begin{aligned}
e &= \mathfrak{E}_1 \sin \omega t + \mathfrak{E}_3 \cos 3\omega t \\
&= \mathfrak{E}_1 \sin \omega t + \mathfrak{E}_3 \sin (3\omega t + 90) \\
&= \mathfrak{E}_1 \sin \omega t + \mathfrak{E}_3 \sin 3(\omega t + 30).
\end{aligned}
$$

Das sind also zwei Sinusglieder, deren Anfangspunkte um 30^0 gegeneinander verschoben sind.

Wir kommen nach dem Vorstehenden zu folgendem Ergebnis. Wellenformen, die zur mittleren Ordinate symmetrisch sind, enthalten nur Sinusglieder oder nur Cosinusglieder von ungerader Ordnung. Unsymmetrische Wellenformen können theoretisch von Gliedern gerader Ordnung herrühren. Solche kommen aber bei den Wechselstrommaschinen nicht vor. Daher rühren fast alle unsymmetrischen Formen, die in der Wechselstromtechnik vorkommen, davon her, daß entweder Sinus- und Cosinusglieder darin vorkommen oder nur Sinusglieder mit Phasenverschiebung oder nur Cosinusglieder mit Phasenverschiebung.

Im allgemeinsten Falle läßt sich also jede in der Wechselstromtechnik vorkommende Wellenform durch folgende Gleichung darstellen

$$
\begin{aligned}
y = &\mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3\omega t + \mathfrak{A}_5 \sin 5\omega t + \ldots \\
+ &\mathfrak{B}_1 \cos \omega t + \mathfrak{B}_3 \cos 3\omega t + \mathfrak{B}_5 \cos 5\omega t + \ldots
\end{aligned}
$$

oder durch

$$
\begin{aligned}
y = &\mathfrak{D}_1 \sin (\omega t + \varphi_1) + \mathfrak{D}_3 \sin 3 (\omega t + \varphi_3) \\
&+ \mathfrak{D}_5 \sin 5 (\omega t + \varphi_5) + \ldots \qquad (253)
\end{aligned}
$$

Zwischen den Scheitelwerten und Phasenverschiebungen dieser beiden Gleichungen bestehen folgende Beziehungen

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{D}_x &= \sqrt{\mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{B}_x^2} \\
\operatorname{tg} x \varphi_x &= \frac{\mathfrak{B}_x}{\mathfrak{A}_x}
\end{aligned}
\right\} \qquad (254)
$$

mit deren Hilfe man eine in die andere überführen kann.

207. Scheitelwert, effektiver Wert und arithmetischer Mittelwert einer zusammengesetzten Wellenform.

Der Scheitelwert ist der größte Ordinatenwert einer Welle. Bei einer einfachen Sinuswelle liegt er in der Mitte zwischen den beiden Nullpunkten. Bei unsymmetrischen Wellenformen wie in Abb. 321 und 322 liegt er nicht in der Mitte. Bei stark eingesattelten symmetrischen Wellen (Abb. 323) kommt er in jeder halben

Welle zweimal vor. Zu seiner Berechnung aus den Scheitelwerten der einzelnen Glieder gibt es keine bestimmte Regel, sondern man muß nach den Regeln der Differentialrechnung das Maximum aufsuchen, was aber häufig rechnerische Schwierigkeiten bietet. Ist die Wellenform gezeichnet, so erhält man den Scheitelwert natürlich durch Abmessung.

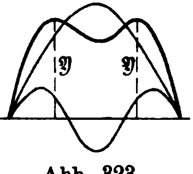


Abb. 323.

Der **effektive Wert** ist nach § 131 definiert durch

$$Y = \sqrt{\frac{1}{\frac{\tau}{2}} \int_0^{\frac{\tau}{2}} y^2 \, dt}.$$

Für eine Welle von der Form

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{B}_1 \cos \omega t$$

ergibt sich

$$Y = \sqrt{\frac{2}{\tau} \left[\int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_1^2 \sin^2 \omega t \, dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{B}_1^2 \cos^2 \omega t \, dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \sin \omega t \cos \omega t \, dt \right]}$$

Das erste Integral ist nach § 131 gleich $\frac{\mathfrak{A}_1^2 \tau}{2}$, das zweite ist gleich $\frac{\mathfrak{B}_1^2 \tau}{2}$. Das dritte ist

$$\int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin \omega t \cos \omega t \, dt = \left| \frac{1}{2\omega} \sin^2 \omega t \right|_0^{\frac{\tau}{2}} = \left| \frac{1}{2\omega} \sin^2 \frac{2\pi}{\tau} t \right|_0^{\frac{\tau}{2}} = 0.$$

Also ist

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2} (\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{B}_1^2)} = \sqrt{A_1^2 + B_1^2},$$

wenn A_1, B_1 die effektiven Werte der einzelnen Glieder bedeuten.

Enthält die Welle beliebig viele Glieder höherer Ordnung, lautet sie also

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_2 \sin 2\omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3 \omega t + \dots$$
$$+ \mathfrak{B}_1 \cos \omega t + \mathfrak{B}_2 \cos 2\omega t + \mathfrak{B}_3 \cos 3 \omega t + \dots$$

so ist

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 + \ldots + \mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2 + \ldots)}.$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \ldots + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + \ldots} \quad (255)$$

wenn $A_1 \ldots B_1 \ldots$ die effektiven Werte der einzelnen Glieder bedeuten.

Der effektive Wert einer gezeichneten Welle läßt sich auch geometrisch mit einer für praktische Zwecke hinreichenden Genauigkeit auf folgende Weise bestimmen. Man teilt eine halbe Welle in eine Anzahl gleichbreiter senkrechter Streifen und mißt in jedem Streifen die Länge der Mittellinie b. Dann ist

$$Y = \sqrt{\frac{1}{a}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots .)},$$

wobei a die Länge der halben Welle ist. In je mehr Teile man die halbe Welle zerlegt, desto größer ist die Genauigkeit.

Der arithmetische Mittelwert, der (nach § 130) definiert ist durch

$$Y_{mi} = \frac{1}{\frac{\tau}{2}} \int_0^{\frac{\tau}{2}} y \, dt,$$

läßt sich nicht so wie der effektive durch eine für alle Wellenformen gültige Formel darstellen, sondern er ist verschieden, je nach den Gliedern, welche die Welle enthält.

So ergibt sich z. B. für eine Welle

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega + \mathfrak{A}_2 \sin 2\omega t$$

der Mittelwert

$$Y_{mi} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_1 \sin \omega t \, dt + \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_2 \sin 2\omega t \, dt = \frac{2\,\mathfrak{A}_1}{\pi}.$$

Dagegen ist für eine Welle

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3\omega t$$

der Mittelwert

$$Y_{mi} = \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_1 \sin \omega t dt + \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \mathfrak{A}_3 \sin 3\,\omega t dt = \frac{2\,\mathfrak{A}_1}{\pi} + \frac{2\,\mathfrak{A}_3}{3\,\pi}.$$

Zu beachten ist, daß bei der Berechnung des arithmetischen Mittelwertes die Integration immer zwischen den Nullpunkten der resultierenden Welle nicht zwischen denen des ersten Gliedes statt-

finden muß, da man sonst einen falschen Wert erhält. Diese Nullpunkte fallen aber nur aufeinander, wenn alle Glieder höherer Ordnung durch den Nullpunkt des ersten Gliedes gehen. In allen anderen Fällen muß der Nullpunkt der resultierenden Welle erst ermittelt werden.

208. Formfaktor und Scheitelfaktor.

Um die Stumpfheit oder Spitzheit einer Wellenform zahlenmäßig zu charakterisieren, verwendet man häufig den sogenannten Formfaktor f; das ist das Verhältnis des effektiven zum arithmetischen Mittelwert,

$$f = \frac{Y}{Y_{mi}}.$$

In den meisten Fällen ist dieser Wert um so größer, je spitzer die Wellenform ist. Es gibt aber Fälle, wo dies nicht zutrifft. Aus diesem und dem in § 210 angegebenen Grunde ist vom Verfasser der Scheitelfaktor σ zur Charakterisierung der Wellenform eingeführt worden.[1]) Er ist definiert durch das Verhältnis des Scheitelwertes zum effektiven Wert, also

$$\sigma = \frac{\mathfrak{Y}}{Y}.$$

Je größer dieser Wert, desto spitzer ist unter allen Umständen die Wellenform. Er hat außerdem noch den Vorteil, daß man den arithmetischen Mittelwert, den man sonst nicht braucht, nicht eigens bestimmen muß, und daß sein Unterschied zwischen verschiedenen Wellenformen größer ist als der des Formfaktors, wie man aus folgender Zusammenstellung dreier geometrischer Wellenformen von gleichem Scheitelwert $\mathfrak{Y}$ sieht.

	Formfaktor f	Scheitelfaktor σ
Sinuswelle	$\frac{\mathfrak{Y}/\sqrt{2}}{2\,\mathfrak{Y}/\pi} = 1{,}111$	$\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Y}/\sqrt{2}} = 1{,}414$
Gleichseitiges Dreieck	$\frac{\mathfrak{Y}/\sqrt{3}}{\mathfrak{Y}/2} = 1{,}150$	$\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Y}/\sqrt{3}} = 1{,}732$
Rechteck	$\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Y}} = 1$	$\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Y}} = 1$

[1]) ETZ 1900, S. 674. Zeitschr. für Elektrot., Wien 1902, Heft 13.

209. Leistung, Leistungsfaktor, äquivalente Sinuswelle.

Wirkt in einem Wechselstromkreis eine EMK

$$\mathfrak{E}_x \sin x\omega t,$$

so ist die Stromstärke und Phasenverschiebung (§ 133)

$$\mathfrak{J}_x = \frac{\mathfrak{E}_x}{\sqrt{w^2 + (x\omega L)^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi_x = \frac{x\omega L}{w}.$$

Wirken gleichzeitig mehrere EMKe von verschiedener Periodenzahl, d. h. eine zusammengesetzte Welle von der Form

$$\begin{aligned} e &= \mathfrak{A}_1 \sin\omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3\omega t + \ldots + \mathfrak{B}_1 \cos\omega t + \mathfrak{B}_3 \cos 3\omega t + \ldots \\ &= \mathfrak{E}_1 \sin(\omega t + \varepsilon_1) + \mathfrak{E}_3 \sin 3(\omega t + \varepsilon_3) + \ldots \end{aligned} \qquad (256)$$

so entsteht ein Strom von der Form

$$\begin{aligned} i &= \mathfrak{G}_1 \sin\omega t + \mathfrak{G}_3 \sin 3\omega t + \ldots + \mathfrak{H}_1 \cos\omega t + \mathfrak{H}_3 \cos 3\omega t + \ldots \\ &= \mathfrak{J}_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + \mathfrak{J}_3 \sin 3(\omega t + \gamma_3) + \ldots \end{aligned} \qquad (257)$$

und zwischen den einzelnen Gliedern besteht die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= \frac{\mathfrak{E}_1}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}} \qquad \operatorname{tg}(\varepsilon_1 - \gamma_1) = \frac{\omega L}{w} \\ \mathfrak{J}_3 &= \frac{\mathfrak{E}_3}{\sqrt{w^2 + (3\omega L)^2}} \qquad \operatorname{tg}(\varepsilon_3 - \gamma_3) = \frac{3\omega L}{w} \end{aligned}\right\} \qquad (258)$$

Jedes Glied kann also als für sich allein bestehend betrachtet werden. Dann ist die Leistung des ersten Gliedes (§ 134)

$$\frac{1}{2}\mathfrak{E}_1 \mathfrak{J}_1 \cos(\varepsilon_1 - \gamma_1),$$

die des dritten

$$\frac{1}{2}\mathfrak{E}_3 \mathfrak{J}_3 \cos(\varepsilon_3 - \gamma_3).$$

Die Leistung des gesamten Stromes ist

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}[\mathfrak{A}_1 \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{G}_3 + \mathfrak{B}_3 \mathfrak{H}_3 + \ldots] \\ &= \frac{1}{2}[\mathfrak{E}_1 \mathfrak{J}_1 \cos(\varepsilon_1 - \gamma_1) + \mathfrak{E}_3 \mathfrak{J}_3 \cos(\varepsilon_3 - \gamma_3) + \ldots] \\ &= E_1 J_1 \cos(\varepsilon_1 - \gamma_1) + E_3 J_3 \cos(\varepsilon_3 - \gamma_3) + \ldots \end{aligned} \qquad (259)$$

Es bestehen also zwischen den einzelnen Gliedern des Stromes und der Spannung verschiedene Phasenverschiebungen, so daß sich die in § 134 erhaltene Gleichung für die Leistung $EJ\cos\varphi$, welche den Cosinus der Phasenverschiebung zwischen sinusförmigem Strom und Spannung enthält, nicht anwenden läßt. Nach § 207 besteht aber für die EMK und den Strom ein durch Gl. 255 definierter

effektiver Wert, der von einem richtigen Volt- bzw. Strommesser angegeben wird. Da ferner jeder Wechselstrom eine durch Gl. 259 definierte Leistung P hat, die durch ein Wattmeter in Watt gemessen werden kann, so unterlegt man jeder wie immer geformten Strom- und Spannungswelle äquivalente Sinuswellen. Das sind jene, deren effektiver Wert $\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{2}}$ bzw. $\frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}}$ gleich ist dem durch Gl. 255 definierten Wert E bzw J, und deren Produkt $EJ \cos\varphi$ gleich ist dem durch Gl. 259 definierten Werte P. Dieser hierin enthaltene Phasenwinkel φ hat aber keine bestimmte Beziehung zu den in den obigen Gleichungen für P vorkommenden Phasenverschiebungswinkeln $(\varepsilon - \gamma)$, sondern bedeutet die Phasenverschiebung zwischen den äquivalenten Sinuswellen des Stromes und der Spannung. Sein Cosinus ist definiert durch das Verhältnis der gemessenen Leistung zu den gemessenen Volt-Ampere: $\frac{P}{EJ}$. Er heißt daher Leistungsfaktor.[1])

210. Der Hystereseverlust im Eisen bei zusammengesetzten Wellenformen.

Nach § 163 hängt der Hystereseverlust bei periodischer Magnetisierung des Eisens nicht vom effektiven Wert, sondern vom Scheitelwert der Kraftliniendichte ab. Hat man eine magnetische Welle von der Form

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}_1 \sin \omega t + \mathfrak{Z}_3 \sin 3\omega t \qquad \text{(Abb. 315)}$$

und eine andere von der Form

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{Z}_1 \sin \omega t - \mathfrak{Z}_3 \sin 3\omega t \qquad \text{(Abb. 316)}$$

so haben beide denselben effektiven Wert $\sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{Z}_1^2 + \mathfrak{Z}_3^2)}$ und auch die effektiven Werte der entsprechenden Spannungswellen sind gleich. Dagegen ist der Scheitelwert der ersteren gleich $\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_3$, der der letzteren gleich $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3$. Bei der letzteren hat man also erheblich größeren Hystereseverlust.

[1]) Unter der Annahme äquivalenter Sinuswellen setzt man das Verhältnis der effektiven Werte $E:J$, das ist der scheinbare Widerstand gleich $\sqrt{w^2 + (2\pi\nu L)^2}$. In diesem Ausdruck kommen die Glieder höherer Ordnung nicht vor, während sie in der mathematischen Definition (Gl. 255) vorkommen. Setzt man nun für ν, wie es in der Regel geschieht, die Periodenzahl des ersten Gliedes, weil dieses in der Regel am stärksten ist, und berechnet daraus L, so hat dieses einen anderen Wert als das L, welches in den Gl. 258 vorkommt; d. h. die den äquivalenten Sinuswellen entsprechende Selbstinduktion hängt von der betreffenden Wellenform, für welche die Sinuswellen gesetzt werden, ab. Aber eben diese, nicht die in den Gl. 258 enthaltene Selbstinduktion ist der für die betreffende Wellenform richtige Wert, wenn man mit Meßinstrumenten arbeitet, welche den effektiven Wert angeben.

Zur Berechnung des Hystereseverlustes ist also die Kenntnis des magnetischen Scheitelwertes erforderlich. Experimentell kann man ihn direkt nicht ermitteln, sondern nur die entsprechende Spannungswelle, aus der man ihn berechnen kann. Bei einfachen Sinuswellen geschieht dies mittels der in § 132 erhaltenen Gleichung

$$E = \frac{2\pi}{\sigma} \nu N \mathfrak{Z} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \nu N \mathfrak{Z} = 4{,}44\, \nu N \mathfrak{Z}.$$

Da jede andere Wellenform einen anderen Scheitelfaktor σ hat, so erhält diese Gleichung einen anderen Zahlenfaktor, den man in folgender Weise berechnen kann.[1]

Durch experimentelle Bestimmung habe man eine Spannungswelle von der Form

$$e = \mathfrak{E}_1 \sin \omega t - \mathfrak{E}_3 \sin 3\omega t$$

gefunden; dann ist

$$\mathfrak{z} = -\int e\, dt = \frac{\mathfrak{E}_1}{\omega} \cos \omega t - \frac{\mathfrak{E}_3}{3\omega} \cos 3\omega t$$

$$= \mathfrak{Z}_1 \cos \omega t - \mathfrak{Z}_3 \cos 3\omega t.$$

Die e-Welle entspricht der Abb. 316, die $\mathfrak{z}$-Welle der Abb. 315.

Für bestimmte Zahlenwerte, z. B.

$$\mathfrak{E}_1 = 30 \qquad \mathfrak{E}_3 = 5$$

$$\nu = 50 \qquad \omega = 2\pi\nu = 314$$

ergibt sich also

$$\mathfrak{z} = 0{,}0955 \cos \omega t - 0{,}0053 \cos 3\omega t.$$

Der Scheitelwert der Spannungswelle ist (nach Abb. 316)

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_3 = 35.$$

Der effektive Wert ist

$$E = \sqrt{\tfrac{1}{2}(30^2 + 5^2)} = 21{,}5$$

und daher der Scheitelfaktor $\sigma = 1{,}63$.

Den Scheitelwert der $\mathfrak{z}$-Welle findet man durch Abmessung der aufgezeichneten Welle[2])

$$\mathfrak{Z} = 0{,}0902.$$

---

[1]) Benischke, ETZ 1901, S. 53.

[2]) In einfachen Fällen wie hier kann man ihn aus der Maximumsbedingung $\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = 0\right)$ berechnen

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -\omega \mathfrak{Z}_1 \sin \omega t + 3\omega \mathfrak{Z}_3 \sin 3\omega t = 0$$

$$= -\mathfrak{E}_1 \sin \omega t + \mathfrak{E}_3 (3 \sin \omega t - 4 \sin^3 \omega t) = 0.$$

Man erhält durch Division der gefundenen Scheitelwerte

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{Z}} = 390$$

und ferner

$$E = \frac{\mathfrak{E}}{\sigma} = \frac{390\,\mathfrak{Z}}{1,63} = 238\,\mathfrak{Z}.$$

Das ist die gesuchte Beziehung für eine Windung und für 50 Perioden. Will man die der obigen Gleichung entsprechende Beziehung für N Windungen und statt für 50 Perioden für ν Perioden haben, so hat man durch 50 zu dividieren und mit ν und N zu multiplizieren. Das gibt

$$E = 4,76\,\nu\,N\,\mathfrak{Z}$$

für die oben angenommene Spannungswelle als Beziehung zwischen EMK und Kraftlinienmenge.

211. Die Stromwelle bei Selbstinduktion und bei Kapazität.

Wirkt auf einen Stromkreis mit Selbstinduktion eine Spannungswelle mit Gliedern höherer Ordnung, so ist das erste Glied der entsprechenden Stromwelle

$$J_1 = \frac{E_1}{\sqrt{w^2 + (\omega L)^2}}$$

und das xte Glied

$$J_x = \frac{E_x}{\sqrt{w^2 + (x\omega L)^2}}.$$

Ist der Ohmsche Widerstand w verschwindend klein gegen den induktiven, so ist

$$J_1 = \frac{E_1}{\omega L}$$

$$J_x = \frac{E_x}{x\omega L}.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $\sin \omega t = 0$ oder $\omega t = 0$. Die beiden anderen sind

$$\sin\,\omega t = \pm\sqrt{\frac{3\,\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{E}_1}{4\,\mathfrak{E}_3}}.$$

Setzt man die obigen Zahlenwerte ein, so wird der Wurzelausdruck imaginär. Es besteht also nur ein Maximum bei $\omega t = 0$. Setzt man dies ein, so erhält man für den Scheitelwert

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_3 = 0,0955 - 0,0053 = 0,0902.$$

Ist hingegen der induktive Widerstand verschwindend klein gegen den Ohmschen, so ist

$$J_1 = \frac{E_1}{w} \qquad J_x = \frac{E_x}{w}.$$

Man erkennt daraus, daß in der Stromwelle die höheren Glieder um so schwächer werden, von je höherer Ordnung sie sind und je kleiner der Ohmsche Widerstand ist, d. h. je größer der Leistungsfaktor ($\cos\varphi$) ist. Abb. 324 bestätigt dies. Die Spannungswelle e enthält Glieder 5., 7., 11. und 23. Ordnung. Bei $\cos\varphi = 1$ sind sie alle noch erkennbar; die Stromwelle hat gleiche Form wie die Spannungswelle. Bei $\cos\varphi = 0{,}2$ ist nur mehr das Glied 1. Ordnung, also eine reine Sinuswelle vorhanden.

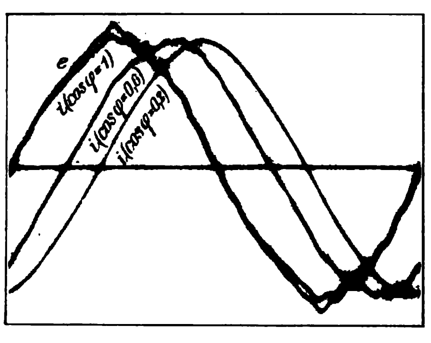


Abb. 324.

Im Gegensatz dazu sind in einem Stromkreis mit Kapazität die Stromglieder höherer Ordnung stärker ausgeprägt als in der Spannungswelle. Das Stromglied 1. Ordnung ist

$$J_1 = \frac{E_1}{\sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Das Stromglied xter Ordnung ist

$$J_x = \frac{E_x}{\sqrt{w^2 + \left(\frac{1}{x\omega C}\right)^2}}.$$

Ist der Ohmsche Widerstand w verschwindend klein gegen den Kapazitätswiderstand, so ist

$$J_1 = \omega C E_1$$
$$J_x = x\omega C E_x.$$

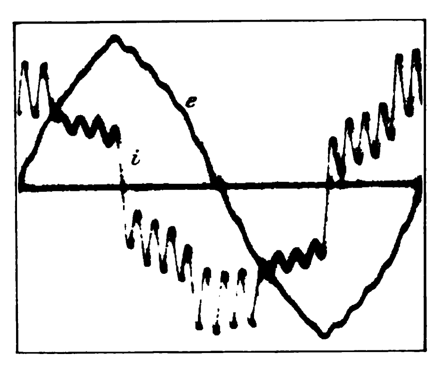


Abb. 325.

Abb. 325 läßt das erkennen. Die Spannungswelle e ist dieselbe wie in Abb. 324. Man sieht, wie in der Stromwelle das 23. Glied als höchstes Glied am stärksten ausgeprägt ist. Man

benützt dies, um das Vorhandensein eines Gliedes höherer Ordnung, das in der Spannungswelle nicht deutlich erkennbar ist, festzustellen.

212. Die Stromwelle bei Apparaten mit Eisenkern.

Das magnetische Feld in einem geschlossenen Eisenring ist in jedem Augenblick bestimmt durch (§ 105)

$$\mathfrak{z} = \frac{0{,}4\,\pi\,N i_m}{\mathfrak{w}},$$

wenn N die Windungszahl, i_m den Augenblickswert des Magnetisierungsstromes in Ampere und $\mathfrak{w}$ den magnetischen Widerstand des Kraftlinienbündels bedeutet. Dieser ist

$$\mathfrak{w} = \frac{l}{\mu S},$$

wobei l die Länge, S den Ouerschnitt und μ die magnetische Durchlässigkeit bedeutet. Es ist also

$$\mathfrak{z} = \frac{0{,}4\,\pi\,N i_m}{l}\,\mu S.$$

Wäre μ eine Konstante, wie die übrigen Faktoren, so müßte der Strom denselben Verlauf nehmen wie $\mathfrak{z}$. Nun ist aber μ eine Funktion der Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$ (Abb. 109) und daher auch von $\mathfrak{z}$. In Abb. 113 ist die Beziehung zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ für verschiedene magnetische Kreisprozesse dargestellt. Als Abszissen sind die magnetisierenden Kräfte $\mathfrak{H} = \frac{0{,}4\,\pi\,N i_m}{l}$, als Ordinaten die Kraftliniendichten $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{z}}{S}$ aufgetragen. Dividiert man also den Abszissenmaßstab durch $\frac{0{,}4\pi N}{l}$ und multipliziert den Ordinatenmaßstab mit S, so erhält man die Abb. 326, welche für den betreffenden Eisenring die Beziehung zwischen i_m und $\mathfrak{z}$ darstellt. Man zeichnet nun die Wellenform von $\mathfrak{z}$, die wir hier als sinusförmige voraussetzen, so auf (Abb. 327), daß ihr Scheitelwert $\mathfrak{Z}$ gleich der größten Ordinate in Abb. 326 ist. Dann sucht man zu beliebigen Ordinaten von $\mathfrak{z}$ in Abb. 327 die gleich großen Ordinaten in Abb. 326 und mißt hier die dazu gehörigen Abszissen ab. So findet man z. B., daß zur Ordinate $O\beta$ die Abszisse Ob (Abb. 326) gehört; diese trägt man als Ordinate in Abb. 327 ein und erhält so den Punkt b. So erhält man beliebige Punkte $a, b, d \ldots$ der Stromwelle i_m. Es ist die

Welle des Magnetisierungsstromes, denn es ist nichts als die Magnetisierungskurve zu ihrer Konstruktion benutzt worden.

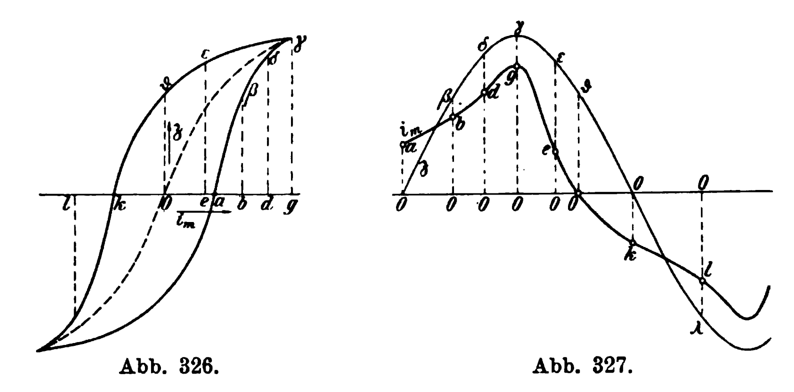


Abb. 326. Abb. 327.

Nun gibt es aber in jedem periodisch magnetisierten Eisenkörper auch Wirbelströme, deren Wattverbrauch nach § 162 berechnet werden kann; dividiert man diesen durch die Spannung, so erhält man den entsprechenden Strom i_w, der infolgedessen ein reiner Wattstrom ist, also gleiche Wellenform und gleiche Phase wie die Welle der EMK e hat. Da wir eine sinusförmige magnetische Welle voraussetzen, so ist auch e sinusförmig und eilt jener um 90^0 in der Phase nach (§ 128). In Abb. 328 sind diese beiden und die vorhin erhaltene Stromwelle i_m eingezeichnet. Der dem Wattverbrauch durch Wirbelströme entsprechende Strom i_w ist in gleicher Phase mit e. Aus der Summe von i_m und i_w ergibt sich nun die Wellenform des gesamten Stromes i in der Spule.

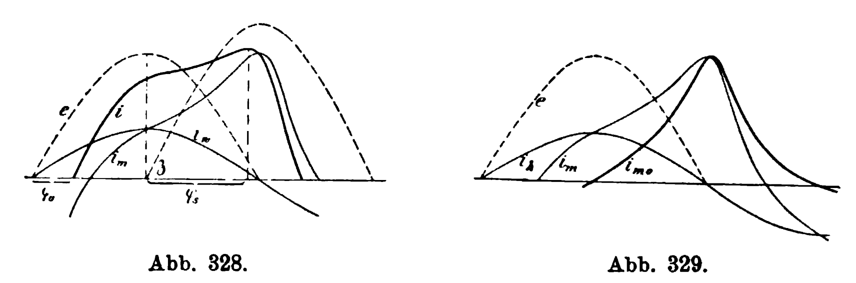


Abb. 328. Abb. 329.

Geht man nicht von der Welle der EMK, sondern der Klemmenspannung aus wie bei jeder experimentellen Aufnahme, so hat man zu dem Wattverbrauch durch Wirbelströme auch noch den durch Stromwärme $w J^2$ in der Spule hinzuzufügen.

Aus dieser Abbildung erkennt man auch, daß die Phasenverschiebung zwischen den Nullpunkten (φ_0) und die zwischen den Scheitel-

werten (φ_s) verschieden ist, so daß man weder die eine noch die andere als Phasenverschiebung der beiden Wellen bezeichnen kann, sondern nur die auf die äquivalente Sinuswelle bezogene.

Es ist zu beachten, daß der Magnetisierungsstrom i_m kein wattloser Strom ist, sondern daß er die dem Hystereseverlust entsprechende Wattkomponente enthält, weil er aus der Hysterieseschleife (Abb. 326) konstruiert wurde. Will man die wattlose Komponente i_{m0} des Magnetisierungsstromes erhalten, so muß man die dem Hystereseverlust entsprechende und daher mit der EMK in gleicher Phase befindliche Wattkomponente i_h von i_m abziehen (Abb. 329). Auf diese Weise erhält man i_{m0}. Konstruiert man nun daraus die Magnetisierungskurve auf umgekehrte Weise wie in Abb. 327 die Wellenform aus der Magnetisierungskurve, so erhält man die gestrichelte Kurve in Abb. 326. Sie muß durch den Nullpunkt gehen, weil die Welle i_{m0} eine symmetrische ist. Sie ist nahezu gleich der in Abb. 113 durch Verbindung der Scheitelpunkte erhaltenen Magnetisierungskurve, bei langsam verlaufenden Kreisprozessen. Genau gleich kann sie ihr nicht sein, weil infolge der Berechnung der Stromwelle i_w aus dem Wattverbrauch nur die Wattkomponente der Wirbelströme in Abb. 328 berücksichtigt wurde. Da diese Wirbelströme im Eisen verlaufen, haben sie zweifellos auch eine wattlose Stromkomponente, die unberücksichtigt geblieben ist, weil man ihre Größe nicht feststellen kann.

Die in Abb. 326 zugrunde gelegte Hystereseschleife entspricht einer Magnetisierung bis etwa 5000—8000 Kraftlinien. Bei stärkerer Magnetisierung ist die Hystereseschleife schlanker und spitzer, und dann ist auch die Wellenform des Magnetisierungsstromes i_m und des Gesamtstromes i spitzer, wie Abb. 330b für $\mathfrak{B} = 10000$ Kraftlinien zeigt.

Je stärker die Wirbelströme im Eisen oder in anderen Metallmassen sind, desto größer ist i_w und desto mehr nähert sich der Gesamtstrom i der Sinusform, wenn die Spannungswelle sinusförmig ist.

Wie aus der in Abb. 327 und 328 durchgeführten Konstruktion hervorgeht, hängen i_m und i von der magnetischen Welle $\mathfrak{z}$ ab, und zwar sind sie um so spitzer, je spitzer diese ist. Da nun die magnetische Welle um so spitzer ist, je stumpfer die Spannungswelle ist, (nach § 206), so ist auch die Stromwelle um so spitzer, je stumpfer die Spannungswelle ist, was durch die experimentell aufgenommenen Wellen in Abb. 330a bis c bestätigt wird.

Das Vorstehende gilt für geschlossene Eisenringe. Enthalten sie einen Luftzwischenraum, so ist die in Abb. 326 dargestellte magnetische Charakteristik um so schmäler und nähert sich um so

mehr einer durch den Nullpunkt gehenden geraden Linie, je größer der magnetische Widerstand im Luftzwischenraum gegenüber dem

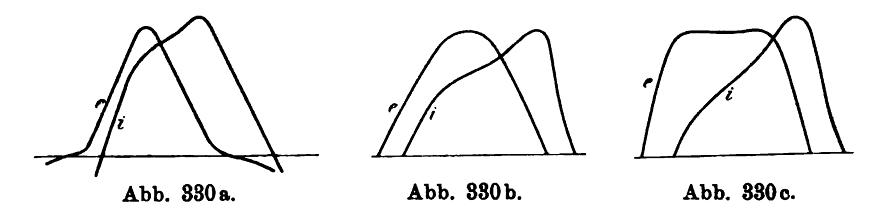


Abb. 330a. Abb. 330b. Abb. 330c.

im Eisen ist (§ 111). Um so mehr nähert sich auch die Welle des Magnetisierungsstromes der der Spannung.

213. Die Wellenformen des Transformators.

Wenn nicht sehr starke Streuung vorhanden ist, müssen die primäre und sekundäre EMK gleiche Wellenform haben, weil sie beide von demselben magnetischen Felde nach dem Gesetze $e = -\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ induziert werden. Daher müssen auch die Klemmenspannungen e_1 und e_2 bei Leerlauf sowie bei kleiner Belastung einander gleich sein (Abb. 331). Dagegen machen sich bei großer Belastung bereits Abweichungen bemerkbar (Abb. 332), und zwar wegen der zunehmenden Streuung und wegen des Anteiles des von der Stromwelle abhängigen Spannungsabfalles.

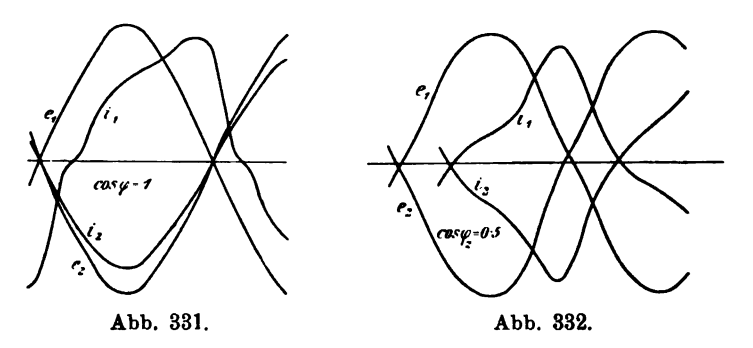


Abb. 331. Abb. 332.

Für den primären Strom bei Leerlauf gilt dasselbe wie in § 212, denn bei Leerlauf ist der Transformator nichts anderes als eine Drosselspule mit Eisenkern. Die Wellenform des sekundären Stromes hängt außer von der Wellenform der sekundären Spannung von der Beschaffenheit des äußeren Stromkreises ab. Enthält er keinen Eisenkern, so ist die Stromwelle gleich der Spannungswelle.

Enthält er einen Eisenkern, so ergibt sich die Stromwelle in gleicher Weise wie in § 212. Der Strom, der infolgedessen nun auch im primären Kreis zum Leerlaufstrom hinzukommt, ergibt sich aus dem Verhältnis der Windungszahlen. Aus der Summe der Ordinaten beider ergibt sich der gesamte primäre Strom. Seine Wellenform muß daher der des sekundären Stromes um so ähnlicher werden, je größer die Belastung des Transformators ist. Das ist sehr deutlich aus Abb. 333 [1]) zu erkennen, welche die primäre Spannung e, den Leerlaufstrom i_0 und 5 Stromwellen bei steigender Belastung enthält. Daß alle Stromwellen den Leerlaufstrom in demselben Punkte schneiden ist nicht Zufall, sondern ergibt sich aus Abb. 328.

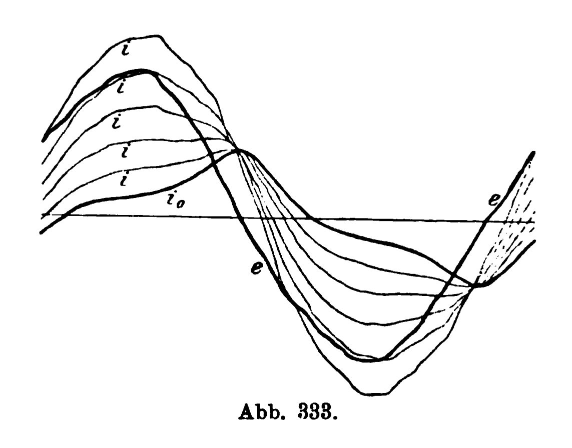


Abb. 333.

Der Schnittpunkt liegt dort, wo die Wattkomponente i_w durch Null geht, und der Magnetisierungsstrom i_m seinen Scheitelwert hat. Alle Stromwellen müssen sich also in demselben Punkt schneiden, solange keine andere wattlose Komponente hinzukommt. Man erkennt daraus auch, daß die Phasenverschiebung zwischen der Spannung e und dem Strome um so kleiner ist, je größer die Belastung ist.

Enthält der sekundäre Stromkreis einen Eisenkern, so ist die sekundäre Stromwelle um so mehr verschieden von der Spannungswelle, je größer der Magnetisierungsstrom dieses Eisenkernes ist. Er tritt natürlich auch in der primären Stromwelle auf und daher werden die beiden Stromwellen einander um so ähnlicher, je größer der sekundäre Strom gegen der Leerlaufstrom ist, gleichgültig, welcher Art die Belastung ist. Das folgt auch aus Gl. 145 (§ 148), wonach der primäre und sekundäre Strom sich in jedem Augenblick umgekehrt wie die Windungszahlen verhalten, wenn die Streuung nicht zu groß ist.

Abb. 331 zeigt die vier Wellen eines Transformators bei geringer induktionsfreier Belastung. Strom und Spannung im sekundären Kreis haben gleiche Form und gleiche Phase. Der primäre

---

[1]) Nach einer Aufnahme von Hospitalier mit seinem Wellenzeichner.

Strom zeigt noch deutlich die Form und Phasenverschiebung des Leerlaufstromes (ähnlich wie in Abb. 328). Abb. 332 zeigt die Wellen desselben Transformators bei größerer induktiver Belastung. Die beiden Ströme haben nahezu gleiche Form und Phasenverschiebung. Daß die Spannungswellen in Abb. 331 und 332 nicht ganz gleich sind, hat seinen Grund darin, daß die größere Stromstärke im zweiten Falle eine Beeinflussung der Spannungswelle im Stromerzeuger durch Ankerrückwirkung verursacht.

214. Formeln zur Ausrechnung einer zusammengesetzten Wellenform.

Um eine gegebene Welle in Form einer mathematischen Funktion auszudrücken, gibt es mehrere Methoden[1]). Alle Wellenformen mit Ausnahme der in Abb. 319 und 320 dargestellten, lassen sich durch folgende Gleichung darstellen, wenn man sich auf Glieder bis zur 11. Ordnung beschränkt,

$$y = \mathfrak{A}_1 \sin \omega t + \mathfrak{A}_3 \sin 3\,\omega t + \ldots\ldots + \mathfrak{A}_{11} \sin 11\,\omega t$$
$$+ \mathfrak{B}_1 \cos \omega t + \mathfrak{B}_3 \cos 3\,\omega t + \ldots\ldots + \mathfrak{B}_{11} \cos 11\,\omega t \quad . \quad \text{(I)}$$

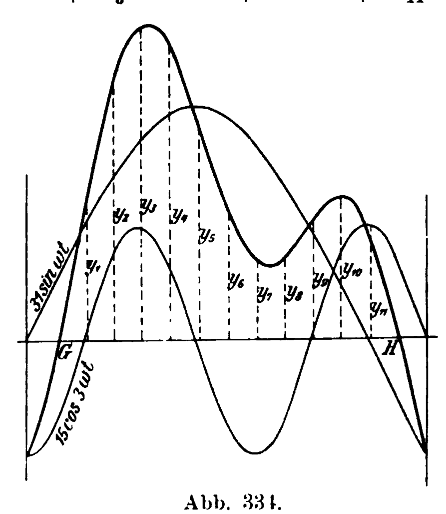


Abb. 334.

Zur Berechnung der Scheitelwerte $\mathfrak{A}_1 \ldots . \mathfrak{B}_1$ verfährt man in folgender Weise.

Man teilt die Grundlinie GH der halben Welle (Abb. 334) in

[1]) Eine Zusammenstellung der wichtigsten enthält das Buch von Orlich, „Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven". Heft 7 der „Elektrotechnik in Einzeldarstellungen".

12 gleiche Teile und mißt die Längen der Ordinaten y_1 bis y_{11} ab. Daraus bildet man zur Berechnung der $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3 \ldots$ folgende Werte

$$\begin{aligned} m_1 &= y_1 + y_{11} \\ m_2 &= y_2 + y_{10} \\ m_3 &= y_3 + y_9 \\ m_4 &= y_4 + y_8 \\ m_5 &= y_5 + y_7 \\ m_6 &= y_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 0{,}043\, m_1 & g &= 0{,}118\, m_3 \\ b &= 0{,}118\, m_1 & h &= 0{,}144\, m_4 \\ c &= 0{,}161\, m_1 & k &= 0{,}161\, m_5 \\ d &= 0{,}083\, m_2 & l &= 0{,}118\, m_5 \\ f &= 0{,}167\, m_2 & p &= 0{,}043\, m_5 \\ & & q &= 0{,}167\, m_6 \end{aligned}$$

und setzt sie in folgende Formeln ein

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= a + d + g + h + k + q \\ \mathfrak{A}_3 &= b + f + g - (l + q) \\ \mathfrak{A}_5 &= c + d + p + q - (g + h) \\ \mathfrak{A}_7 &= c + h + p - (d + g + q) \\ \mathfrak{A}_9 &= b + g + q - (f + l) \\ \mathfrak{A}_{11} &= a + g + k - (d + h + q) \end{aligned}$$

Zur Berechnung der $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_3 \ldots$ bildet man folgende Werte

$$\begin{aligned} n_1 &= y_5 - y_7 \\ n_2 &= y_4 - y_8 \\ n_3 &= y_3 - y_9 \\ n_4 &= y_2 - y_{10} \\ n_5 &= y_1 - y_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 0{,}043\, n_1 & \gamma &= 0{,}118\, n_3 \\ \beta &= 0{,}118\, n_1 & \varrho &= 0{,}144\, n_4 \\ \zeta &= 0{,}161\, n_1 & \varkappa &= 0{,}161\, n_5 \\ \delta &= 0{,}083\, n_2 & \lambda &= 0{,}118\, n_5 \\ \eta &= 0{,}167\, n_2 & \sigma &= 0{,}043\, n_5 \end{aligned}$$

und setzt sie in folgende Formeln ein

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \alpha + \delta + \gamma + \varrho + \varkappa \\ \mathfrak{B}_3 &= \lambda - (\beta + \eta + \gamma) \\ \mathfrak{B}_5 &= \zeta + \delta + \sigma - (\gamma + \varrho) \\ \mathfrak{B}_7 &= \delta + \gamma - (\zeta + \varrho + \sigma) \\ \mathfrak{B}_9 &= \beta + \gamma - (\eta + \lambda) \\ \mathfrak{B}_{11} &= \delta + \varrho - (\alpha + \gamma + \varkappa) \end{aligned}$$

Die Gl. (I) läßt sich mit Hilfe der Gl. 254, S. 406, in folgende Form bringen

$$y = \mathfrak{D}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \mathfrak{D}_3 \sin 3(\omega t + \varphi_3) + \ldots\ldots$$
$$+ \mathfrak{D}_{11} \sin 11(\omega t + \varphi_{11}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Beispiel. Wir berechnen die in Abb. 334 stark ausgezogene Wellenform. Für die Ordinaten y findet man durch Ausmessung folgende Werte

$y_1 = 18$, $y_2 = 34$, $y_3 = 41{,}4$, $y_4 = 39{,}7$, $y_5 = 29$, $y_6 = 17{,}5$, $y_7 = 10{,}4$, $y_8 = 10{,}8$, $y_9 = 15{,}8$, $y_{10} = 18{,}8$, $y_{11} = 13$

$m_1 = 31$, $m_2 = 52{,}8$, $m_3 = 57{,}2$, $m_4 = 50{,}5$, $m_5 = 39{,}4$, $m_6 = 17{,}5$

$a = 1{,}33$, $b = 3{,}7$, $c = 5{,}0$, $d = 4{,}4$, $f = 8{,}8$, $g = 6{,}74$, $h = 7{,}3$, $k = 6{,}34$, $l = 4{,}62$, $p = 1{,}7$, $q = 2{,}9$

$\mathfrak{A}_1 = 29 \qquad \mathfrak{A}_3 = 11{,}7$

Alle anderen $\mathfrak{A}$ werden null.

$n_1 = 18{,}6$, $n_2 = 29$, $n_3 = 25{,}6$, $n_4 = 15{,}2$, $n_5 = 5$

$\alpha = 0{,}8$, $\beta = 2{,}2$, $\zeta = 3$, $\delta = 2{,}5$, $\eta = 4{,}84$, $\gamma = 3{,}02$, $\varrho = 2{,}2$, $\varkappa = 0{,}81$, $\lambda = 0{,}59$, $\sigma = 0{,}22$

$\mathfrak{B}_1 = 9{,}33 \qquad \mathfrak{B}_3 = -9{,}47$

Alle anderen $\mathfrak{B}$ werden null.

Die Gleichung der Welle ist also

$$y = 29 \sin \omega t + 11{,}7 \sin 3\,\omega t + 9{,}33 \cos \omega t - 9{,}47 \cos 3\,\omega t.$$

Um sie auf die Form II zu bringen, benutzen wir die Gl. 254, S. 406, und erhalten

$$\mathfrak{D}_1 = \sqrt{29^2 + 9{,}33^2} = 30{,}6 \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{9{,}33}{29} = 0{,}322 \qquad \varphi_1 = 17^\circ 50'$$

$$\mathfrak{D}_3 = \sqrt{11{,}7^2 + 9{,}47^2} = 15 \qquad \operatorname{tg} 3\varphi_3 = -\frac{9{,}47}{11{,}7} = -0{,}81 \qquad 3\varphi_3 = -39^\circ$$
$$\varphi_3 = -13^\circ$$

$$y = 30{,}6 \sin(\omega t + 17^\circ 50') + 15 \sin 3(\omega t - 13^\circ).$$

Verschiebt man nun den Nullpunkt um $-17^\circ 50'$, so erhält man (abgerundet)

$$y = 30{,}6 \sin \omega t + 15 \sin 3(\omega t - 30)$$

oder

$$y = 30{,}6 \sin \omega t - 15 \sin(90 - 3\,\omega t)$$
$$y = 30{,}6 \sin \omega t - 15 \cos 3\,\omega t.$$

Vierzehntes Kapitel.

Der Durchgang der Elektrizität durch Nichtleiter.

---

215. Verschiedene Arten des Elektrizitätsdurchganges durch ein Gas[1]).

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die Luft und sonstige die elektrischen Leiter umgebenden Gase absolute Isolatoren seien, d. h. daß sie die Elektrizität nicht im geringsten zu leiten vermögen, sondern daß sie nur in einen Zwangs- oder Spannungszustand versetzt werden, welcher bei ruhender Elektrizität durch die elektrischen, bei strömender Elektrizität außerdem noch durch die magnetischen Kraftlinien charakterisiert ist. In § 38 wurde aber bereits bemerkt, daß es absolute Isolatoren nicht gibt, sondern bei genügender Potentialdifferenz erhält jeder Stoff ein gewisses Leitungsvermögen. Insbesondere zeigen die gasförmigen Stoffe unter gewissen Umständen, die im folgenden behandelt werden, ein ausgesprochenes Leitungsvermögen, so daß ein elektrischer Strom durch sie hindurchgehen kann, der sich in verschiedener Weise bemerkbar macht.

Jene Grenzflächen, wo die Elektrizität aus einem metallischen oder elektrolytischen Leiter in das Gas ein- oder austritt, nennt man Elektroden, und man bezeichnet ebenso wie bei der Elektrolyse jene Elektrode, bei welcher der Strom in das Gas eintritt, also die, welche mit dem positiven Pol der Stromquelle verbunden ist, als Anode, und jene, bei welcher der Strom das Gas verläßt,

---

[1]) Eine Zusammenstellung der Forschungsergebnisse bis zum Jahre 1902 enthält das Buch von J. Stark, „Die Elektrizität in Gasen", und bis zum Jahre 1903 das Buch von J. J. Thomson, „Elektrizitätsdurchgang in Gasen", deutsch von E. Marx. Dieses Buch ist spezifisch englisch.

also die, welche mit dem negativen Pol der Stromquelle verbunden ist, als Kathode. Die zwischen den Elektroden bestehende Potentialdifferenz (Spannung) bezeichnet man als Elektrodenspannung.

Je nachdem, ob ein Stromdurchgang durch das Gas von selbst, d. h. nur unter dem Einfluß der Elektrodenspannung eintritt, oder ob er durch äußere Einflüsse (hohe Temperatur, Bestrahlung des Gases usw.) hervorgerufen wird, unterscheidet man selbständige und unselbständige Strömung der Elektrizität (§ 225 und ff.). Zur selbständigen Strömung gehört also z. B. die Funkenentladung.

Am auffälligsten macht sich die elektrische Strömung in Gasen durch Lichterscheinungen bemerkbar, und man unterscheidet in dieser Hinsicht: Glimmentladung, Büschelentladung, Funkenentladung, Lichtbogen und endlich, wenn eine Lichterscheinung nicht bemerkbar ist, dunkle Entladung. Die Entladung aus einer spitzen Elektrode bezeichnet man im besonderen noch als Spitzenentladung, die alle vorstehenden Erscheinungsformen haben kann.

Einen näheren Aufschluß über die Elektrizitätsleitung in Gasen erhielt man, als man darauf die Webersche Anschauung vom atomistischen Wesen der Elektrizität und die Clausiussche Anschauung über die elektrolytische Leitung anwandte. Diese bilden auch die Grundlage der Elektronentheorie.

Wir beginnen im folgenden mit dem Durchgang der Elektrizität durch verdünnte Gase in sogenannten Entladungsröhren, also mit einer selbständigen Strömung, weil sich hier die Eigentümlichkeiten am deutlichsten zeigen und freie Elektrizität auftritt.

216. Entladung in verdünnten Gasen.

Schließt man eine Glasröhre mit zwei Elektroden an eine Stromquelle an, welche eine Spannung von mehreren Tausend Volt bei gleichbleibender Richtung liefert (Hochspannungsbatterie, Elektrisiermaschine, Funkeninduktor, welcher nur Öffnungsfunken zur Geltung bringt), und verbindet sie durch einen Ansatz mit einer Luftpumpe, so kann man die Abhängigkeit der Entladungsvorgänge von der Gasdichte bequem verfolgen. Hat die Luft in der Röhre noch die gewöhnliche Dichte (Atmosphärendruck), so geht kein Strom über, außer die Elektrodenspannung wird so hoch gesteigert, daß die gewöhnliche Funkenentladung eintritt. Wird die Luft durch Auspumpen soweit verdünnt, daß der Druck auf etwa 40 mm Quecksilbersäule sinkt, so geht schon bei wesentlich kleinerer Spannung eine Entladung in Form eines dünnen leuchtenden Fadens über.

Mit weiter abnehmender Dichte wird der Faden immer breiter und erfüllt schließlich fast den ganzen Querschnitt der Röhre. Man hat jetzt (bei etwa 5—3 mm Druck) das bläuliche Licht der Geißlerschen [1]) Röhren, wie es zuerst von Plücker beobachtet und studiert wurde. Ist statt Luft ein anderes Gas in der Röhre enthalten, so hat das Licht eine etwas andere Farbe. Betrachtet man es durch ein Spektroskop, so sieht man das Spektrum des betreffenden Gases. Diese zwischen den beiden Elektroden gleichmäßig verlaufende Lichtsäule hat alle Eigenschaften eines gewöhnlichen elektrischen Stromes in einem leicht biegsamen Leiter. Bringt man z. B. einen Magnet so in die Nähe der Röhre, daß sie von seinen Kraftlinien gekreuzt wird (Abb. 335), so wird die Lichtsäule derart ausgebaucht, daß die Krümmungsebene senkrecht zu den Kraftlinien steht gemäß § 85. Wird die eine Hälfte eines Stabmagnetes in ein Glasgefäß (Abb. 336) eingeschlossen, in welchem die untere Elektrode den Stab ringförmig umschließt, und wird nun die Luft ausgepumpt, so kreist der zwischen den beiden Elektroden verlaufende Lichtstreifen beständig um den Magnet; ebenso wie nach dem Biot-Savartschen Gesetz (§ 78) jedes Stück eines stromführenden Leiters senkrecht zu der durch den Magnetpol und den Leiter gelegten Ebene abgestoßen wird, so erfährt auch hier der Lichtstreifen eine solche Abstoßung.

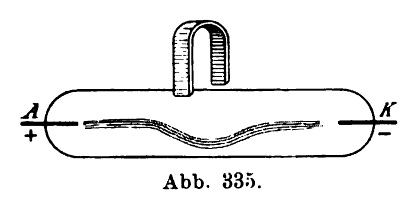
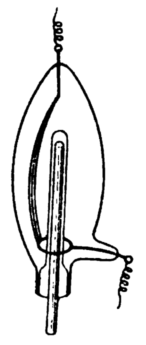


Abb. 335.


Abb. 336.

Wird die Luft weiter verdünnt, so erhält man bei etwa 0,1 mm Druck ein wesentlich anderes Bild der Entladung (Abb. 337 und 338). Das Licht erfüllt nicht mehr die ganze Länge der Röhre, sondern in der Nähe der Kathode K ist es von einem dunklen Raum unterbrochen, der um so länger ist, je verdünnter das Gas ist. Man unterscheidet dann folgende Teile. Von der Anode bis etwa zur Mitte der Röhre (a bis b) zeigt sich eine rötliche Lichtsäule, zuweilen mit mehreren deutlichen Schichten (Abb. 337), zuweilen ohne diese

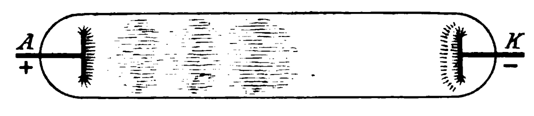


Abb. 337.

[1]) Geißler war der Glasbläser, der die Röhren nach den Angaben Plückers anfertigte.

(Abb. 338), die man als positive Lichtsäule oder positives Licht schlechtweg bezeichnet. Dann folgt der dunkle Raum (zwischen *b* und *c*), auch Faradayscher Dunkelraum genannt, der sich bis in die Nähe der Kathode erstreckt. An der Kathode befindet sich das negative Glimmlicht (*c* bis *d*), an dem sich drei Schichten unterscheiden lassen: unmittelbar auf der Kathodenoberfläche sitzt eine dünne Schicht rötlichgelben Lichtes, das als erste Kathodenschicht bezeichnet wird. Darauf folgt eine dunkle Schicht, der sogenannte dunkle Kathodenraum, und darauf folgt die zweite leuchtende Schicht, die als zweite Kathodenschicht oder als Glimmschicht bezeichnet wird und die sich allmählich in den Faradayschen Dunkelraum verliert.

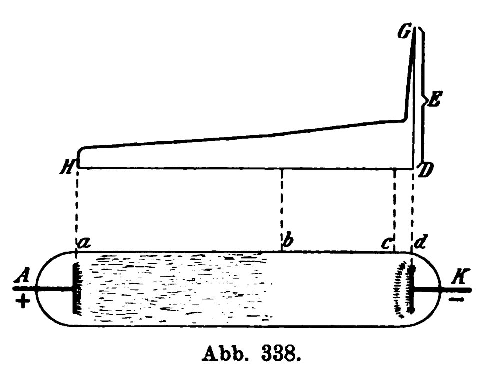


Abb. 338.

Läßt man die Entladung längere Zeit durch eine solche Röhre gehen, so wird die anfangs glatte Kathode rauh, und die benachbarte Glaswand überzieht sich mit einem feinen Belag. Daraus geht hervor, daß die Kathode durch die Entladung zerstäubt wird.

Ist die Kathode groß genug, um eine größere Ausbreitung des Glimmlichtes zu ermöglichen, so nimmt der von ihm bedeckte Teil der Kathodenoberfläche mit der Stromstärke zu, jedoch nur unter der Voraussetzung, daß der Gasdruck konstant ist. Diese Eigenschaft wird zur Darstellung der Wellenform von Wechselströmen benützt (§ 280). Wird hingegen Stromstärke und Temperatur konstant gehalten, so ist die bedeckte Fläche dem Gasdruck umgekehrt proportional.

Wird die Luft in der Röhre noch weiter ausgepumpt, so verlängert sich das negative Glimmlicht, während das positive Licht zurücktritt und der Dunkelraum immer länger wird. Indem das positive Licht schließlich fast ganz verschwindet (bei etwa 0,01 mm Druck), breiten sich von der Kathode schwach bläuliche, geradlinige Strahlen aus, welche dort, wo sie auf die Glaswand treffen, je nach der Glassorte ein grünliches oder bläuliches Fluoreszenzlicht[1]) hervorrufen. Es sind dies die von Plücker entdeckten und von Hittorf

[1]) Bei leicht schmelzbarem, thüringischem Natron-Glas ist das Fluoreszenzlicht grünlich, beim schwer schmelzbaren englischen Kali-Glas ist es bläulich.

studierten Kathodenstrahlen. Daher werden Röhren mit so geringer Gasdichte als Hittorfsche Röhren bezeichnet.

Beobachtet man während des fortgesetzen Auspumpens der Röhre die Elektrodenspannung, d. h. jene Klemmenspannung, welche notwendig ist, um die beschriebenen Entladungserscheinungen hervorzubringen, so findet man, daß sie bis zu einem geringsten Wert — beim gleichmäßigen Geißlerschen Licht — abnimmt und von da an wieder steigt, und zwar um so rascher, je geringer der Druck wird.

217. Spannungsgefälle in Entladungsröhren.

Längs eines linearen Leiters AC (Abb. 55, S. 70) von gleichmäßigem Widerstand ändert sich das Potential gleichmäßig, so daß der Verlauf des Potentiales durch eine gerade Linie FC dargestellt wird, wobei $AF = E$ die Potentialdifferenz oder Spannung zwischen den Punkten AC bedeutet. Den Spannungsabfall auf der Längeneinheit des Leiters bezeichnet man als Spannungsgefälle oder Potentialgradient. Unter der obigen Voraussetzung, daß der Leiter gleichmäßigen Widerstand hat, ist das Spannungsgefälle an allen Stellen des Leiters dasselbe, und zwar gleich dem Verhältnis $\frac{E}{AC}$. In solchen Leitern aber, wo der Widerstand nicht gleichmäßig ist, hat das Spannungsgefälle an verschiedenen Stellen verschiedenen Wert. Dies ist der Fall bei allen Arten des Elektrizitätsdurchganges durch ein Gas.

In Abb. 338 stellt die Kurve GH den Verlauf des Potentiales längs einer Entladungsröhre von gleichem Querschnitt dar, und zwar bei der darunter dargestellten Entladungsform. DG ist gleich der an die Klemmen der Röhre angelegten Klemmenspannung E. Der Verlauf des Potentiales ist dadurch festgestellt worden, daß an verschiedenen Stellen der Röhre Sonden aus dünnem Platindraht eingeschmolzen wurden, so daß die Spannung zwischen diesen und den Elektroden gemessen werden konnte. Wie man sieht, ist der Spannungsabfall auf einem ganzen kurzen Stück unmittelbar an der Kathode und unmittelbar an der Anode sehr groß, und zwar an jener noch beträchtlich größer als an dieser. Dagegen ist er auf dem ganzen dazwischenliegenden Teil der Röhre gering und insbesondere im negativen Glimmlicht verschwindend klein, da die Potentialkurve hier nahezu parallel zur Grundlinie verläuft. Der durch seine Größe auffallende Spannnungsabfall an der Kathode — kurz Kathodenfall genannt — findet statt zwischen der Kathode

und einem Punkt der negativen Glimmschicht, d. h. er findet statt in der ersten Kathodenschicht und im dunklen Kathodenraum.

Hinsichtlich der Abhängigkeit des Kathodenfalles von den Bestimmungsgrößen ist zu unterscheiden zwischen normalem und abnormalem Kathodenfall. Der erstere besteht, solange die Kathode noch nicht ganz mit Glimmlicht bedeckt ist, der letztere, wenn sie bereits ganz mit Glimmlicht bedeckt ist, so daß sich letzteres auch bei starker Steigerung der Elektrodenspannung und Stromstärke auf der Kathodenoberfläche nicht weiter ausbreiten kann. Der normale Kathodenfall ist eine von der Stromstärke und Gasdichte unabhängige, dagegen der Art des Gases und der Kathode eigentümliche Konstante. So beträgt er z. B. bei Platin in Wasserstoff 300 V., in Sauerstoff 270 V., in Stickstoff 230 V., in Ammoniak 480 V. Dagegen bei Magnesium in Stickstoff 207 V., bei Kalium in Stickstoff 170 V.

Der abnormale Kathodenfall nimmt mit wachsender Stromstärke und mit abnehmender Gasdichte zu.

Der Spannungsabfall unmittelbar an der Anode — kurz Anodenfall genannt — liegt in der Regel zwischen 20 und 40 V. Er hängt von der Art des Gases und der Anode, sowie von der Gasdichte und Stromstärke ab.

Die Summe aus Kathodenfall und Anodenfall gibt jene Spannung, welche mindestens notwendig ist, um eine Entladung in dem betreffenden Gas, zwischen den betreffenden Elektroden hervorzubringen, selbst wenn diese einander so nahe sind, daß nur die ersten Schichten des negativen Glimmlichtes und des positiven Lichtes möglich sind. Bei einem größeren Abstand der Elektroden kommt hierzu noch der Spannungsabfall auf dem dazwischenliegenden Teil, der um so größer ist, je größer der Elektrodenabstand ist. Die ganze Elektrodenspannung setzt sich also aus einem konstanten und einem veränderlichen Teil zusammen.

Ist der Abstand der Elektroden kleiner als die erste Kathodenschicht und der dunkle Kathodenraum, so daß die Anode in diesen hineinragt, so tritt ein Elektrizitätsübergang schon bei kleinerer Spannung ein als den oben angegebenen Werten.

218. Die Eigenschaften der Kathodenstrahlen.

Außer in der Glaswand der Röhre, in welcher die Kathodenstrahlen erzeugt werden (§ 216), rufen sie auch in zahlreichen anderen Stoffen, die in eine solche Röhre eingeschlossen sind, zum Teil sehr lebhaftes, verschiedenfarbiges Fluoreszenzlicht hervor. Sie

werden auch nur dadurch deutlich sichtbar, denn das bläuliche Licht im Gas selbst, das in § 216 erwähnt wurde, ist sehr schwach.

Ihre wichtigste Eigenschaft, wodurch sie im Gegensatz zu den anderen Entladungserscheinungen bei größerer Gasdichte stehen, ist die, daß sie senkrecht von der Kathodenoberfläche ausgehen und sich nur geradlinig fortpflanzen, wenn nicht äußere Störungen hinzutreten. Diese geradlinige Fortpflanzung hat zur Folge, daß sie Schatten werfen wie die Lichtstrahlen. Bringt man einen undurchlässigen Körper, z. B. ein Kreuz aus Metall (Abb. 339) in den Weg der Kathodenstrahlen, so zeigt sich der Schatten des Kreuzes auf der fluoreszierenden Glaswand gegenüber der Kathode. Dagegen würde sich das negative Glimmlicht und das positive Licht um die Ränder des Kreuzes herum ausbreiten. Noch auffälliger zeigt sich die geradlinige Fortpflanzung der Kathodenstrahlen in einer winklig gebogenen Röhre (Abb. 340). Ist diese noch nicht soweit ausgepumpt, daß Kathodenstrahlen auftreten, so verläuft die leuchtende Entladung im Weg der Röhre um die Ecke herum. Wenn aber Kathodenstrahlen auftreten, so breiten sich diese von der Kathode K nur bis zu der gegenüberliegenden Stelle D der Glaswand aus, wo sie das Fluoreszenzlicht hervorrufen.

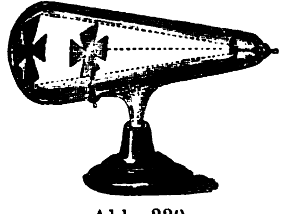


Abb. 339.

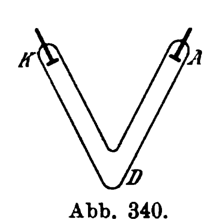


Abb. 340.

Die Kathodenstrahlen erwärmen jenen Teil eines Körpers, auf den sie auffallen. Bei genügend starker Entladung werden die von ihnen getroffenen Teile der Glaswand der Röhre so heiß, daß das Glas weich wird und von dem äußeren Luftdruck eingedrückt wird. Ein von den Kathodenstrahlen getroffenes Platinblech im Innern der Röhre kann zum Glühen gebracht werden.

Die Kathodenstrahlen werden von allen festen und flüssigen Stoffen sehr stark absorbiert, selbst von der dünnsten Glaswand, so daß es nicht möglich ist, ihre Existenz außerhalb der Glasröhre, in der sie erzeugt wurden, nachzuweisen. Nur durch ein äußerst dünnes Metallplättchen, das in die Glaswand eingeschmolzen ist (Lenardsches Fenster), gehen sie in ganz geringer Stärke hindurch.



Abb. 341.

Die Kathodenstrahlen vermögen auch mechanische Kräfte auszuüben. Bringt man ein leicht drehbares Rädchen mit Schaufeln aus Glimmerplättchen derart in eine weite Röhre (Abb. 341), daß

die Kathodenstrahlen nur die oberen Schaufeln treffen, so dreht sich das Rädchen.

Aus diesen Erscheinungen kam Crookes zu der Anschauung, daß die Kathodenstrahlen aus fortgeschleuderten Teilchen der Kathode bestehen, die aber noch bedeutend feiner als im gasförmigen Zustande sind. Er nahm an, daß hier ein vierter Aggregatzustand vorhanden sei und bezeichnete ihn als strahlende Materie. Wie wir später (§ 220) sehen werden, ist diese Anschauung nicht weit von der jetzt herrschenden entfernt.

Wie schon Hittorf zeigte, werden die Kathodenstrahlen von einem Magnet sehr stark beeinflußt. Am deutlichsten läßt sich das durch die in Abb. 342 dargestellte Röhre zeigen. Vor der Kathode befindet sich ein Glimmerschirm mit einem schmalen Spalt, so daß von den Kathodenstrahlen nur ein schmales Bündel hindurchgelassen wird. In der Längsrichtung der Röhre befindet sich eine Glimmerwand, die mit einem fluoreszierenden Stoff bestrichen ist, so daß darauf das aus dem Spalt auftretende Kathodenstrahlbündel als geradliniger Lichtstreifen sichtbar wird. Wird nun ein Magnet so in die Nähe gebracht, daß die Kraftlinien senkrecht zu dem Streifen und zur Glimmerwand verlaufen, so wird der Streifen, je nach der Richtung der Kraftlinien, nach oben oder nach unten abgelenkt. Nach der Ablenkung behält der Strahl die letzt erhaltene Richtung bei, wie ein Stab, der an einem Ende befestigt ist und an einer Stelle gebogen wird. Es besteht mithin ein Unterschied gegenüber der magnetischen Beeinflussung, welche ein bei größerer Gasdichte auftretender Entladungsstreifen (Geißlersche Röhre Abb. 335) oder ein gewöhnlicher Lichtbogen (§ 85) erfährt. Diese werden durch das magnetische Feld ausgebuchtet, wie ein an beiden Enden befestigtes elastisches Band.

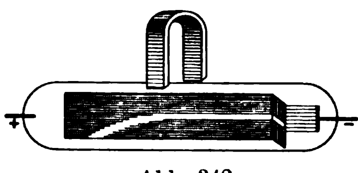


Abb. 342.

Auch durch die elektrischen Kraftlinien eines elektrostatischen Feldes werden die Kathodenstrahlen abgelenkt, wie zuerst von Jaumann festgestellt wurde, und zwar je nach der Richtung der Kraftlinien, in der einen oder in der entgegengesetzten Richtung. Durch elektrometrische Messung wurde festgestellt, daß die Kathodenstrahlen negative Elektrizität mit sich führen (§ 222). Daraus erklärt sich die Ablenkung durch ein elektrostatisches Feld.

Die merkwürdigste Eigenschaft der Kathodenstrahlen ist die im folgenden beschriebene Erzeugung einer anderen Strahlengattung, der Röntgenstrahlen.

Es ist bereits gelungen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kathodenstrahlen zu bestimmen, und da hat sich ergeben, daß diese Geschwindigkeit unter sonst gleichen Umständen um so größer ist, je größer die Elektrodenspannung ist; und weil diese (wenn bereits Kathodenstrahlen vorhanden sind) mit abnehmendem Druck zunimmt (§ 216), so nimmt die Geschwindigkeit mit abnehmendem Druck zu. Das erklärt sich daraus, daß der Bewegungswiderstand um so geringer ist, je dünner die Luft ist. Die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen in solchen Röhren liegt zwischen $2 \cdot 10^9$ bis $6 \cdot 10^9$ cm, das ist $^1/_{15}$ bis $^1/_5$ der Lichtgeschwindigkeit. Mittels anderer Methoden hat man aber auch Kathodenstrahlen von viel kleinerer Geschwindigkeit ($8 \cdot 10^7$ cm) erhalten.

219. Röntgenstrahlen.

Fallen die Kathodenstrahlen auf irgend einen festen Körper, z. B. die Glaswand der Röhre, in welcher sie erzeugt werden, oder auf eine zu diesem Zweck innerhalb der Röhre besonders angebrachte Metallplatte, so geht von den getroffenen Stellen eine neue Art unsichtbarer Strahlen aus, die zuerst von Röntgen im Jahre 1895 beobachtet und daher nach ihm benannt wurden. Sie haben wesentlich andere, zum Teil entgegengesetzte Eigenschaften wie die Kathodenstrahlen. Sie werden weder von einem magnetischen noch von einem elektrischen Felde beeinflußt; ferner werden sie von den meisten Stoffen nur wenig absorbiert, sondern mehr oder weniger von ihnen durchgelassen. Nur die allerdichtesten, wie insbesondere Blei und Platin, absorbieren die Röntgenstrahlen so stark, daß selbst durch dünne Platten nichts hindurchgeht. Im allgemeinen lassen die verschiedenen Stoffe Röntgenstrahlen um so besser hindurch, je geringer ihre Dichte ist. Bei gleicher Dichte ist daher die Durchlässigkeit nahezu gleich; so gehen sie z. B. durch Aluminium ebensogut hindurch wie durch Glas. Der Aggregatzustand eines Stoffes hat keinen Einfluß auf die Durchlässigkeit; so ist sie z. B. für Wasser und Eis fast gleichgroß, aber für ersteres etwas geringer, weil es etwas dichter ist. Die größte Durchlässigkeit hat weiches Holz. Von größter Wichtigkeit ist diese Eigenschaft für die Heilkunde geworden. Da Knochen und Fleisch, sowie die verschiedenen Gewebe des menschlichen Körpers verschiedene Dichte und daher auch verschiedene Durchlässigkeit haben, so ist es möglich, Schattenbilder der Röntgenstrahlen zu erhalten, welche die Umrisse der Teile von verschiedener Durchlässigkeit zeigen. Da aber die Röntgenstrahlen vom Auge nicht wahrgenommen werden, so können diese Umrisse nur sicht-

bar gemacht werden, wenn man das Schattenbild auf eine photographische Platte fallen läßt und diese dann ebenso entwickelt wie eine belichtete Platte, denn auf die photographischen Platten wirken Röntgenstrahlen ebenso wie Lichtstrahlen. Die Röntgenstrahlen rufen auf manchen Stoffen, auf die sie auffallen, Fluoreszenzlicht hervor; am stärksten auf Bariumplatinzyanür. Bestreicht man damit einen Papierschirm und stellt einen Körper zwischen diesen und eine Röntgenstrahlen aussendende Röhre, so sieht man in einem verdunkelten Raum das Schattenbild unmittelbar mit den Augen.

Um möglichst starke Röntgenstrahlung zu erzielen, gibt man der Entladungsröhre die in Abb. 343 dargestellte Form, die **Röntgenröhre** genannt wird. Von der Kathode K, die ein Stück einer Kugelschale bildet, gehen die Kathodenstrahlen aus und bilden ein kegelförmiges Bündel, dessen Spitze auf jene Metallfläche B auffällt, von der die Röntgenstrahlen ausgehen sollen, und die man als **Antikathode** bezeichnet. Von dieser gehen nun die Röntgenstrahlen nach allen Richtungen geradlinig aus, wie z. B. die Lichtstrahlen von einem glühenden Metallblech. Man hat also ein Strahlungszentrum, das sich zur Herstellung scharfer Schattenrisse gut eignet. Da die Röntgenstrahlen im Glas ein schwach grünliches Fluoreszenzlicht hervorrufen, kann man den Kegelwinkel des von der Antikathode ausgehenden Strahlenbündels erkennen. Die Antikathode B wird in der Regel mit der Anode leitend verbunden, so daß in Wirklichkeit beide Anoden sind.

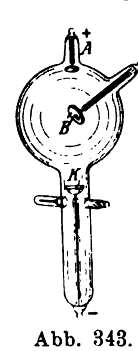


Abb. 343.

Das für Lichtstrahlen geltende Emissionsgesetz, daß nämlich jene Stoffe, welche das stärkste Absorptionsvermögen haben, auch die stärkste Ausstrahlung (Emission) zeigen, gilt auch für Röntgenstrahlen. Es wäre daher am besten, die Antikathode aus Blei herzustellen. Da Blei aber durch die auftreffenden Kathodenstrahlen leicht zum Schmelzen gebracht wird, und das nächstbeste Metall — Platin — zu teuer ist, verwendet man Nickel oder Kupfer, allenfalls mit einem Platinüberzug. Bei Röntgenröhren für besonders starke Wirkung werden aber selbst diese Metalle glühend. Man wendet daher sehr große Metallmassen oder sogar Wasserkühlung bei der Antikathode an.

Es ist bereits gelungen, die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen zu bestimmen, und sie hat sich ungefähr gleich der der Lichtgeschwindigkeit ergeben.

So wie es verschiedene Lichtstrahlen (Farben) gibt, die von einem und demselben Körper in verschiedener Stärke durchgelassen

und absorbiert werden, so gibt es auch Röntgenstrahlen von verschiedenem Durchdringungsvermögen. Dieses ist um so größer, je größer die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen ist, von denen sie erzeugt werden. Und da letztere um so größer ist, je größer die Elektrodenspannung und je kleiner der Druck in der Röhre ist, so nimmt das Durchdringungsvermögen der Röntgenstrahlen mit diesen Größen zu. Je größer das Durchdringungsvermögen der Röntgenstrahlen ist, desto weniger Kontraste zeigen die von ihnen herrührenden Schattenbilder, weil auch die dichteren Stoffe durchdrungen werden. Röntgenröhren, welche solche Strahlen aussenden, werden als weiche bezeichnet. Das sind also solche mit geringerem Druck und daher höherer Elektrodenspannung. Umgekehrt, je geringer das Durchdringungsvermögen, desto kontrastreicher, d. h. desto härter sind die Schattenbilder. Demnach sind harte Röhren solche mit größerem Druck und daher kleinerer Elektrodenspannung.

220. Die Elektronentheorie.[1]

Zur Erklärung der inneren Vorgänge beim Durchgang der Elektrizität durch Gase ist es notwendig, auf das Wesen der Elektrizität einzugehen. In § 1 wurde der ältesten Anschauung Erwähnung getan, wonach die Elektrizität ein außerordentlich leichter Stoff (Fluidum) ist. Diese Anschauung von der stofflichen Natur der Elektrizität war zu einfach, als daß sie dauernde Anerkennung gefunden hätte, trotzdem Wilhelm Weber und Hittorf der heutigen Auffassung schon ziemlich nahe gekommen waren. Da sich Wärme und Licht als nicht stofflicher Art, sondern als Energiezustände der materiellen Stoffe bzw. des Äthers erwiesen hatten, wurde namentlich unter dem Einfluß von Maxwell und Hertz die energetische Hypothese aufgebaut, wonach Elektrizität und Magnetismus als Energiezustände des Äthers aufzufassen seien. Besonders englische Physiker gingen darin so weit, daß sie den elektrischen Strom in metallischen Leitern nicht als einen Vorgang im Leiter selbst, sondern als Energieänderungen im Dielektrikum betrachteten.

Nach den Ergebnissen der jüngsten Forschungen ist die Elektrizität zweifellos ein Stoff, wobei es aber auch heute noch unentschieden ist, ob es zwei Arten dieses Stoffes mit entgegen-

[1]) Wer sich eingehender über diese Theorie, insbesondere über ihren Werdegang unterrichten will, sei auf den Vortrag von Lorentz (Leiden), ETZ 1905, Heft 24 u. 25, und auf das Buch von Schmidt: „Die Kathodenstrahlen", Braunschweig, 1904, verwiesen; oder auf das Buch von Righi „Die moderne Theorie der physikalischen Erscheinungen". Leipzig, 1905.

gesetzten Eigenschaften (positiv und negativ) gibt, oder ob nur eine Art vorhanden ist, und die entgegengesetzte Ladung eines Körpers als ein Mangel dieses Stoffes gegenüber dem neutralen, unelektrischen Zustand zu betrachten sei. Doch neigt man gegenwärtig mehr der letzteren Ansicht zu.

So wie die chemischen Stoffe aus Atomen, als letzten unteilbaren Teilchen, zusammengesetzt sind, besteht auch die Elektrizität aus einzelnen kleinsten Teilchen, die man „Elementarquantum" oder „Elektron" nennt. Diese Anschauung vom atomistischen Wesen der Elektrizität ist von W. Weber bereits deutlich ausgesprochen worden. Der Fortschritt in dieser Anschauungsweise seit Weber besteht nur darin, daß man die Elektrizitätsmenge (Ladung) eines solchen Elektrons und seine Masse zahlenmäßig bestimmen konnte. Und zwar ist die Ladung eines negativen Elektrons ungefähr $3{,}5 \cdot 10^{-10}$ elektrostatische Einheiten oder $1{,}2 \cdot 10^{-19}$ Coulomb und seine Masse ungefähr gleich einem Zweitausendstel der Masse eines Wasserstoffatoms, das sind $7{,}5 \cdot 10^{-28}$ Gramm. Diese Masse ist aber nicht durch Messung mittels der Wage, wie die eines chemischen Atoms, sondern auf indirektem Wege ermittelt worden, und zwar aus dem Grade der Ablenkung, die ein Kathodenstrahl in einem magnetischen und in einem elektrischen Felde von bekannter Stärke erfährt. Daher ist es noch zweifelhaft, ob diese Masse eines Elektrons eine wirkliche wie bei einem chemischen Atom ist oder eine scheinbare, elektrodynamische, die mit den wirklichen Massen nur das gemeinsam hat, daß sie Trägheit oder Beharrungsvermögen besitzt. [1]) Daß man die nur auf indirektem Wege ermittelte Masse eines Elektrons nicht ohne weiteres als wirkliche Masse betrachten darf, hat seinen Grund darin, daß bei den chemischen Stoffen die Masse definiert ist durch das konstante Verhältnis von Kraft zu Beschleunigung $\left(m = \frac{F}{g}\right)$ bei den Elektronen aber hat sich ergeben, daß dieses Verhältnis nicht konstant, sondern von der Geschwindigkeit abhängig ist.

---

[1]) Zunächst erscheint es unmöglich, sich ein Beharrungsvermögen denken zu können, das nicht an wirkliche chemische Masse gebunden ist. Wenn man aber bedenkt, daß das Beharrungsvermögen oder die Trägheit nichts anderes ist als eine Eigenschaft, welche besagt, daß ein Körper jeder Änderung seines Bewegungszustandes einen gewissen Widerstand entgegensetzt, so findet man, daß es etwas ähnliches beim elektrischen Strom gibt. Nach dem Lenzschen Gesetze wird ja bei jeder Änderung eines Stromes ein solcher sekundärer Strom induziert, daß er diese Änderung zu hindern sucht. Es tritt also ein Widerstand (und zwar ein Bewegungswiderstand im mechanischen Sinne, nicht Ohmscher Widerstand) gegen diese Änderung auf, ohne daß der elektrische Strom aus wirklicher chemischer Masse besteht.

Vergleicht man mit der oben angegebenen Ladung eines negativen Elektrons, die am Schlusse des § 60 angegebene Ladung eines elektrolytischen Jons, so findet man sie nahezu gleich. Diese Übereinstimmung ist keine zufällige, sondern es hat sich auch auf andere Weise ergeben, daß das hier erwähnte, Elektron genannte, Elementarquantum dasselbe ist, welches mit einem neutralen chemischen Atom oder Atomgruppe zusammen das elektrolytische Jon bildet.

Nach der kinetischen Gastheorie ist die Größe einer Molekel (als Kugel betrachtet) etwa ein Millionstel eines Millimeters. Nach den Berechnungen der Elektronentheorie ist die Größe eines Elektrons etwa ein Billionstel eines Millimeters.

221. Der elektrische Strom in metallischen Leitern als Strom freier Elektronen.

Die Elektronen können frei beweglich oder an chemische Atome oder Atomgruppen gekettet vorkommen. Den elektrischen Strom in einem Metalle hat man sich vorzustellen als eine Strömung freier Elektronen, welche durch die Zwischenräume zwischen den chemischen Atomen hindurchgeht. Hält man an dem Vorhandensein zweier Elektrizitätsarten fest, so geht ein Strom positiver Elektronen vom positiven zum negativen Pol und gleichzeitig ein Strom negativer Ionen in entgegengesetzter Richtung. Nimmt man aber an, daß es nur eine Art Elektrizität gibt, so ist es die negative, und der elektrische Strom besteht in einem Strom negativer Elektronen vom negativen zum positiven Pol.

Dem Durchströmen der Elektronen durch die Zwischenräume zwischen den Atomen steht natürlich ein gewisser Reibungswiderstand entgegen, der im Ohmschen Gesetz als Ohmscher Widerstand erscheint. Der dabei auftretende Reibungsverlust setzt sich in Wärme um; das ist die Joulesche oder Stromwärme.

Die Stromstärke ist definiert als die in einer Sekunde durch den Querschnitt eines Leiters fließende Elektrizitätsmenge. Diese ist um so größer, je größer die Anzahl der Elektronen in einer Volumseinheit ist und je schneller sie strömen. Da die magnetische Wirkung eines elektrischen Stromes seiner Stromstärke proportional ist, so gelangen wir zu dem Ergebnis, daß die magnetische Wirkung eines einzelnen bewegten Elektrons seiner Geschwindigkeit proportional ist. Das muß natürlich auch von jeder beliebigen Anzahl von Elektronen gelten, die z. B. die Ladung einer Kugel bilden. Wird also eine geladene Kugel in einer Kreisbahn bewegt, so muß dadurch eine magnetische Wirkung ausgeübt

werden. Dieser Versuch ist zuerst von Rowland ausgeführt, später von anderen wiederholt worden, und hat gezeigt, daß tatsächlich eine magnetische Wirkung vorhanden ist. Das ist für die Elektronentheorie von größter Wichtigkeit; denn hätte sich ergeben, daß eine bewegte Ladung keine magnetische Wirkung ausübt, so hätte man nicht annehmen dürfen, daß der elektrische Strom aus bewegten elektrischen Teilchen besteht.

222. Kathodenstrahlen als freie negative Elektronen. Kanalstrahlen als freie positive Elektronen.

Die in § 218 beschriebenen Kathodenstrahlen sind nichts anderes als freie Elektronen, und zwar negative, die von der negativen Elektrode (Kathode) mit der dort angegebenen Geschwindigkeit geradlinig fortgeschleudert werden. [1]) Die Stromquelle, an welche die Röhre angeschlossen ist, liefert die nötige Zufuhr an Elektronen. Daß es negative Elektronen sind, folgt erstens daraus, daß sie nur von der negativen Elektrode ausgehen, zweitens aus dem Sinne der Ablenkung durch ein magnetisches Feld, die so ist, als wenn beim Rowlandschen Versuch eine negative Ladung in derselben Richtung wie die Kathodenstrahlen bewegt werden, drittens aus dem Sinne der Ablenkung durch ein elektrostatisches Feld, viertens endlich läßt sich nachweisen, daß die Kathodenstrahlen negative Ladung mit sich führen, wenn man sie in geeigneter Weise auf einen Metallschirm auffallen läßt, der gegen andere Einflüsse geschützt ist. Der Schirm lädt sich auf diese Weise negativ.

Über andere Vorgänge, wo freie negative Elektronen auftreten, vergl. § 227.

Verwendet man in einer Hittorfschen Röhre als Kathode eine durchlochte oder geschlitzte Platte, die nicht am Ende, sondern etwa in der Mitte der Röhre angebracht ist (Abb. 344), so zeigt sich, daß von den Löchern Strahlen ausgehen, die nach oben verlaufen, also in entgegengesetzter Richtung wie die Kathodenstrahlen, die von derselben Elektrode ausgehen, aber nach unten verlaufen, weil die Anode unten ist. Es sind die sogenannten Kanalstrahlen, die von Goldstein zuerst bemerkt wurden. Sie werden ebenso wie die Kathodenstrahlen von allen Stoffen stark absorbiert und

[1]) Diese Ansicht ist bereits von Hittorf ausgesprochen worden. Crookes hat sie in etwas phantastisches Gewand gekleidet (strahlende Materie als vierter Aggregatzustand). Unter dem Druck der energetischen Anschauungen ist jene wieder verlassen und in jüngster Zeit erst von Giese wieder aufgenommen worden.

rufen ein Fluoreszenzlicht auf der Glaswand, auf die sie auffallen, hervor.

Da negative Ladungen niemals allein auftreten können, so liegt es nahe, die Kanalstrahlen als die notwendige positive Ergänzung zu den aus negativen Elektronen bestehenden Kathodenstrahlen, d. h. als positive Elektronen zu betrachten. Sie gehen ebenfalls von der Kathode aus, treten durch die Löcher der Kathode in den Raum hinter dieser ein und verlaufen in entgegengesetzter Richtung wie die Kathodenstrahlen. Tatsächlich werden sie durch ein magnetisches und durch ein elektrisches Feld in entgegengesetztem Sinne wie die Kathodenstrahlen abgelenkt, müssen also entgegengesetzte Ladung führen wie diese. Aus dem Grade dieser Ablenkungen hat sich das Verhältnis der Ladung ε zur Masse μ, also die spezifische Ladung $\frac{\varepsilon}{\mu}$ der positiven Elektronen zahlenmäßig bestimmen lassen. Dieses Verhältnis ergab sich etwa 2000 mal kleiner als für die negativen Elektronen. Daraus folgt, daß entweder die Masse μ des positiven Elektrons sehr viel größer oder die Ladung ε sehr viel kleiner als die des negativen Elektrons ist.[1] Diese Ungleichheit von Gebilden, die man als gleich erwarten sollte, hat zu der Annahme geführt, daß das positive Elektron überhaupt keine Ladung, sondern nur Masse, und das negative Elektron überhaupt keine Masse, sondern nur Ladung besitzt, d. h. daß es nur eine Art Elektrizität gibt, und zwar diejenige, die man seit jeher als negative Ladung bezeichnet, während das positive Elektron nichts anderes ist, als der aus chemischem Stoff bestehende Rest des Atoms.



Abb. 344.

In dieser Schlußfolgerung liegt natürlich noch kein Beweis. Für die Zwecke dieses Buches genügt aber auch das, was bis jetzt feststeht, nämlich, daß es positive und negative Elektronen gibt, die frei vorkommen können, und daß die Ladung eines negativen Elektrons gleich der Ladung eines elektrolytischen, einwertigen Ions ist.

---

[1]) Die Ladung oder die Masse des positiven Elektrons für sich allein zu bestimmen, wie beim negativen Elektron, ist bisher nicht gelungen.

223. Radiumstrahlen.

Bequerel beobachtete, daß gewisse Stoffe ganz von selbst eine dem Auge unsichtbare Strahlung aussenden, welche ähnlich den Röntgenstrahlen viele Stoffe zu durchdringen vermag. Aus der Pechblende gelang es dann, Stoffe zu gewinnen, welche als Chlor- und Bromsalz eines neuen Elementes, des Radiums, zu betrachten sind. Das Radium selbst darzustellen, ist bis jetzt nicht gelungen.

Bringt man Radiumsalz in einem Tiegelchen (Abb. 345) in ein magnetisches Feld, dessen Kraftlinien senkrecht zur Zeichenebene verlaufen, so findet man, daß das Strahlenbündel in drei Teile zerlegt wird, die man als α-, β-, γ-Strahlen bezeichnet hat. Die γ-Strahlen verlaufen genau so, wie wenn das magnetische Feld nicht vorhanden ist; sie werden also magnetisch und, wie gleich bemerkt werden soll, auch elektrisch nicht beeinflußt; sie haben ähnliche Eigenschaften wie die Röntgenstrahlen. Die α- und β-Strahlen werden vom magnetischen Felde nach entgegengesetzten Seiten abgelenkt; die letzteren stärker als die ersteren. Die β-Strahlen haben ähnliche Eigenschaft wie die Kathodenstrahlen. Wie diese bestehen sie aus freien negativen Elektronen, die mit großer Geschwindigkeit vom Radiumsalz ausgeschleudert werden. Die α-Strahlen bestehen wie die Kanalstrahlen aus positiven Elektronen.

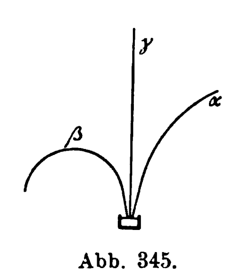


Abb. 345.

Die wichtigste Eigenschaft der Radiumstrahlen ist die, daß die Luft, die von ihnen durchstrahlt wird, elektrisch leitend wird (vergl. § 226).

Eine wenn auch geringe Selbststrahlung wie die Radiumsalze zeigen die meisten Stoffe, auch die Luft, was für die selbständige Entladung der Elektrizität von Wichtigkeit ist (§ 228).

224. Elektrizitätsleitung in Gasen durch Ionisierung.

Wir wissen aus § 60, daß in einem elektrolytischen Leiter ein elektrischer Strom nur deshalb zustande kommt, weil ein Teil der Molekeln durch den Einfluß des Lösungsmittels in einen elektropositiven und einen elektronegativen Teil — Ionen — zerspalten (dissoziiert) ist, von denen sich die ersteren unter der Wirkung des zwischen den Elektroden bestehenden elektrischen Feldes nach der Kathode, die letzteren nach der Anode bewegen, wo ihre Ladungen durch Aufnahme einer entgegengesetzten Ladung, die

von der Elektrizitätsquelle zugeführt wird, neutralisiert werden. Gleichzeitig schlagen sich die neutralisierten Teilchen auf den Elektroden nieder oder gehen neue chemische Verbindungen ein.

Schon Hittorf hat die Meinung vertreten, daß es sich auch beim Durchgang der Elektrizität durch ein Gas um einen ähnlichen Vorgang handelt. Wir denken uns heute ein Gas, bestehend aus neutralen Teilchen (Atomen oder Atomgruppen), von denen jedes unter der Wirkung gewisser Kräfte in einen elektropositiven und einen elektronegativen Bestandteil — Gasionen — zerspalten werden kann. Jedes dieser Ionen kann seinen eigenen Weg einschlagen. Den Vorgang des Zerspaltens nennt man Ionisierung des Gases. Befindet sich ein ionisiertes Gas zwischen zwei Elektroden, zwischen denen eine Potentialdifferenz besteht, so befindet sich das Gas in einem elektrischen Felde, durch dessen Kraftwirkung die positiven Ionen nach der Kathode, die negativen nach der Anode getrieben werden, wo ihre Ladungen durch Aufnahme einer entgegengesetzten Ladung, die von der Elektrizitätsquelle zugeführt wird, neutralisiert werden — wie bei der elektrolytischen Leitung. Man hat also einen durch das Gas gehenden elektrischen Strom.

Zwischen der Stromleitung in einem elektrolytischen und in einem gasförmigen Leiter besteht folgender Unterschied. Eine elektrolytische Leitung tritt niemals bei chemisch einfachen, nichtmetallischen Stoffen ein, wie z. B. flüssigem Chlor oder flüssigem Stickstoff, sondern nur bei zusammengesetzten Stoffen, welche unter dem Einfluß des Lösungsmittels (Wasser) dissoziiert sind. Die Dissozierung besteht darin, daß die Molekeln (nicht die Atome!) in einen positiven und einen negativen Teil zerfallen. Bei Gasen hingegen findet eine Elektritzitätsleitung auch in einheitlichen Stoffen, wie z. B. Chlor, Stickstoff, Quecksilberdampf usw. statt. Daraus folgt, daß der Zerfall der Gasteilchen in ihre positiven und negativen Gasionen nicht im Molekel, sondern im Atom stattfindet. Die einfachste Annahme ist, daß jedes einwertige neutrale Atom, wie man es aus der Chemie kennt, aus einem positiven und negativen Elektron besteht; die mehrwertigen aus entsprechend mehreren. Diese sind im Atom mit einer gewissen Kraft aneinandergekettet und bedürfen daher zu ihrer Trennung einer gewissen Kraft und eines gewissen Arbeitsaufwandes. Eine genaue Kenntnis darüber, woraus jeder dieser beiden Teile besteht, haben wir zurzeit noch nicht. Man umgeht diese noch offene Frage in der Redeweise am besten dadurch, daß man wie bei der elektrolytischen Leitung kurz von Ionen spricht oder von Gasionen, wenn man besonders hervorheben will, daß es sich nicht um einen elektrolytischen Leiter, sondern um ein Gas handelt.

225. Unselbständige und selbständige Elektrizitätsleitung in Gasen.

Ein weiterer Unterschied zwischen der Elektrizitätsleitung in einem Elektrolyten und in einem Gase besteht in folgendem. Während bei einem elektrolytischen Leiter der Zerfall der Molekeln in Ionen von selbst, oder richtiger, nur unter dem Einfluß des Lösungsmittels stattfindet, und die Anzahl der getrennten Ionen so groß ist, daß auch bei der kleinsten Elektrodenspannung ein Strom auftritt, der dieser Spannung proportional ist, findet bei einem Gase eine Elektrizitätsleitung nur statt, wenn die Elektrodenspannung einen gewissen Wert übersteigt oder wenn gewisse andere Kräfte auf das Gas einwirken. Daraus folgt, daß das Gas im gewöhnlichen Zustande keine freien Ionen enthält, sondern daß die Zerspaltung der neutralen Gasatome erst durch die elektrische Kraft des eigenen, zwischen den Elektroden bestehenden elektrischen Feldes oder durch andere, äußere Kräfte veranlaßt werden muß. Im ersten Falle spricht man von selbständiger Ionisierung und selbständiger elektrischer Strömung. Hierher gehört die Entladung in Geißlerschen und Hittorfschen Röhren (§ 216), das Glimmlicht und Büschellicht (§ 229), die Funkenentladung (§ 230) und der Lichtbogen (§ 237). Im zweiten Falle spricht man von unselbständiger Ionisierung und unselbständiger elektrischer Strömung. Hierher gehört die Ionisierung eines Gases durch Bestrahlung mit Röntgenstrahlen oder mit Radiumstrahlen.

Zu dem am Schluß des vorigen Paragraphen angeführten Unterschiede zwischen der elektrischen Leitung in einem Elektrolyten und in einem Gase kommt nun noch folgender. In einem Elektrolyten beginnt der Strom schon bei der kleinsten Elektrodenspannung und seine Stärke i ist der Elektrodenspannung e proportional, wenigstens so lange, als nicht die Erwärmung des Elektrolyten so groß wird, daß Verdampfung eintritt. Es ist also $i = \frac{e}{w}$. Stellt man die Beziehung zwischen Strom und Elektrodenspannung durch eine Schaulinie dar, so ergibt sich eine durch den Nullpunkt gehende gerade Linie (Abb. 346).

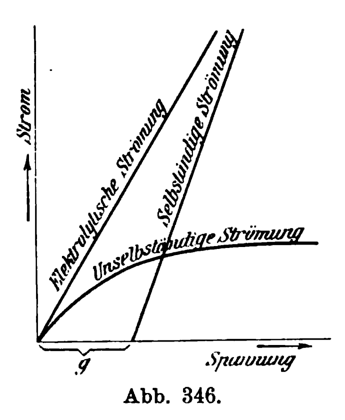


Abb. 346.

Bei der unselbständigen Strömung in einem Gase beginnt zwar der Strom ebenfalls schon bei der kleinsten Elektrodenspannung, aber seine Stärke

ist nur bei kleinen Spannungen dieser proportional und nähert sich bei wachsender Spannung einem Grenzwerte, dem sogenannten Sättigungsstrom, der nicht überschritten wird. Das Ohmsche Gesetz gilt also hier nicht. Die Ursache dieser Erscheinung wird im folgenden Paragraphen behandelt. Als Schaulinie der Stromstärke ergibt sich die in Abb. 346 enthaltene. Sie geht ebenfalls durch den Nullpunkt, verläuft anfangs proportional, krümmt sich aber dann und verläuft schließlich parallel zur Abszissenachse.

Bei der selbständigen Strömung in einem Gase kann ein Strom erst eintreten, wenn die Elektrodenspannung und daher die Stärke des elektrischen Feldes einen gewissen Wert (g) überschritten hat. Von diesem Werte an bleibt die Stromstärke der Zunahme der Spannung, also dem Werte $e - g$, proportional; mithin ist $i = \frac{e-g}{w}$. Als Schaulinie der Stromstärke ergibt sich also eine Gerade, welche auf der Abszissenachse im Abstand g vom Nullpunkt ihren Anfang nimmt (Abb. 346).

Häufig besteht die selbständige Strömung nicht allein, sondern mit der unselbständigen gemischt; dann ist der Stromverlauf nicht so einfach.

226. Ursachen der unselbständigen Strömung.

Die im vorigen erwähnten äußeren Einflüsse, welche eine Ionisierung des Gases bewirken und es dadurch leitend machen, sind folgende: Hohe Temperatur des Gases, und zwar sowohl wenn die hohe Temperatur durch einen anderen erhitzten Körper oder durch Verbrennung des betreffenden Gases selbst erzeugt wird. Darum zeigen brennende Flammen und die von ihnen ausgehenden Flammengase ein verhältnismäßig großes Leitungsvermögen. Ferner Röntgenstrahlen, Radiumstrahlen und ultraviolette Lichtstrahlen, wenn das betreffende Gas von ihnen durchstrahlt wird. Gleichzeitig findet immer auch eine Absorption dieser Strahlen durch das Gas statt, so daß beide Vorgänge miteinander verknüpft erscheinen.

Nachdem die Spaltung eines Gasatomes unter einem der genannten Einflüsse stattgefunden hat, besitzt jedes Ion eine selbständige, von dem anderen unabhängige Bewegung, die im allgemeinen regellos erfolgt, aber sofort geordnet wird, wenn ein elektrisches Feld in dem Gase erzeugt wird. Dann suchen sich alle in der Richtung der Kraftlinien nach den Elektroden zu bewegen. Aber sowohl bei der regellosen wie bei der geordneten Bewegung kommt es vor, daß positve und negative Ionen zusammen-

prallen und sich infolge der Anziehungskraft, die sie aufeinander ausüben, wieder zu einem neutralen Atom vereinigen. Es verschwinden also auf diese Weise wieder eine gewisse Anzahl der vorhandenen Ionen. Eine andere Anzahl aber gelangt bei der geordneten Bewegung an die Elektroden, wo sie durch die von der Stromquelle kommende Elektrizität neutralisiert werden, also ebenfalls verschwinden. Bezeichnet man die Anzahl der in der Zeiteinheit durch Ionisierung des Gases entstandenen Ionen mit a, die durch Zusammenprall neutralisierten mit b, die an den Elektroden neutralisierten mit d, so ist die schließlich vorhandene Anzahl $a - b - d$. Ist die Elektrodenspannung so groß, daß die Anzahl d der an den Elektroden neutralisierten sehr groß ist gegenüber den durch Zusammenprall neutralisierten (b), so kann b gegen d vernachlässigt werden und die Anzahl der in der Volumseinheit verbleibenden Ionen ist $a - d$. Da a nur von der Stärke der ionisierenden Ursache abhängig, von der Stromstärke aber unabhängig ist, hingegen d der Stromstärke proportional ist, so muß bei wachsender Stromstärke schließlich ein Zustand eintreten, wo $a = d$ ist, d. h. wo sämtliche durch Ionisierung erzeugten Ionen den Elektroden zugeführt werden. Damit ist der Sättigungsstrom erreicht und eine weitere Zunahme der Stromstärke unmöglich, wie sehr auch die Elektrodenspannung gesteigert werden mag, natürlich immer unter der Voraussetzung, daß die ionisierende Ursache konstant ist, und daß es sich um eine rein unselbständige Strömung handelt, bei welcher durch die Elektrodenspannung selbst keine Ionisierung stattfindet.

Dieselbe Überlegung hat auch für die elektrolytische Leitung Gültigkeit, da auch hier die Dissoziation nicht von der Spannung, sondern von einem äußeren Einfluß, dem Lösungsmittel abhängt. Daß man dabei trotzdem keinen Sättigungsstrom kennt, sondern daß die Stromstärke proportional der Spannung zunimmt, hat seinen Grund darin, daß die Anzahl der in der Zeiteinheit durch Dissoziation gebildeten Ionen sehr viel mal größer, ihre Wanderungsgeschwindigkeit aber sehr viel kleiner ist als bei Gasen, so daß d immer noch sehr viel kleiner ist als a. Praktisch kann man natürlich die Spannung nicht beliebig steigern, weil dann eine Verdampfung des Elektrolyten durch die Stromwärme eintritt. Vergleicht man Ströme von gleicher Stärke in einem Elektrolyten und in einem Gas miteinander, so besteht der erstere aus einer großen Anzahl von Ionen, die sich mit kleiner Geschwindigkeit zu den Elektroden hinbewegen, weil die Dichte und daher die Reibung einer Flüssigkeit sehr groß ist. Dagegen besteht der Strom in einem Gas aus einer kleinen Anzahl von Ionen, die sich mit

großer Geschwindigkeit bewegen, weil die Dichte und die Reibung eines Gases gering ist. Die in der Zeiteinheit beförderten Ionen und Elektrizitätsmengen aber sind in beiden Fällen gleich. Aus dem Vorstehenden erklärt sich noch ein anderer Unterschied zwischen der elektrolytischen und der unselbständigen Strömung. Vergrößert man den Abstand der Elektroden in einem Elektrolyten, so nimmt bei gleichbleibender Spannung die Stromstärke ab. Das gilt auch beim Stromdurchgang durch Gase, solange die Stromstärke klein ist. Ist aber der Sättigungsstrom erreicht, so nimmt dieser mit dem Abstand der Elektroden zu. Das erklärt sich daraus, daß der Sättigungsstrom in einem Gase von der Anzahl a der erzeugten Ionen abhängt. Wird der Abstand der Elektroden doppelt so groß gemacht, so ist auch das Volumen und daher die Anzahl a der gesamten vorhandenen Ionen verdoppelt. Und weil für den Sättigungsstrom $d = a$ ist, so ist auch die Stromstärke doppelt so groß. Bei einem Elektrolyten aber, wo immer weit mehr Elektronen vorhanden sind, als den Elektroden zugeführt werden, hängt die Stromstärke von dem Reibungswiderstand der Ionen in der Flüssigkeit ab, folgt also dem Ohmschen Gesetz.

Der Potentialverlauf bei der unselbständigen Strömung zwischen zwei Elektroden ist im allgemeinen so wie Abb. 347 zeigt, die im besonderen für ein Gas bei Atmosphärendruck gilt, das von Röntgenstrahlen ionisiert wird. Wie man sieht, ist der Charakter des Potentialverlaufes ein ähnlicher wie in Abb. 338 in einer Hittorfschen Röhre, indem auch hier der Spannungsabfall an den Elektroden bedeutend größer ist als in der Mitte, und zwar an der Kathode größer als an der Anode.

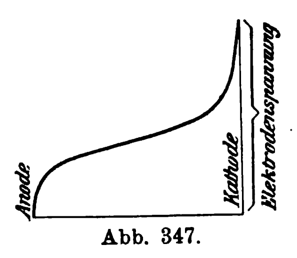


Abb. 347.

227. Elektrizitätszerstreuung.

Eine Art unselbständige elektrische Strömung ist die elektrische Zerstreuung. Ladet man einen sehr gut isolierten Leiter mit einer negativen Ladung und läßt ihn unberührt stehen, so verschwindet die Ladung nach kürzerer oder längerer Zeit fast vollständig, und zwar um so schneller, in je hellerem Lichte sich der Leiter befindet. Wird er von ultraviolettem Lichte bestrahlt, so verschwindet die Ladung sofort.

Das Verschwinden der Ladung erfolgt dadurch, daß die negative Elektrizität in Form freier Elektronen in das umgebende Gas übertritt, weshalb man von Zerstreuung der Elektrizität spricht, wenn

man den geladenen Leiter im Auge hat, oder von einer Elektrisierung des Gases, wenn man das umgebende Gas, das die Elektrizität in Form freier Elektronen aufnimmt, im Auge hat.

Die Schnelligkeit, mit der eine negative Ladung unter dem Einfluß des Lichtes verschwindet, d. h. die Stärke der lichtelektrischen Zerstreuung, ist um so größer, je blanker die Oberfläche des betreffenden Leiters ist, je heller das Licht und je kürzer seine Wellenlänge ist; außerdem hängt sie von dem Stoff des Leiters ab. Die stärkste Wirkung erfahren Kalium, Natrium, dann Magnesium, Zink usw. Aber auch die Nichtleiter zeigen eine, wenn auch sehr geringe, Zerstreuung.[1]) Eine blanke Metalloberfläche, die längere Zeit der lichtelektrischen Wirkung gedient hat, verändert sich; sie wirkt dann schlechter (lichtelektrische Ermüdung). Röntgenstrahlen wirken in gleicher Weise wie Lichtstrahlen, aber schwächer.

Von der Ionisierung (§ 224) unterscheidet sich die Elektrisierung eines Gases dadurch, daß bei der Ionisierung die Elektronen aus den Gasatomen selbst durch Zerspaltung derselben entstehen, während bei der Elektrisierung die Elektronen aus einem anderen Körper in das Gas übertreten.

Bei den oben aufgezählten stark wirksamen Metallen findet die lichtelektrische Zerstreuung nicht nur dann statt, wenn sie eine negative Ladung haben, sondern auch im ungeladenen, neutralen Zustande senden sie unter dem Einfluß des ultravioletten Lichtes negative Elektronen aus. Naturgemäß müssen sie dann, wenn sie gut isoliert sind, eine überschüssige positive Ladung aufweisen, so daß man früher annahm, das Licht erzeuge hier positive Elektrizität.

Ein Übertritt freier Elektronen in das umgebende Gas, also Elektrisierung desselben, findet ohne Lichtwirkung auch dann statt, wenn metallische Körper oder Kohle oder Metalloxyde stark erhitzt werden, und zwar beginnt die Ausstrahlung bei Rotglut und nimmt bis zu einem gewissen Grade mit der Temperatur zu. Ist die Erscheinung sehr stark, so erhält sie den Charakter einer Strahlung, und zwar ähnlich den Kathodenstrahlen, da es negative Elektronen sind.

Wird ein solcher Körper als Kathode bei einem Entladungsvorgang benützt, so findet dadurch eine bedeutende Herabsetzung des Kathodenfalles statt (von 200—300 V. auf 20 V.). Davon wird Anwendung gemacht bei einer Ventilröhre (§ 242 III) und bei einem Wellenzeichner (§ 282).

---

[1]) Reiger, Annal. d. Phys. 17, S. 935, 1905.

228. Ursache der selbständigen Strömung.

Die selbständige elektrische Strömung durch ein Gas infolge selbständiger Ionisierung tritt ein, wenn die Elektrodenspannung einen gewissen von der Art und der Dichte des Gases abhängigen Wert — die Anfangsspannung — überschreitet. Die zunächstliegende Erklärung wäre die, daß die elektrische Kraft des elektrischen Feldes jene Kraft, mit welcher die beiden Ionen eines neutralen Atomes aneinander gekettet sind, überwindet, indem der positive Bestandteil nach der einen, der negative nach der entgegengesetzten Seite gezogen wird. Die dazu nötige Kraft konnte aus anderen Erscheinungen berechnet werden; es zeigte sich aber, daß die selbständige Ionisierung schon bei sehr viel kleinerer Feldstärke eintritt. Als unmittelbare Ursache der selbständigen Ionisierung betrachtet man den Zusammenstoß freier Elektronen oder Ionen mit neutralen Atomen. In § 226 wurde erwähnt, daß beim Zusammenprallen zweier ungleichnamiger Ionen die Bildung eines neuen neutralen Atomes stattfindet. Wenn aber ein sich frei bewegendes Ion auf ein neutrales Atom stößt, und seine lebendige Kraft groß genug ist, so zerstört es den Zusammenhang im Atom; und zwar ist um so weniger lebendige Kraft dazu nötig, je größer die elektrische Kraft ist, welche die beiden Teile des Atoms zu trennen strebt, d. h. je größer die elektrische Kraft ist. Es entstehen so zwei neue Ionen oder Elektronen, und alle drei setzen nach dem Zusammenstoß ihren Weg selbständig fort. Die lebendige Kraft A eines Ions hängt bei gegebener Masse von seiner Geschwindigkeit v ab: $A = \frac{m v^2}{2}$. Die Geschwindigkeit erhält es dadurch, daß es von der einen Elektrode angezogen, von der anderen abgestoßen wird, also durch die elektrische Kraft $\mathfrak{H}$ zwischen den Elektroden. Da diese Kraft beständig auf das Ion einwirkt, so erhält es eine beschleunigte Bewegung. Infolgedessen ist seine Geschwindigkeit an jeder beliebigen Stelle seiner Bahn proportional der Quadratwurzel aus der Kraft $\mathfrak{H}$ und dem seit Beginn der Bewegung ohne Hindernis zurückgelegtem Wege l, wie bei jeder beschleunigten Bewegung; also $v = c\sqrt{\mathfrak{H}\, l}$. Mithin ist die lebendige Kraft eines Ions im Moment seines Zusammenstoßes mit einem Atom: $A = c m \mathfrak{H}\, l$. D. h. die lebendige Kraft ist proportional der elektrischen Kraft, ferner der Masse des Ions und seinem bis zum Zusammenstoß zurückgelegten Wege. Man nennt diesen Weg die freie Weglänge des Ions. Um also eine gewisse, zur Zerspaltung eines Atoms notwendige lebendige Kraft zu erreichen, muß das Ion bei gegebenem m und $\mathfrak{H}$, d. h. bei einer

bestimmten durch die Art des Gases gegebenen Masse des Ions und bei einer bestimmten elektrischen Kraft eine gewisse freie Weglänge zurückgelegt haben. Diese notwendige Weglänge erreicht es um so öfter, je weniger Ionen und Atome in einer Volumseinheit des Gases enthalten sind, d. h. je dünner das Gas ist. Sind aber sehr viele Atome in der Volumseinheit enthalten, so stößt es sehr häufig mit Atomen zusammen, bevor es die erforderliche freie Weglänge zurückgelegt hat. Solche Zusammenstöße vermögen aber eine Zerspaltung der Atome nicht zu bewirken. Man erkennt aus dieser Überlegung den Grund, warum zur Entstehung einer selbständigen Entladung um so weniger Spannung erforderlich ist, je dünner das Gas ist. Bei sehr dünnen Gasen (unter 0,1 mm Druck) gilt dies aber nicht mehr, sondern da nimmt die zur Entladung erforderliche Anfangsspannung wieder zu, weil dann schon so wenig Atome vorhanden sind, daß die nötige Ionisierung erst wieder durch größere elektrische Kraft erzielt wird.

Da nach jeder Zerspaltung eines Atoms durch Ionenstoß zwei neue Ionen entstanden sind, die sich sofort nach den Elektroden in Bewegung setzen und nun ebenfalls andere Atome durch ihre Stöße ionisieren, so erkennt man, daß die Ionenzahl lawinenartig zunimmt, und daher in unmeßbar kurzer Zeit nach Überschreitung der Anfangsspannung die der Spannung $e - g$ entsprechende Stromstärke $i = \frac{e - g}{w}$ erreicht wird. Daß die Ionisierung nicht beliebig hoch anwachsen kann, hat seinen Grund darin, daß bei der Bewegung der Ionen nach den Elektroden hin ungleichnamige Ionen zusammenprallen und sich dadurch zu neuen Atomen zusammenschließen.

Das gilt für alle selbständigen Entladungen in Gasen von über 0,1 mm Druck oder genauer, solange keine Kathoden- und Kanalstrahlen auftreten. Unter 0,1 mm Druck ist das Gas bereits so dünn, daß die Ionen so große Weglängen ohne Zusammenstoß mit Atomen oder anderen Ionen zurücklegen können, daß sie die in § 218 erwähnte kolossale Geschwindigkeit von $^1/_{15}$—$^1/_5$ der Lichtgeschwindigkeit erreichen. Da die Bewegung jedes Ions so lange geradlinig ist, als nicht ein Zusammenstoß erfolgt, so ist der Gesamteindruck der einer geradlinigen S t r a h l u n g.

Die obige Erklärung der selbständigen Ionisierung durch Ionenstoß setzt voraus, daß vor Beginn der selbständigen Strömung bereits freie Ionen vorhanden sind. Tatsächlich ist dies der Fall, und zwar rühren sie davon her, daß jedes Gas im geringen Grade radioaktiv ist, d. h. Radiumstrahlen aussendet, von denen wir aus § 223 wissen, daß sie eine Ionisierung der Gasatome bewirken. Zwei Bedingungen müssen also erfüllt sein, wenn eine selbständige

Strömung zustande kommen soll: ersten muß wenigstens ein freies Ion in dem Felde zwischen den Elektroden vorhanden sein, zweitens muß die elektrische Kraft oder die Elektrodenspannung so groß sein, daß die Ionen auf der freien Weglänge hinreichende Geschwindigkeit erlangen, um durch ihren Stoß Atome zu zerspalten.

Die äußeren Erscheinungen der selbständigen Entladung sind sehr mannigfaltig. Am auffälligsten sind die Lichterscheinung und das Geräusch. Lichterscheinungen treten bei den selbständigen Strömungen fast immer auf, weil nach dem geschilderten Vorgang die Stromstärke in kurzer Zeit auf einen so hohen Wert anwächst, daß eine starke Erwärmung des leitenden Gases und der Elektroden an der Austrittsstelle des Stromes eintritt. Je nach der Art der auftretenden Lichterscheinung lassen sich die selbständigen Strömungen einteilen in: dunkle Entladungen, Glimm- und Büschelentladungen, Funkenentladungen, Lichtbögen, die im folgenden einzeln behandelt werden.

Entsprechend den verschiedenen Erscheinungsformen ist auch das Spannungsgefälle verschieden. Alle aber haben das gemeinsam, daß der Abfall in unmittelbarer Nähe der Elektroden größer ist als an irgend einer Stelle der Strombahn im Gase.

229. Dunkle Entladung, Glimmlicht, Büschellicht.

Verbindet man zwei spitze Elektroden, die einen Abstand von mehreren Zentimetern haben, mit einer Stromquelle und steigert die Spannung auf einige Tausend Volt, so bemerkt man noch keine Lichterscheinung. Dennoch findet bereits eine Entladung aus den Spitzen statt, die man mit genügend feinen Mitteln nachweisen kann. Häufig hört man schon ein leises zischendes Geräusch und bemerkt einen stechenden Geruch, der von Ozon und Stickoxyden herrührt (§ 244). Solche Entladungen bezeichnet man als dunkle Entladungen. Steigert man die Spannung weiter, so bemerkt man an den Spitzen Lichterscheinungen, die je nach der Polarität der Spitze verschiedenes Aussehen zeigen, und die man als Glimmlicht oder Büschellicht bezeichnet. Diese Entladungsformen sind die am längsten bekannten. Sie zeigen sich am auffälligsten an Elektrisiermaschinen, wenn sich an den Polen Spitzen befinden. An den negativen Spitzen zeigt sich ein wenig ausgebreiteter Lichtpunkt, der ähnlichen Charakter hat wie das Licht an einer spitzen Elektrode in einer Geißlerschen Röhre. An den positiven Spitzen zeigt sich ein weit ausgebreitetes leuchtendes Büschel, das manchmal auf einem leuchtenden Stil sitzt, manchmal aus einem Bündel leuchtender Strahlen besteht.

Haben die Elektroden nicht die Form einer Spitze, sondern die einer Kugel oder Platte, so tritt das Glimm- und Büschellicht nur auf, wenn die Spannung sehr hoch ist, oder das Gas unter niedrigem Druck steht.

Wie alle selbständigen Strömungen der Elektrizität treten auch diese Entladungsformen erst auf, wenn eine gewisse Spannung — die Anfangsspannung — überschritten wird. Diese hängt von der Art des Gases, dem Druck und der Temperatur, sowie von der Form der Elektroden ab. Sie liegt um so niedriger, je spitzer die Elektroden sind, weil das Potentialgefälle und daher auch die elektrische Kraft in unmittelbarer Nähe der Elektroden um so größer ist, je kleiner der Krümmungsradius der Elektroden ist (Spitzenwirkung § 21).

In elektrischen Anlagen von sehr hoher Spannung macht sich die Glimm- und Büschelentladung dadurch unangenehm bemerkbar, daß sie auch von den blanken Leitungen ausgeht, was bei langen Leitungen einen nicht unerheblichen Elektrizitätsverlust bedeutet.[1]) Die Drähte sind im Dunkeln von einer leuchtenden Korona umgeben. Folgende Tabelle gibt nach Versuchen von Ryan[2]) jene Spannung und Drahtstärke an, wo die Glimmentladung beginnt, wenn zwei Drähte von entgegengesetzter Polarität einen Abstand von 122 cm haben.

Drahtstärke mm	Volt (Scheitelwert)
1,5	79 000
5	157 000
11	236 000
25	390 000

Der Einfluß des Abstandes zweier Drähte von 4,3 mm Dicke ergibt sich aus folgenden Versuchen von Mershon[1])

Abstand cm	Volt (Scheitelwert)
38	75 000
89	86 000
132	93 000

Wie man sieht, stimmen die beiden Tabellen schlecht zusammen. Es spielen eben die Verhältnisse in der Atmosphäre, Grad der Dunkelheit, Oberflächenbeschaffenheit (blank oder oxydiert) eine Rolle.

[1]) Diese Verluste nehmen mit der Spannung sehr stark zu. Nach Scott (ETZ 1902, S. 1067) betrugen diese Verluste in zwei Leitungen von 132 cm Abstand auf 3,5 km Länge bei 40000 Volt 53 Watt, bei 60000 Volt 890 Watt.

[2]) ETZ, 1904, S. 387.

Glimm- und Büschellicht tritt besonders stark auf, wenn scharfrandige Elektroden (Stanniol) auf beiden Seiten einer isolierenden Platte aufliegen (Abb. 362), weil hier die Spannung erheblich höher gesteigert werden kann, bevor es zu einer Funkenentladung kommt.

Die Glimmentladung geht auch durch manche Isolierstoffe, namentlich Porzellan, hindurch, wie Abb. 358 zeigt, wahrscheinlich aber nur deshalb, weil Poren vorhanden sind.

230. Äußeres Bild der Funkenentladung.

Unter Funkenentladung versteht man jede kurz andauernde, von einer funkenartigen Lichterscheinung begleitete Entladung. Sie tritt im allgemeinen nur bei größerer Gasdichte (über 1 mm Quecksilbersäule) auf. Sie gehört zu den selbständigen Strömungen der Elektrizität (§ 228), weil sie erst eintritt, wenn die Elektrodenspannung einen gewissen Wert — die Anfangsspannung — überschritten hat. Diese liegt immer höher als bei der Glimmentladung. In vielen Fällen, namentlich bei geringem Gasdruck, kann aber eine scharfe Grenze zwischen Glimm- und Funkenentladung nicht gezogen werden, sondern jene geht allmählich in diese über.

Den Raum zwischen den Elektroden, in dem sich die Entladung abspielt, bezeichnet man als Funkenstrecke, den Abstand der Elektroden, bzw. jener Stellen, von denen die Entladung ausgeht, als Schlagweite.

Liefert die Stromquelle, an welche die Elektroden angeschlossen sind, genügend Elektrizität (z. B. größere Dynamomaschinen, Transformatoren), so bleibt ein dauernder Stromübergang — der Lichtbogen — bestehen, mit dem wir uns in § 237 u. f. beschäftigen. Abb. 278 zeigt das Bild eines Lichtbogens, der aus dem ersten Funkenübergang zwischen zwei Elektroden entstanden ist, die an einen 10 Kilowatt-Transformator bei 40000 V. angeschlossen waren. Fällt die Spannung nach dem ersten Übergang wegen mangelnder Elektrizitätszufuhr unter einen gewissen Wert — die Minimumspannung —, so hört die Entladung sofort wieder auf, und man erhält nur eine Funkenentladung, wie dies bei der Entladung von Kondensatoren und bei Funkeninduktoren immer der Fall ist. Abb. 279 zeigt mehrere aufeinanderfolgende Funkenentladungen zwischen denselben Elektroden und bei derselben Spannung wie der Lichtbogen in Abb. 278. Während beim Lichtbogen die primäre Wickelung unmittelbar an eine Dynamomaschine von genügender Größe angeschlossen war, war in diesem Fall eine Drosselspule vorgeschaltet. Ihr induktiver Widerstand bewirkt schon beim ersten Stromübergang

einen so großen Spannungsabfall, daß die Spannung sogleich wieder unter die Minimumspannung fällt. Nach dem Verlöschen des Funkens steigt die Spannung wieder auf den anfänglichen Wert, es tritt eine neue Entladung ein und so fort. Dasselbe würde eintreten, wenn schon die Dynamomaschine und der Transformator zusammen einen so großen Spannungsabfall hätten, oder wenn eine Drosselspule von gleichem prozentualen Spannungsabfall im sekundären Stromkreis der Funkenstrecke vorgeschaltet wäre. Bei sehr großen Widerständen im Stromkreis tritt manchmal schon infolge der vorausgehenden dunklen Entladung oder der Büschelentladung ein so großer Spannungsabfall auf, daß es überhaupt zu keiner Funkenentladung kommt, wie Abb. 348 zeigt.



Abb. 348. Vorentladungen ohne vollständigen Übergang.



Abb. 349. Funkenentladungen mit Vorentladungen.

Nimmt man Funkenentladungen auf bewegten photographischen Platten auf, so zeigt sich häufig, daß die Entladung aus mehreren Teilen besteht, wie die Abb. 348 und 349 zeigen [1]). In Abb. 349 gehen dem vollständigen Übergang fünf Entladungen voraus, von denen jede denselben Weg nimmt, aber ein Stück weiter reicht als die vorhergehende, bis endlich der vollständige Übergang stattfindet. Es sind also Vorentladungen, welche dem vollständigen Übergang den Weg bahnen. Ist die zur Verfügung stehende Elektrizitätsmenge so gering, daß sie schon durch die Vorentladungen erschöpft wird, so kommt es überhaupt zu keinem vollständigen Übergang, wie Abb. 348 zeigt. Ihrem Wesen nach sind die Vorentladungen Glimm- und Büschelentladungen; sie zeigen auch die Eigentümlichkeit derselben, daß die von der positiven Elektrode

---

[1]) Abb. 348—351 aus dem „Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten" XX von B. Walter.

ausgehenden weiter reichen als die von der negativen (vergl. Abb. 337 und 338). Besonders stark sind die Vorentladungen ausgeprägt bei Gleitfunken (§ 236).

Abb. 350 zeigt eine auf bewegter Platte aufgenommene Blitzentladung und Abb. 351 die Entladung eines Funkeninduktors. Sie bestehen beide aus mehreren vollständigen Übergängen (Teilfunken; intermittierende Entladung). Solche entstehen, wenn die zur Entladung kommende Elektrizitätsmenge den Entladungsstellen nicht



Abb. 350. Intermittierende Blitzentladung.

rasch genug zuströmen kann. Auf der Gewitterwolke ist die Elektrizität über eine große Fläche verteilt, deren Leitungswiderstand sehr groß ist. Beim Funkeninduktor verhindert der hohe Widerstand der sekundären Wickelung, daß die ganze induzierte Elektrizitätsmenge sofort den Elektroden zuströmt. Daß es sich hier nicht um die Schwingungen einer oszillatorischen Entladung handelt, zeigt schon ein Vergleich mit Abb. 259. Dort folgen die Streifen in genau gleichen Abständen mit stetig abnehmender Helligkeit (Dämpfung) aufeinander, und die abwechselnde Helligkeit der Fußpunkte an den Elektroden beweist den Wechsel zwischen positiver und negativer Stromrichtung. Das alles trifft hier nicht zu. Übrigens war die Geschwindigkeit der bewegten Platte bei Abb. 351 viel

zu klein, um elektrische Schwingungen wahrnehmbar zu machen, denn jede dieser Teilentladungen besteht aus Schwingungen von der Art wie Abb. 259, wo der zeitliche Abstand der Streifen tausendstel bis millionstel Sekunden beträgt, während die Teilentladungen in Abb. 351 in zehntel bis hundertstel Sekunden aufeinanderfolgen. Der Blitz (Abb. 350) hat auch Vorentladungen, die hier als Verästelungen nach unten auseinanderlaufen, weil die Entladung zwischen einem Punkte und einer großen Fläche, der Erde, stattfindet. Daß es Vorentladungen sind, geht daraus hervor, daß sie am Beginn der Entladung (links) vorhanden sind, am Ende (rechts) aber nicht mehr. Daß die Teilentladungen alle in derselben Bahn verlaufen, erklärt sich daraus, daß jede vorausgehende eine Ionisierung der Luft zurückläßt, die für die folgende einen gut leitenden Weg darstellt. Folgt aber die nächste Entladung nicht rasch genug, so haben sich die Ionen schon zerstreut und es muß ein neuer Weg gebahnt werden. Das ist dann keine Teilentladung der vorhergehenden, sondern eine neue, selbständige Funkenentladung, wie Abb. 279 mehrere solche zeigt.



Abb. 351. Intermittierende Funkenentladung.

Jede Teilentladung kann, wie schon erwähnt, oszillatorisch oder aperiodisch sein; das hängt nur von Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand des Entladungskreises ab.

Über den Widerstand des Funkens vergl. § 193.

231. Die Schlagweite der Funkenentladung.

Die Schaulinien in Abb. 352—354 stellen die Beziehung zwischen Schlagweite und Funkenspannung für gewöhnliche Luft bei verschiedenen Elektrodenformen dar. Auf der linken Seite stehen die Spannungen in effektiven Volt, auf der rechten Seite die Scheitelwerte (unter Annahme einer sinusförmigen Spannungswelle) also die eigentlichen Spannungswerte, die den Überschlag verursachen. Wie man sieht, besteht zwischen Schlagweite und Funkenspannung keine Proportionalität. Kürzlich ist es gelungen[1]) auf Grund der in § 228 entwickelten Theorie der selbständigen Strömung eine

[1]) Schwedoff, Annal. d. Phys. 19, S. 918, 19.

Gleichung abzuleiten, welche die Beziehung zwischen Schlagweite l und Funkenspannung k darstellt, nämlich

$$k = \frac{0{,}192\, l}{1 + \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{l}{\alpha}}\right)} \text{ cm.}$$

Hier ist ε die Basis der natürl. Logar., $\alpha = 0{,}041$, $\beta = 0{,}0022$. Genauer ist die Formel, wenn α aus folgender Beziehung berechnet wird

$$\alpha = 0{,}043 \log\left(1 + \frac{l\delta}{0{,}008}\right),$$

wobei δ das Verhältnis der herrschenden Gasdichte zur gewöhnlichen Luftdichte bedeutet. Für gewöhnlichen Atmosphärendruck ist also $\delta = 1$. Mit log sind hier gemeine Logarithmen bezeichnet. Die Werte von α und β bzw. der erste Zahlenfaktor in der Formel für α ändern sich natürlich mit der Natur des Gases und der Elektrodenform. Die obigen Werte gelten für Luft und kugelförmige Elektroden. Für $l = 0$ wird auch $k = 0$, d. h. zu einer unendlich kleinen Schlagweite ist nur eine unendlich kleine Spannung notwendig. Die Schaulinien in Abb. 352 streben auch wirklich dem Nullpunkt zu. Das scheint im Widerspruch zu stehen mit der in § 217 besprochenen Tatsache, wonach ein gewisser Spannungsabfall an der Anode und an der Kathode auftritt. Das gilt aber nur, wenn der Abstand der beiden Elektroden größer ist als die Summe aus der ersten Kathodenschicht und der ersten Anodenschicht, in welchen jener Spannungsabfall liegt. Ist der Abstand kleiner, so daß die beiden Schichten teilweise zusammenfallen, so gelten auch jene Spannungsabfälle nicht mehr. Bei so kurzen Schlagweiten kann allerdings nicht mehr genau zwischen Glimmentladung und Funkenentladung unterschieden werden.

Für $l = \infty$ geht die obige Formel für k in eine lineare über, das entspricht auch dem Charakter der Schaulinien in Abb. 354, die sich mit wachsender Schlagweite einer geraden Linie nähern.

Die Dichte des Gases ist von starkem Einfluß auf die Schlagweite. Bei sehr kleinen Dichten kommt überhaupt kein Funken, sondern nur Glimm- oder Büschellicht zustande (§ 229). Für jene Dichten, wo eine deutliche Funkenentladung stattfindet, hat die Funkenspannung für alle Schlagweiten l und Gasdichten δ, deren Produkt konstant ist, denselben Wert.[1]) Das kommt auch in der obigen Formel für α zum Ausdruck. Wenn das Produkt $l\delta$ konstant ist, so bedeutet das nichts anderes, als daß die Anzahl der

---

[1]) **Paschen**, Annal. d. Phys. 37, S. 69, 1889.

Gasmolekeln in einer zwischen den Elektroden gedachten Röhre konstant ist. D. h. die Funkenspannung hängt nur von der Anzahl der Gasmolekeln zwischen den Elektroden, nicht aber von ihrem gegenseitigen Abstand ab.

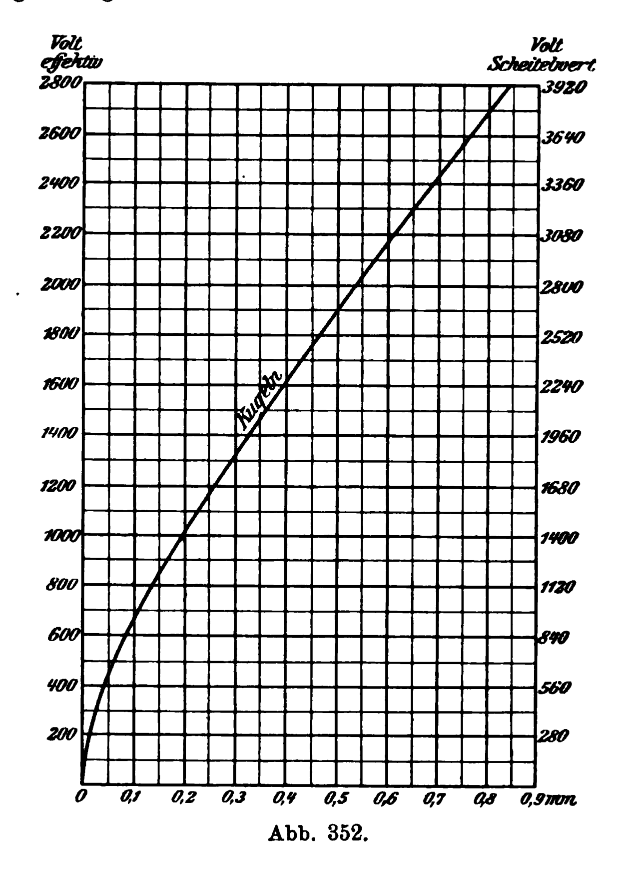


Abb. 352.

Die Temperatur hat auf die Funkenspannung nur insofern Einfluß, als dadurch bei konstantem Druck die Dichte des Gases sich ändert. Bei konstantem Druck nimmt also die Schlagweite mit der Temperatur zu, bei konstantem Volumen ist sie von der Temperatur unabhängig.

Der Zusammenhang zwischen Schlagweite und Funkenspannung ist zwar praktisch sehr wichtig, der innere Zusammenhang aber besteht zwischen Schlagweite und elektrischer Kraft, da von dieser die Ionisierung des Gases abhängt. Eine an allen Stellen gleiche elektrische Kraft herrscht aber nur in einem homogenen Felde, also zwischen parallelen Platten, oder zwischen Kugeln, deren Ab-

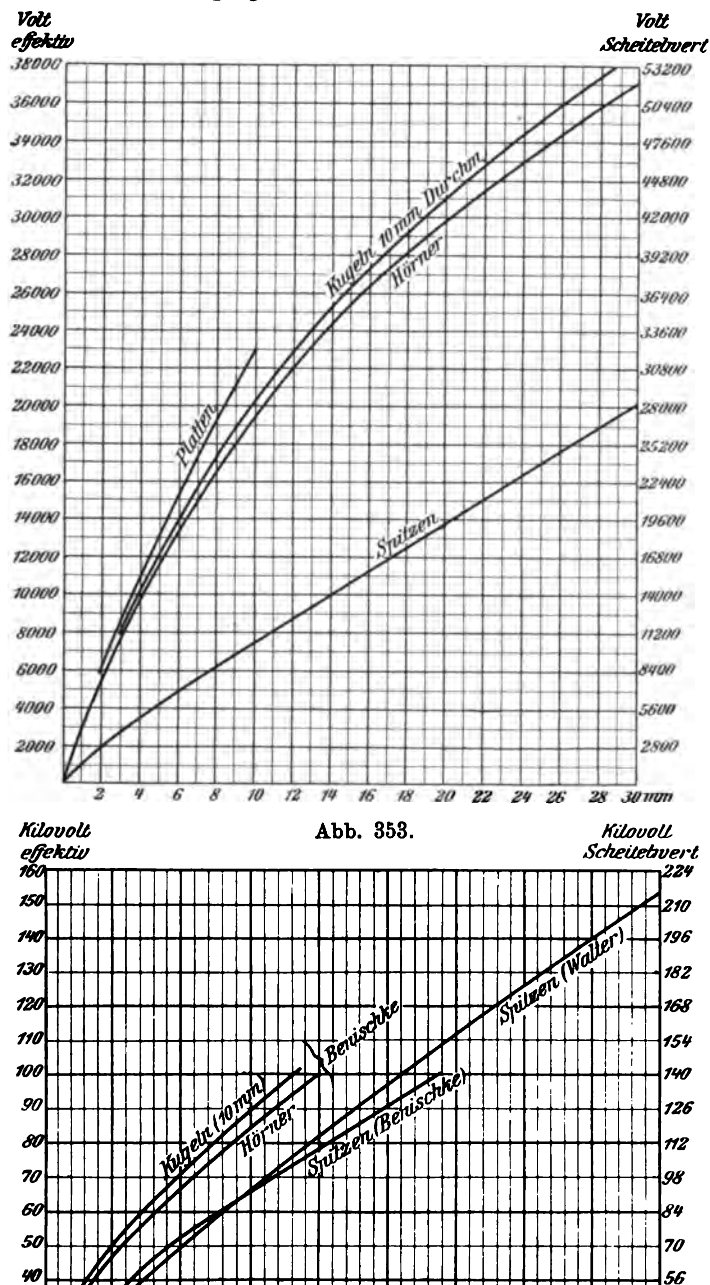


Abb. 353.

Abb. 354.

stand klein ist gegen ihren Krümmungsradius. Für solche Fälle zeigt Abb. 355 die Abhängigkeit der Schlagweite von der elektrischen Kraft $\mathfrak{H}$ in elektrostatischen Einheiten nebst der Schlagweitenkurve, aus der $\mathfrak{H}$ berechnet wurde. Daraus ersieht man, daß eine um so kleinere elektrische Kraft zur Erzeugung des Funkens nötig ist, je länger die Schlagweite ist. Schließlich nähert sich die elektrische Kraft asymptotisch einem konstanten Werte. Das erklärt sich daraus, daß bei kurzen Schlagweiten nur ein kurzer Weg zur Verfügung steht, auf dem die freien Ionen die nötige lebendige Kraft zur Zerspaltung der Atome erlangen müssen. Daher muß die beschleunigende elektrische Kraft groß sein. Andererseits kann bei großen Schlagweiten die Geschwindigkeit der freien Ionen trotz dauernder Einwirkung der elektrischen Kraft nicht unbegrenzt anwachsen, weil der Bewegungswiderstand schneller (wahrscheinlich quadratisch) als die Geschwindigkeit wächst. Fallende Schneeflocken erhalten schon nach kurzer Weglänge eine gleichförmige Geschwindigkeit; ebenso ist es bei der Bewegung der Ionen. Aus diesem Grunde nähert sich mit wachsender Schlagweite die zur Erzeugung der Funkenentladung nötige elektrische Kraft einem konstanten Werte.

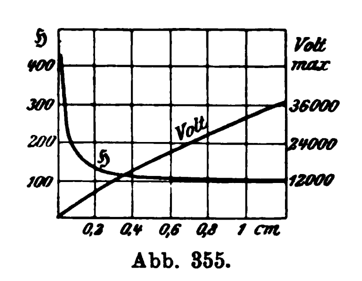


Abb. 355.

Bei gleicher Spannung ist die Kraftliniendichte und daher die elektrische Kraft in der Nähe der Elektroden um so größer, je kleiner der Krümmungsradius der Elektroden ist, d. h. je spitzer sie sind (§ 21). Daraus erklärt die aus Abb. 353 u. 354 hervorgehende Tatsache, daß bei gleicher Schlagweite die Funkenspannung um so niedriger ist, je spitzere Form die Elektroden haben.

232. Beeinflussung der Funkenentladung durch Entladeverzug und Überspannung.

Häufig bemerkt man, daß beim Anlegen einer konstanten Spannung an die Elektroden die Funkenentladung erst nach einiger Zeit eintritt, oder daß trotz unveränderter Versuchsanordnung an einem Tage die Entladung eintritt, an einem andern nicht. Schließt man zwei Funkenstrecken C und D (Abb. 356), deren Länge wenig voneinander verschieden ist, an dieselbe

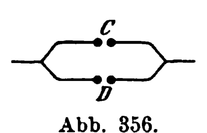


Abb. 356.

Stromquelle an, so kann man durch Abdunkelung der kürzeren und Beleuchtung der längeren erreichen, daß an der längeren eher eine Funkenentladung eintritt als an der kürzeren.

Diese Erscheinung hat Ähnlichkeit mit dem Siedeverzug beim Sieden von Flüssigkeiten, weshalb man sie als Entladeverzug bezeichnet. Die Erklärung ergibt sich daraus, daß die Funkenentladung eine selbständige Strömung der Elektrizität ist. Nach § 228 kann eine solche nur eintreten, wenn bereits Ionen in dem Gas vorhanden sind, denen durch die elektrische Kraft eine solche Geschwindigkeit erteilt wird, daß sie durch ihren Stoß auf neutrale Atome neue Ionen bilden, bis das Gas genügendes Leitungsvermögen erlangt hat. Wäre der Fall möglich, daß kein einziges freies Ion in dem Gas vorhanden ist, so könnte man die Elektrodenspannung beliebig erhöhen, ohne daß eine Entladung zustande kommt. Dieser Fall ist praktisch nicht möglich, weil, wie in § 228 erwähnt, in jedem Gas eine Selbstionisierung eintritt, und zwar durch die jedem Gas eigentümliche Radioaktivität. Eine gewisse Zeit ist aber immerhin erforderlich, bis unter dem Einfluß des elektrischen Feldes genügend Ionen entstanden sind, um eine Entladung zu ermöglichen. Befindet sich jedoch die negative Elektrode im hellen Licht, so treten aus ihr freie Elektronen in das Gas über (§ 227). Dann geht die weitere Ionisierung durch die Stöße dieser Elektronen in so kurzer Zeit vor sich, daß die Entladung anscheinend sofort eintritt. Befinden sich aber die Elektroden im Dunkeln und entstehen auch aus anderen Ursachen nicht genügend freie Elektronen, so kann es minutenlang dauern, bis es zu einer Entladung kommt, oder auch gar nicht, wenn die Elektrodenspannung nur sehr wenig über der zur Ionisierung nötigen Anfangsspannung liegt. Durch Bestrahlung der negativen Elektrode mit intensivem Licht, insbesondere violettem und ultraviolettem, sowie auch mit Röntgenstrahlen und Radiumstrahlen, wird der Entladeverzug sofort aufgehoben. Die Auslösung des Funkens wird auch durch elektrische Wellen, welche auf die Funkenstrecke auftreffen, bewirkt oder beschleunigt. Der Entladeverzug und die Umstände, welche seine Aufhebung bewirken, haben zur Folge, daß man nur unter besonderen Vorsichtsmaßregeln, insbesondere nur bei genügender Helligkeit, übereinstimmender Werte bei der Messung von Funkenspannungen erhält.

Am meisten macht sich der Entladeverzug bemerkbar, wenn die Elektrodenspannung nicht plötzlich, sondern durch allmähliche Steigerung hoch gebracht wird. Manchmal aber tritt bei plötzlicher Herstellung der Spannung die Entladung schon bei einem so niedrigen Werte ein, daß das nicht aus der Aufhebung des Entladeverzuges erklärt werden kann. Das zeigt sich dann, wenn die

Elektroden aus Platten oder Kugeln bestehen, die eine gewisse Kapazität darstellen, oder sonst eine Kapazität mit den Elektroden unmittelbar verbunden ist. Die Erklärung liegt in der **Überspannung**, die auftritt, wenn die Ladung dieser Kapazitäten oszillatorisch erfolgt (§ 194), was nur bei plötzlicher Einschaltung, nicht aber bei allmählicher Steigerung der Spannung möglich ist. Die wirkliche vorhandene Anfangsspannung ist also höher, als die Klemmenspannung der betreffenden Stromquelle und kann auch nicht mit einem Spannungszeiger gemessen werden, weil sie zu kurze Zeit andauert. Sehr häufig zeigen sich solche Überspannungen beim Laden von Kondensatoren mittels Elektrisiermaschinen, Funkeninduktoren und Transformatoren als Funken von großer Länge, die um das Dielektrikum von einer Belegung zur anderen herumschlagen. Abb. 362 zeigt zwei solche, um eine Hartgummiplatte herumschlagende Entladungen, die von den zum Zwecke der Prüfung aufgeklebten Stanniolelektroden ausgehen.

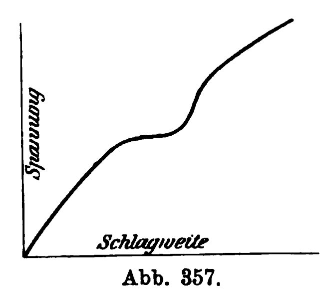


Abb. 357.

Benützt man einen Wechselstromtransformator als Stromquelle und nimmt damit eine Überschlagskurve auf, so erhält man manchmal Kurven, die eine Einbuchtung haben, wie in Abb. 357. Die Spannung ist hier erheblich kleiner, als sie dem übrigen Verlauf der Kurve entspricht. Auch hier ist die Ursache eine Überspannung, erzeugt durch Resonanz im Transformator (§ 182).

233. Elektrizitätsdurchgang durch feste und flüssige Isolatoren.

Auch durch feste und flüssige Isolatoren kann, abgesehen von einer durch Beimengungen verursachten metallischen oder elektrolytischen Leitung, Elektrizität hindurchgehen.

Der Durchgang beginnt in Form dunkler Entladungen. In einem flüssigen Isolator kann man sie leicht dadurch erkennen, daß die Flüssigkeit in der Nähe der Elektroden in Bewegung gerät. Infolge der elektrischen Anziehung, welche auf die Oberfläche als Grenzfläche zweier verschiedener Dielektrizitätskonstanten ausgeübt wird, verändert sich die Oberflächenspannung und daher auch die Kapillarität, was man beim Ein- und Ausschalten der Spannung an den Rändern der Oberfläche bemerkt. Bei festen Isolatoren merkt man die dunklen Entladungen erst nach langer Zeit, wenn sie eine allmähliche Zerstörung des Stoffes bewirkt haben. Sind die Elek-

troden nicht unmittelbar mit dem flüssigen oder festen Stoff in Berührung, sondern besteht ein Luftzwischenraum, so bemerkt man in diesem bei genügender Spannung Glimm- oder Büschelentladungen, wie Abb. 358 zwischen einem Porzellanrohr und seiner metallischen Fassung zeigt; die zweite Elektrode befindet sich im Innern des Rohres. Hat eine evakuierte Glasröhre nur an einem Ende eine Elektrode, an dem anderen aber einen äußerlichen Stanniolbelag, so leuchtet die Röhre beinahe ebenso, als wenn sie zwei innere Elektroden hätte. Auch wenn beide Elektroden aus äußeren Belägen bestehen, kommen Entladungen in der Röhre zustande. Man benützt solche zur Ozonerzeugung (§ 243). Die Folge eines solchen Elektrizitätsdurchganges ist eine Erwärmung des betreffenden Stoffes. Bei Wechselstromentladungen kommt hierzu noch eine Erwärmung durch Rückstandsbildung (§ 178).



Abb. 358. Durchgang der Elektrizität durch Porzellan.

Der Durchgang der Elektrizität durch flüssige Isolatoren scheint ebenso wie bei Gasen auf einer Ionisierung zu beruhen [1]). Bei den festen Isolatoren dürfte sowohl eine Ionisierung, als auch ein Durchgang durch die mit Luft gefüllten Poren in Betracht kommen.

Die flüssigen Isolatoren sind für die Elektrotechnik von großer Wichtigkeit, weil sowohl die dunklen Entladungen als auch die Funkenentladungen viel später auftreten als in Luft, und weil sie gegenüber den festen Isolatoren den Vorteil haben, daß ein einmaliger Funkenübergang keinen bleibenden Kanal erzeugt. Natürlich kommen für elektrotechnische Zwecke nur solche Stoffe in Betracht, welche nicht leicht entzündlich sind, also die schwer-

---

[1]) Schweidler, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. 109 (II a) 1900. Przibram, ebenda, Bd. 114 (II a) 1905.

flüssigen mineralischen und pflanzlichen Öle. Unter diesen haben die beste Isolierfähigkeit die dicken Harzöle (vergl. den folgenden Paragraphen); doch vermögen die flüssigeren Mineralöle einen Entladungskanal schneller zu schließen. Von besonderem Vorteil erweisen sich die Öle dadurch, daß Lichtbögen wegen der am Schluß des § 186 angeführten Gründe nur sehr schwer in ihnen bestehen können. Daher gehen Funkenentladungen trotz zureichender äußerer Bedingungen nicht leicht in Lichtbögen über, und Lichtbögen, die durch Öffnen zweier Kontakte unter Öl gebildet werden, reißen schon bei sehr kurzem Abstand der Kontakte ab.

234. Durchschlagsfestigkeit und Widerstand.

Das plötzliche Auftreten einer Funkenentladung durch einen gasförmigen oder flüssigen oder festen Stoff hat große Ähnlichkeit mit einer mechanischen Durchdringung desselben; bei einem festen Stoff verbleibt ein Loch oder Kanal. Daher spricht man von „Durchschlag" und „Durchschlagsfestigkeit". Unter letzterer versteht man die Widerstandsfähigkeit des betreffenden Stoffes gegen eine Funkenentladung. Sie läßt sich aber nicht durch eine einzige Zahl charakterisieren, weil sie weder der elektrischen Kraft, noch der Spannung zwischen den Elektroden, noch der Dicke der Schicht proportional ist, sondern man muß Schaulinien aufstellen wie in Abb. 352—354 für Luft und in Abb. 359 und 360, für einige andere Stoffe bei kugelförmigen Elektroden.

Bei demselben Stoff und unter derselben Spannung hängt die Durchschlagsfestigkeit von der elektrischen Kraft ab. Daher ist sie bei gekrümmten Isolierschichten um so kleiner, je kleiner der Krümmungsradius ist, weil da auch die elektrische Kraft um so größer ist (§ 21). Isolierschichten, die von konzentrischen krummen Flächen begrenzt sind, werden aus diesem Grunde an der inneren Seite stärker beansprucht, als an der äußeren. Um also bei der Prüfung von Stoffen auf ihre Durchschlagsfestigkeit Zahlen zu erhalten, welche von der Form der Elektroden und sonstigen Äußerlichkeiten unabhängig sind, muß man ebene Platten verwenden, an welchen Elektroden von mindestens 1 cm^2 Fläche anliegen. Haben die Elektroden scharfe Ecken oder Ränder, wie z. B. solche aus Stanniol, so herrscht auch hier ein größeres Potentialgefälle und daher eine stärkere Beanspruchung des zwischen ihnen befindlichen Stoffes. Glücklicherweise entstehen aber an den Ecken und Kanten, wegen der größeren elektrischen Flächendichte, dunkle Entladungen oder Büschelentladungen (Abb. 362), wodurch das Potentialgefälle sehr vermindert wird. Verhindert man diese Entladung z. B. dadurch,

daß man das ganze unter Öl bringt, so tritt schon bei kleinerer Spannung der Durchschlag ein, als in Luft.

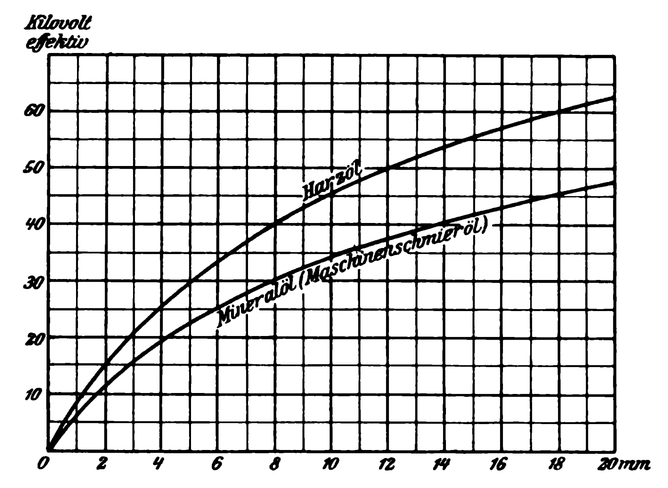


Abb. 359. Durchschlagsspannung von Harzöl und Mineralöl.

Vom Ohmschen Widerstand hängt die Durchschlagsfestigkeit nicht ab. Luft hat z. B. unterhalb der Anfangsspannung und mangels einer fremden Ionisierung einen unendlich großen Widerstand. Dann aber tritt plötzlich ein Überschlag ein, und zwar eher als bei vielen festen Stoffen, bei denen sich ein endloser Widerstand messen läßt. Unter den festen Isolatoren kann einer mit dem kleineren Widerstand die größere Durchschlagsfähigkeit haben. Durch Poren im Material wird die Durchschlagsfestigkeit natürlich stark herabgesetzt (vergl. § 235).

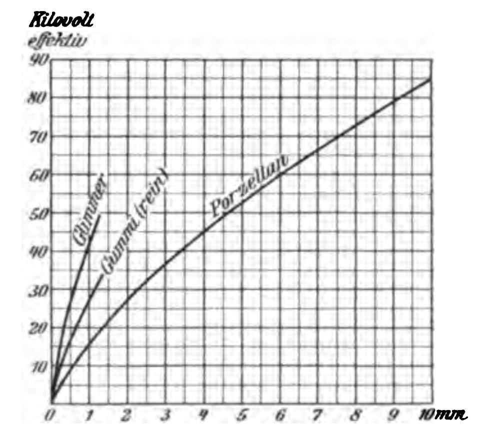


Abb. 360. Durchschlagsspannung von Glimmer, Gummi und Porzellan.

Auch bei elektrolytischen Flüssigkeiten mit deutlichem Leitungsvermögen läßt sich eine Durchschlagsfestigkeit feststellen, da Funkenentladungen in ihnen eintreten können, wenn die Spannung plötzlich an die Elektroden angelegt wird, und der Widerstand so groß ist, daß es eine gewisse Zeitlang dauert, bis der Strom eine gewisse Stärke

erreicht hat und das Potentialgefälle auf einen kleinen Wert herabdrückt.[1])

235. Durchschlagsfestigkeit hintereinandergeschalteter Isolierstoffe.[2])

Sind zwei Isolierstoffe von verschiedener Dielektrizitätskonstante in bezug auf die elektrischen Kraftlinien hintereinandergeschaltet, so tritt eine Veränderung der elektrischen Kraft und daher auch der Durchlagsfestigkeit ein gegenüber dem Fall, daß derselbe Raum von **einem** Isolierstoff ausgefüllt ist.

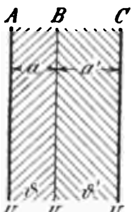


Abb. 361.

Wir betrachten den Fall, daß sich zwei Isolierstoffe mit den Dielektrizitätskonstanten ϑ und ϑ' in parallelen Schichten von der Dicke a und a' zwischen zwei leitenden Flächen A und C befinden (Abb. 361), deren Potentialwerte U_1 und U_3 seien. Ist E die Spannung, an die sie angeschlossen ist, so ist

$$U_1 - U_3 = E.$$

Da die Kraftlinien auf den beiden Flächen senkrecht stehen, so ist die Trennungsfläche B zwischen den beiden Stoffen eine Niveaufläche mit dem noch unbekannten Potentialwerte U_2. Nach § 15 ist die elektrische Kraft in dem linken Stoff

$$\mathfrak{H} = \frac{U_1 - U_2}{a}$$

und die elektrische Kraft in dem rechten Stoff

$$\mathfrak{H}' = \frac{U_2 - U_3}{a'}$$

oder

$$U_1 - U_2 = a\,\mathfrak{H}$$

$$U_2 - U_3 = a'\,\mathfrak{H}'.$$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$U_1 - U_3 = E = a\,\mathfrak{H} + a'\,\mathfrak{H}'.$$

Nach Gl. 35 ist

$$\vartheta\,\mathfrak{H} = \vartheta'\,\mathfrak{H}'.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergeben sich nun die elektrischen Kräfte wie folgt

---

[1]) Heydweiller, Annal. d. Phys., Bd. 17, S. 346, 1905.

[2]) Benischke, ETZ 1907, Heft 5.

$$\mathfrak{H} = \frac{E}{a + a'\frac{\vartheta}{\vartheta'}}$$

$$\mathfrak{H}' = \frac{E}{a' + a\frac{\vartheta'}{\vartheta}}.$$

Ist $\mathfrak{H}_v$ die elektrische Kraft in dem Falle, daß der ganze Raum zwischen den leitenden Flächen A und B von einem einzigen Stoff ausgefüllt ist, so daß $\vartheta = \vartheta'$ ist, so ist

$$\mathfrak{H}_v = \frac{E}{a + a'}.$$ [1]

Aus den drei letzten Formeln erkennt man folgendes: ist $\vartheta > \vartheta'$, so ist $\mathfrak{H} < \mathfrak{H}_v < \mathfrak{H}'$, d. h. in dem Stoff mit der größeren Dielektrizitätskonstante ist die elektrische Kraft kleiner, in dem anderen aber größer, als wenn derselbe Raum von einem einzigen Stoff ausgefüllt ist.

Wir betrachten als Beispiel den Fall, daß zwischen zwei Elektroden mit einem Abstand von $a + a' = 1$ cm eine Porzellanplatte oder Glimmerplatte ($\vartheta = 6$, ungefähr) von $a = 0{,}2$ cm eingeschoben wird, so daß ein Luftraum von $a' = 0{,}8$ cm verbleibt ($\vartheta' = 1$). Dann ist bei einer Spannung von 100 elektrostatischen Einheiten (= 30000 Volt) die elektrische Kraft in der Porzellanplatte

$$\mathfrak{H} = \frac{100}{0{,}2 + 0{,}8 \cdot 6} = 20$$

und die elektrische Kraft im verbleibenden Luftraum

$$\mathfrak{H}' = \frac{100}{0{,}8 + \frac{0{,}2}{6}} = 120.$$

Dagegen war die elektrische Kraft vor dem Einschieben der Platte

$$\mathfrak{H}_v = \frac{100}{1} = 100.$$

Die elektrische Kraft im Luftraum ist also zwar durch das Einschieben der Platte von 100 auf 120 gestiegen, eine Entladung

[1]) Daß hierin die Dielektrizitätskonstante überhaupt nicht vorkommt, erklärt sich daraus, daß hier die Potentialdifferenz $U_1 - U_2$ konstant (gleich E) ist, und die elektrische Kraft immer gleich dem Potentialgefälle ist (§ 15). Nur bei konstanter Elektrizitätsmenge ist Kraft und Potential von der Dielektrizitätskonstante abhängig (§ 28).

zwischen den beiden Elektroden kann aber trotzdem nicht stattfinden, weil die Elektrizität dabei auch durch die Platte hindurch müßte. Hier aber ist die elektrische Kraft so gering (20), daß ein Durchgang der Elektrizität in keiner Art möglich ist. Die Isolierung und Durchschlagsfestigkeit ist also durch das Einschieben der Platte erhöht worden, und das wäre selbst dann der Fall, wenn das Material der Platte an und für sich eine geringere Durchschlagsfestigkeit hätte als Luft. Theoretisch wird die Isolierung um so besser, je dünner die eingeschobene Platte ist, weil sich die elektrische Kraft asymptotisch dem Werte $\frac{100}{6} = 16{,}6$ in der Platte und dem Werte $\frac{100}{1} = 100$ im Luftraum nähert (bei diesem Beispiel). Praktisch aber kommt man bei dünner werdender Platte zu einer Grenze wo die Durchschlagsfestigkeit plötzlich null wird, weil leitende Teilchen oder Poren zutage treten, die sich über die ganze Dicke der Platte erstrecken.

Sind die leitenden Flächen keine Ebenen, sondern konzentrische Flächen, wie bei einem Kabel (Abb. 33), so nimmt die Kraftliniendichte und daher auch die elektrische Kraft gegen den Mittelpunkt zu. Für zwei verschiedene Isolierschichten folgt dann aus dem Obigen, daß die elektrische Beanspruchung noch ungleichmäßiger wird, wenn der Stoff mit der kleineren Dielektrizitätskonstante innen liegt, und umgekehrt.

Verlaufen die Kraftlinien nicht senkrecht zur Trennungsfläche der beiden Stoffe, so treten an Stelle der Gl. 35 die Gl. 38 und 40. Dann ist die Verteilung der elektrischen Kraft nicht nur von den Dicken und Dielektrizitätskonstanten der beiden Stoffe, sondern auch vom Einfallswinkel der Kraftlinien abhängig.

Voraussetzung für das Vorstehende ist, daß beide Stoffe wirkliche Isolatoren von homogener Beschaffenheit sind, d. h. daß sie kein merkliches metallisches oder elektrolytisches Leitungsvermögen und keine Poren haben. Hat aber einer der Stoffe ein merkliches Leitungsvermögen oder Oberflächenleitung, so nimmt die Trennungsfläche B (Abb. 361) das Potential jener leitenden Fläche an, mit der sie in Berührung ist, z. B. mit A. Dann ist

$$U_2 - U_3 = E$$

und daher

$$\mathfrak{H}' = \frac{E}{a'}.$$

Vor dem Einschieben dieser Platte war die elektrische Kraft

$$\mathfrak{H}_v = \frac{E}{a + a'}.$$

Das Einschieben der Platte bedeutet also in diesem Fall eine um so größere Steigerung der elektrischen Kraft, also eine um so größere Beanspruchung des anderen Stoffes, je dicker die Platte ist.

236. Oberflächenleitung, Gleitfunken.

Oft ist die Isolation eines Gegenstandes trotz bestem Isolierstoff schlecht, weil die Elektrizität auf der Oberfläche kriecht. Die Ursache dieser Oberflächenleitung ist meist eine dünne Feuchtigkeitshaut. Besonders dem Glas ist sie eigen und daher muß es,



Abb. 362. Gleitfunken auf einer Hartgummiplatte und Randentladungen (Büschellicht) an der Elektrode.

um gut zu isolieren, mit Lack überzogen werden. Andere Stoffe, wie insbesondere die durch Vulkanisierung hergestellten, erhalten nach längerer Zeit eine leitende Oberfläche unter der Wirkung des Ozons und der salpetrigen Säure der Luft oder der schwefligen Säure des Stoffes selbst, die von der Vulkanisierung herrührt.

In allen Fällen zeigt sich, daß selbst auf ganz trockenen und reinen Oberflächen bedeutend längere Funkenentladungen stattfinden als bei gleicher Spannung direkt durch Luft. Zwei solche Gleitfunken zeigt Abb. 362 auf einer Hartgummiplatte. Sie gehen um den Rand der hier nur teilweise abgebildeten Platte von einer Elektrode zur anderen (Randentladungen). Vor dem Überschlag gingen von den Rändern der Elektroden Büschelentladungen von 5 cm Länge aus. Manchmal sind diese so stark, daß sie einen prächtigen Anblick gewähren. Wirken sie lange Zeit, so greifen sie durch Bildung von Ozon und salpetriger Säure (§ 244) die Oberfläche des Stoffes an, wie Abb. 363 zeigt. Dagegen schützt sorgfältige Lackierung.



Abb. 363. Angriff der Oberfläche einer Hartgummiplatte durch Büschelentladungen.



Abb. 364. Gleitfunken (*B*) und Durchschläge (*A*) einer Stabilitplatte.

Sind merkliche Poren in einem festen Isolator vorhanden, so sucht sich die Funkenentladung diese aus, weil die in ihnen ent-

haltene Luft leicht ionisiert wird. Der Durchschlag erfolgt dann nicht zwischen den Elektroden, trotzdem hier die größte elektrische Kraft herrscht, sondern dort wo die größten Poren sind, selbst wenn diese weit entfernt sind, wie Abb. 364 zeigt, wo der Durchschlag in den mit *A* bezeichneten Stellen erfolgt ist, während bei *B* die Entladung um den Rand der Platte gegangen ist. Zunächst gehen von den Elektroden Büschelentladungen über die Oberfläche hin, welche die Poren aufsuchen. Durch Vorentladungen wird die Luft in diesen ionisiert, und wenn dies geschehen ist, wenden sich die von allen Seiten der Elektroden ausgehenden Entladungen diesen Poren zu. Der Durchschlag erfolgt natürlich noch früher, wenn sich Poren zwischen den beiden Elektroden befinden.

237. Äußeres Bild des Lichtbogens.

Zum Unterschied von der Funkenentladung bezeichnet man einen dauernden Elektrizitätsübergang zwischen zwei Elektroden in einem Gas von mehr als 0,1 mm Quecksilber Druck als Lichtbogen. Der Unterschied gegenüber einer dauernden Glimm- oder Büschelentladung besteht in der größeren Stromstärke und in dem geringeren Spannungsabfall an den Elektroden.

Ein Lichtbogen kann unter gewissen Bedingungen zwischen Elektroden aus Kohle und allen anderen gut leitenden Stoffen hergestellt werden. Bei Kohlenelektroden nimmt der Lichtbogen, wenn er zum ruhigen Brennen gekommen ist, folgende Gestalt an (Abb. 365). Beide Elektroden haben stumpfe Spitzen. Die positive (Anode) zeigt eine Abflachung oder Vertiefung, die man als Krater bezeichnet. Die Spitzen beider Elektroden befinden sich in Weißglut. Die Temperatur der positiven Spitze beträgt im Krater 3500°—4000°, die der negativen Spitze 2500°—3500°, die der Gasstrecke zwischen beiden, die man als den eigentlichen Bogen bezeichnet, liegt in der Mitte. Das Licht geht zum weitaus größten Teile von den Elektrodenspitzen aus, und zeigt wie bei allen weißglühenden Körpern das Spektrum des Sonnenlichtes. Vom Bogen gehen hauptsächlich blaue bis ultraviolette Strahlen aus. An ihm unterscheidet man den violetten „Kern“ *B* und die äußere rötliche „Aureole“ *C*. Der Kern ist der eigentliche stromleitende Teil; in ihm verlaufen die Stromlinien. Die Aureole scheint nur aus verbrennenden Teilchen des Elektrodenmateriales zu bestehen. Darum verschwindet sowohl die Aureole, sowie auch die zugespitzte Form der Elektroden bei den Bogenlampen mit eingeschlossenem

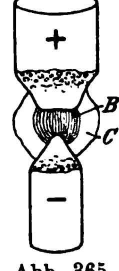


Abb. 365.

Lichtbogen. Hier ist, um den Abbrand der Kohlen und dadurch eine längere Brenndauer zu erzielen, der Lichtbogen von einer an die Kohlenstifte gut anschließenden Glasglocke umgeben, so daß der Luftzutritt auf ein Minimum beschränkt ist. Infolgedessen erhalten die Elektroden beim Abbrennen keine spitzen, sondern flachen Enden. Da dadurch die Lichtausstrahlung mehr behindert wird, muß man ihnen größeren Abstand geben, d. h. größere Lichtbogenspannung (60—80 Volt) anwenden.

Bei den gewöhnlichen Bogenlampen verwendet man zur Verbesserung des Leitungsvermögens Kohlen, die eine Seele aus besser leitendem und leichter verdampfendem Material enthalten (Dochtkohlen). Da die positive Kohle eine höhere Temperatur hat und daher schneller abbrennt, wählt man sie dicker als die negative. Da sie auch mehr Licht ausstrahlt als die negative, ordnet man sie als obere Kohle an, wenn das Licht hauptsächlich nach unten geworfen werden soll.

Setzt man den Kohlen Oxyde oder Fluoride der Metalloide (Ca, Ba, Sr, Mg) zu, so gehen deren Dämpfe in den Bogen über, der nun auch eine beträchtliche Lichtmenge aussendet, natürlich nur jene Strahlen, welche dem Spektrum des betreffenden Metalloides eigentümlich sind. Daher erhält das Licht durch Kalzium eine gelbliche, durch Strontium eine rötliche Färbung (Effektbogenlampen). Die Lichtausbeute nach unten wird noch weiter gesteigert, wenn die Kohlen nicht einander gegenüber, sondern unter einem kleinen Neigungswinkel nebeneinander stehen (Abb. 85, S. 116), so daß jetzt beide Elektroden und der Bogen ihr Licht nach unten senden. Das ist hier möglich, weil der Bogen durch das bessere Leitungsvermögen, das er durch die metallischen Dämpfe erhält, bei gleicher Spannung zwei- bis dreimal so lang wird, als bei gewöhnlichen Kohlen. Die Aureole sieht dabei aus wie eine Flamme (Flammenbogenlicht).

Im Lichtbogen findet ein Transport des Elektrodenmateriales von einer Elektrode zur anderen statt; hauptsächlich von der positiven zur negativen. Bei kurzen Lichtbögen erhält dadurch die negative Spitze einen Ansatz (Pilz), der zweifellos von dem Material der positiven Elektrode herrührt.

238. Lichtbogenspannung und Existenzbedingung des Lichtbogens.

Wendet man das Ohmsche Gesetz formell auf den Lichtbogen an: $i = \frac{e}{w_s}$, so bedeutet w_s einen veränderlichen, also scheinbaren Widerstand, den man als Lichtbogenwiderstand bezeichnet.

Daraus erhält man aber keinen Aufschluß über die Beziehung zwischen der Elektrodenspannung e, die man hier **Lichtbogenspannung** nennt, und der Stromstärke.

Da der Lichtbogen eine selbständige Strömung ist, so müßte für die Lichtbogenspannung die Gleichung $e = g + bi$ aus § 228 gelten. Indessen hat sich gezeigt, daß b keine Konstante ist, sondern um so kleiner ist, je kleiner der Elektrodenabstand l (**Bogenlänge**) ist und je größer die Stromstärke ist, weil mit der Stromstärke der Querschnitt des Bogens und seiner Basis auf den Elektroden zunimmt, so daß im allgemeinen

$$e = g + \alpha l \text{ ist.}$$

Genaue Untersuchungen haben gezeigt, daß diese Formel zur Darstellung der Lichtbogenspannung nicht genügt, sondern aus obigem Grunde noch ein der Stromstärke umgekehrt proportionales Glied hinzugefügt werden muß:

$$e = g + \alpha l + \frac{\gamma + \delta l}{i},$$

wobei g, α, γ, δ Konstanten sind, die nur vom Material und der Dicke der Elektroden, sowie vom Gas, in dem der Bogen brennt,

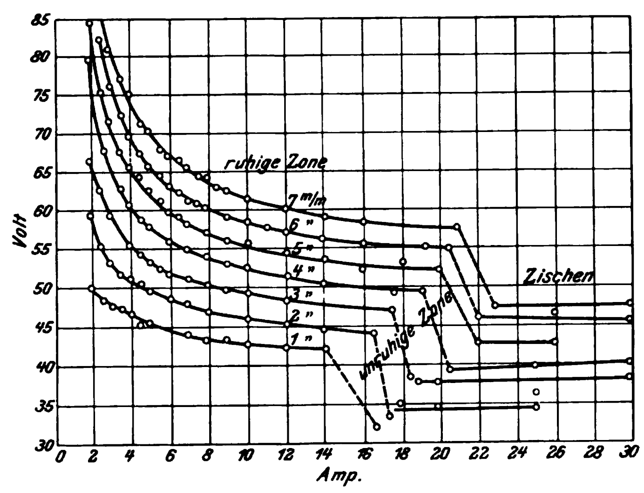


Abb. 366. Lichtbogencharakteristik zwischen Kohlenelektroden.

abhängen. Für $l = 0$ und $i = \infty$ ist $e = g$. Mithin ist g jener Wert, den die Spannung mindestens haben muß, also die **Minimumspannung**; sie setzt sich zusammen aus dem Anoden- und dem Kathodenfall. Abb. 366 stellt die letzte Formel durch eine Schar

Kurven bei verschiedener Lichtbogenlänge dar.[1]) Da sie die Abhängigkeit des Stromes von der Spannung darstellen, bezeichnet man sie als Charakteristik des Lichtbogens. Abb. 367 zeigt die Abhängigkeit der Lichtbogenspannung von der Bogenlänge bei verschiedenen Stromstärken. Der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse gibt die Minimumspannung für die betreffende Stromstärke, das ist der Wert $e = g + \frac{\gamma + \delta l}{i}$.

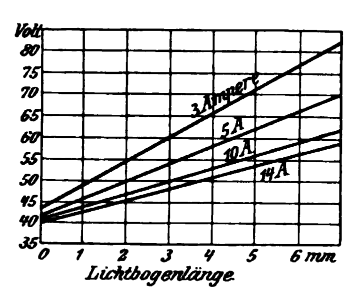


Abb. 367. Lichtbogenspannung zwischen Kohlenelektroden.

Die Minimumspannung bei größter Stromstärke, das ist also g, hat für beiderseits gleiche Elektroden folgende Werte in Volt:

Gewöhnliche Kohle	Platin	Eisen	Kupfer	Zink	Silber	Kadmium
39	27,5	25	24	20	15,5	10,5

In der Verteilung der Minimumspannung auf Anoden- und Kathodenfall zeigt sich ein Unterschied zwischen Glimmentladung (§ 217) und Lichtbogen. Während dort der Kathodenfall erheblich größer ist als der Anodenfall, ist das hier nicht der Fall. Bei gewöhnlichen Kohlen beträgt der Kathodenfall 8 V., der Anodenfall 31 V. Bei Metallelektroden ist der Kathodenfall um ein wenig größer als der Anodenfall.

Die Minimumspannung gibt keinen Aufschluß über die Existenzbedingung des Lichtbogens; sie sagt nur, welche Spannung mindestens notwendig ist, wenn die Stromstärke sehr groß und die Bogenlänge null ist. Bei kleinerer Stromstärke und größerer Länge ist eine höhere Spannung erforderlich. Steigt z. B. der Spannungsabfall in der Stromquelle so sehr an, daß von der EMK nicht genug für die Lichtbogenspannung übrig bleibt, so verlöscht der Lichtbogen. Der Bestand des Lichtbogens hängt also auch von den Verhältnissen im äußeren Stromkreis ab. Mathematisch läßt sich die dynamische Existenzbedingung (Stabilitätsgrenze) dadurch ausdrücken, daß der Lichtbogen erlöscht, wenn

$$-\frac{de}{di} < w_a \text{ ist}^{2}),$$

[1]) Nach Frau Airton.

[2]) Kaufmann, Annal. d. Phys. 2, S. 158, 1900. Granquist (Gesellsch. d. Wissensch. zu Upsala 1903) hat diese Bedingung in folgender Form ausgedrückt: $E + i^2 \frac{dw_s}{di} < 0$, wobei E die EMK der Stromquelle bedeutet.

d. h. wenn $\frac{de}{di}$ negativ und kleiner ist als der äußere Widerstand w_a des Stromkreises. Er erlischt also nur, wenn bei zunehmender Stromstärke i die Bogenspannung e abnimmt, denn dann ist der Differentialquotient negativ. Das ist der Fall, wenn die Bogenlänge vergrößert wird, z. B. durch ein magnetisches Gebläse oder durch Auseinanderziehen der Elektroden. Das Verhältnis $\frac{de}{di}$ ist dabei gleich der Änderung, die der Lichtbogenwiderstand w_s erfährt Ist der Betrag dieser Änderung kleiner als der äußere Widerstand w_a, so erlischt der Lichtbogen. Ist der äußere Widerstand verschwindend klein, so liegt die Grenzbedingung bei $\frac{de}{di} = 0$. D. h. die Grenze liegt dort, wo die Charakteristik (Abb. 366) parallel zur Abszissenachse wird. Schon wenn der Lichtbogen in die Nähe dieser Grenze kommt, wird der Lichtbogen unruhig, die Stromstärke schwankt, und man hört ein brummendes oder zischendes Geräusch. Je kleiner w_a ist, desto kleinere Werte von $\frac{de}{di}$ genügen, um den Lichtbogen zum Verlöschen zu bringen; er brennt also um so ruhiger, je größer der äußere Widerstand ist. Man verwendet daher schon seit den Anfängen der Bogenlichtbeleuchtung Vorschaltwiderstände, die man als Beruhigungswiderstände bezeichnet. Bei Wechselstrom verwendet man Drosselspulen; w_a bedeutet dann ihren scheinbaren Widerstand.

239. Das Wesen des Lichtbogens.

Der Lichtbogen ist zu den selbständigen Strömungen zu rechnen. Die Ionisierung geschieht im wesentlichen dadurch, daß die neutralen Atome im Kern des Bogens, in dem die Stromleitung vor sich geht, durch den Stoß freier Ionen zerspalten werden. Die neutralen Atome werden durch Verdampfung des Elektrodenmaterials erzeugt, da sich die Spitzen der Elektroden in Weißglut befinden. Infolge dieser hohen Temperatur muß hier aber auch ein Übertritt von Ionen aus den Elektroden in die Gasstrecke, also eine Elektrisierung im Sinne des § 227 stattfinden. Ferner dürfte auch eine Ionisierung durch hohe Temperatur und ultraviolette Strahlung gemäß § 226 mitspielen, so daß man es also im Lichtbogen mit einer selbständigen und unselbständigen Strömung zu tun hat, wobei die erstere stark überwiegt. Daraus erklärt sich, warum für den Lichtbogen die einfache theoretische Formel der selbständigen Strömung nicht genügt, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben.

Aus dem Vorstehenden erklärt sich auch, warum es nicht möglich ist, einen Lichtbogen herzustellen, wenn die Elektroden verhindert werden, die erforderliche hohe Temperatur anzunehmen, und zwar ist es hauptsächlich die Kathode, welche eine gewisse Temperatur unbedingt haben muß. Die Schwierigkeit, einen Lichtbogen unter Öl herzustellen, erklärt sich aus der starken Abkühlung, die durch das Öl bewirkt wird. Will man einen Lichtbogen herstellen zwischen einem Kohlenstift und einem rotierenden Kohlenzylinder, wo immer neue kalte Stellen dem Stift gegenübertreten, so gelingt es, wenn der rotierende Zylinder Anode ist, dagegen nicht, wenn er Kathode ist. Man muß daher annehmen, daß es hauptsächlich die Kathode ist, welche freie Ionen aussendet und so die nötigen Geschosse liefert, um die große Menge neutraler Atome, welche durch Verdampfung der Elektroden entstehen, zu zerspalten. Das steht in Übereinstimmung mit dem Entladungsvorgang in sehr verdünnten Gasen (§ 222), wo ebenfalls die Kathode es ist, welche die freien Ionen aussendet. Wo die negativen Ionen auftreffen, verursachen sie eine starke Erwärmung (§ 218). Darum hat beim Lichtbogen die Anode eine höhere Temperatur als die Kathode. Von der Glimmentladung unterscheidet sich der Lichtbogen dadurch, daß der Kathodenfall bedeutend kleiner ist als dort. Das erklärt sich eben aus der hohen Temperatur und die dadurch bewirkte Ausstrahlung freier Ionen (§ 227).

Da diese Ausstrahlung das Vorausgehende ist, so kann die Einleitung (Zündung) eines Lichtbogens entweder dadurch geschehen, daß man zuerst eine Funkenentladung zwischen den Elektroden erzeugt, oder daß man die unter Spannung stehenden Elektroden zur Berührung bringt. An den Berührungsstellen werden die Elektroden durch die Stromwärme glühend, die Ausstrahlung freier Ionen findet statt, und nun kann man die Elektroden wieder auseinanderziehen bis auf die der Stromstärke entsprechenden Entfernung.

240. Der Quecksilberlichtbogen.

Bei sehr geringem Luftdruck kann zwischen einer Quecksilberkathode und einer beliebigen Anode ein Lichtbogen hergestellt werden, der bei 100 Volt eine Länge bis zu einem Meter erreicht. Der Strom wird von dem den Raum erfüllenden Quecksilberdampf geleitet. Das Licht geht ausschließlich von diesem, nicht von den Elektroden aus und zeigt daher das Spektrum des Quecksilbers, dem die roten Strahlen fehlen, während die blauen bis ultravioletten überwiegen. Wird der Bogen in einem Glasgefäß erzeugt,

so werden die ultravioletten Strahlen zum größten Teil von der Glaswand absorbiert. Wird aber ein Gefäß aus Quarz verwendet, der die ultravioletten Strahlen wenig absorbiert, so erhält man die stärkste Quelle für ultraviolettes Licht (Uviollampe).

Der Quecksilberdampf entsteht durch Verdampfung des Quecksilbers an der Kathode. Daher ist zu seiner Herstellung eine Zündung ebenso erforderlich wie beim gewöhnlichen Lichtbogen, entweder durch eine Funkenentladung bei hoher Spannung oder durch Neigen und Schütteln des Gefäßes, bis das Quecksilber mit der Anode in Berührung kommt.

Der glühende Quecksilberdampf kondensiert sich an den kühleren Wänden des Gefäßes und fällt in Tropfen nach abwärts. Daher soll sich die Kathode an der tiefsten Stelle befinden, weil dann ihr Quecksilbervorrat immer wieder erneuert wird. Zweckmäßig ist es, wenn das Gefäß eine außerhalb der stromleitenden Bahn liegende Erweiterung (*B* in Abb. 373) hat, um die Kondensation zu begünstigen (Kühlkammer), wodurch der Druck des Quecksilberdampfes geringer wird.

Je reiner der Quecksilberdampf ist, d. h. je besser das Vakuum vor dem Gebrauch der Lampe war, desto besser funktioniert sie. Während des Brennens hat der Quecksilberdampf einen Druck von 1—2 mm Quecksilbersäule.

Mit dem gewöhnlichen Lichtbogen hat der Quecksilberlichtbogen nur das gemein, daß der Kathodenfall sehr gering ist, und zwar wie dort wegen des Austrittes freier negativer Ionen aus der Kathode infolge der hohen Temperatur und weil die Quecksilberoberfläche wegen des hohen Vakuum immer metallisch blank ist. Da die zum Bestande des Lichtbogens nötigen freien negativen Ionen eben nur aus der negativen Elektrode austreten, ist es für den Bestand des Lichtbogens gleichgültig, ob die positive Elektrode aus Quecksilber oder einem anderen guten Leiter besteht. In allen anderen Punkten zeigt sich ein Unterschied zwischen dem gewöhnlichen und dem Quecksilberlichtbogen. Während bei jenem die Bogenspannung mit der Stromstärke abnimmt (Abb. 366), nimmt sie bei diesem im allgemeinen zu (Abb. 368). Während jener vom magnetischen Felde ebenso stark abgelenkt wird wie ein die gleiche Stromstärke führender metallischer Leiter, wird dieser wenig oder gar nicht beeinflußt. Während jener nach einer Unterbrechung von $^1/_{20}$ Sekunde von selbst wieder entsteht, ist es bei diesem nicht der Fall, selbst wenn die Unterbrechung nur $^1/_{1000}$ Sekunde dauert. Deshalb ist es nicht möglich, mittels Wechselstrom

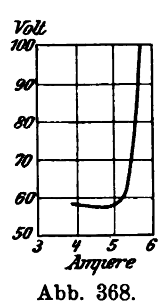


Abb. 368.

einen Quecksilberlichtbogen zu erhalten, selbst wenn beide Elektroden aus Quecksilber bestehen und die Spannung mehr als 1000 V. beträgt. Bei fortgesetzter Steigerung der Spannung erreicht man nur Funkenentladungen. Mithin ist der Quecksilberlichtbogen nicht als eigentlicher Lichtbogen, sondern als „positives Licht“ in hochevakuierten Entladungsröhren (§ 216) zu betrachten. Es zeigt sich auch wie dort ein dunkler Zwischenraum zwischen Kathode und Lichtsäule.

241. Der Wechselstromlichtbogen.

Wird ein Lichtbogen von Wechselstrom unterhalten, so wechseln die Elektroden ihre Polarität bei jedem Wechsel des Stromes. Daher verschwindet der Unterschied in der Gestalt der Elektroden und beide erhalten die Form von stumpfen Spitzen. Obwohl der Wechselstrom zwischen jedem Wechsel durch null geht, verlischt der Bogen doch nicht, weil die Elektroden und insbesondere die Kathode, auf die es ankommt, in Weißglut bleiben, und daher auch während des Augenblickes, wo der Strom null ist, Ionen aussenden. Immerhin geht das Leitungsvermögen des Bogens etwas zurück und daher ist beim Anstieg der Spannung von null an ein höherer Wert derselben notwendig, als wenn sie wie bei Gleichstrom unverändert bleibt. Das erkennt man aus den Wellenformen in Abb. 369. Die Lichtbogenspannung steigt bis zu der Spitze im Augenblick *a*. Bis dahin ist die Stromstärke gering. Hier aber wird der Lichtbogen normal, die Stromstärke steigt plötzlich, die Spannung fällt auf den normalen Wert und behält ihn bis gegen Ende der halben Welle. Die Stromwelle erhält dadurch die Form einer Lanzenspitze. Eine Folge dieser Verzerrung beider Wellenformen ist es, daß das Produkt aus Strom und Bogenspannung nicht gleich der mit einem Wattmeter gemessenen Leistung ist, sondern größer, so daß sich ein Leistungsfaktor ergibt, der etwas kleiner ist als 1, obwohl Selbstinduktion oder Kapazität im Lichtbogen nicht vorhanden ist.

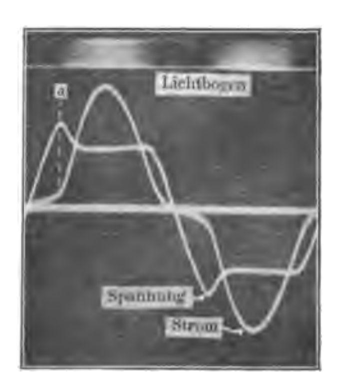


Abb. 369. Oszillographische Aufnahme von Strom, Spannung und Lichtbogen eines Wechselstromlichtbogens zwischen Kohlen.

Da der Strom bei jedem Wechsel einen Augenblick null wird, macht sich der Einfluß einer Abkühlung der Elektroden viel stärker

bemerkbar als bei Gleichstrom. Bestehen beide Elektroden aus Metallstäben, so ist ein Wechselstromlichtbogen unter 500 V. unmöglich. Besteht die eine Elektrode aus Metall, die andere aus Kohle, so erhält man nur während einer halben Periode einen Lichtbogen, nämlich während jener, wo das Metall Anode und die Kohle Kathode ist, weil diese die erforderliche Temperatur erlangen kann. Abb. 370 zeigt die oszillographische Aufnahme der Lichtbogenspannung, des Stromes und des Lichtbogens selbst in einem solchen Fall. Bis zum Augenblick *a* steigt die Spannung zunächst wieder

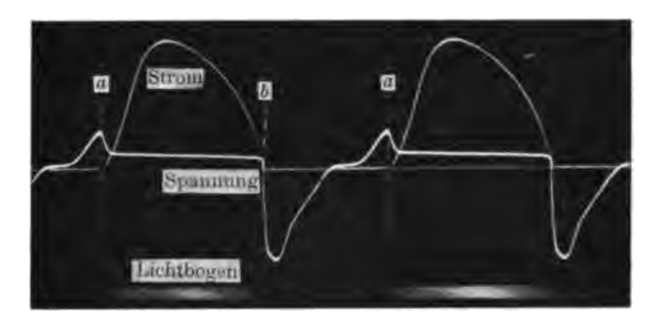


Abb. 370. Oszillographische Aufnahme von Strom, Spannung und Lichtbogen eines Wechselstromlichtbogens zwischen Metall und Kohle.

an. Jetzt entsteht der Lichtbogen und damit steigt auch der Strom rasch an, während die Spannung auf den normalen Wert sinkt. Auf diesem Wert bleibt sie bis zum Durchgang durch null am Ende dieser Halbperiode bei *b*. Jetzt wird das Metall Kathode und daher entsteht kein Lichtbogen. Die Stromstärke ist null, während die Spannung auf den Wert der EMK der Stromquelle ansteigt. Wie man sieht, besteht während der Halbperiode *b* bis *a* tatsächlich kein Lichtbogen, während er in Abb. 369 in jeder Halbperiode besteht.

242. Elektrische Ventile. Gleichrichter.

I. Die im vorstehenden beschriebene Anordnung einer Metall- und einer Kohlenelektrode läßt, wie wir gesehen haben, nur die eine Halbwelle des Wechselstromes hindurch, so man einen von Pausen unterbrochenen, gleichgerichteten Strom erhält. Diese Anordnung wirkt also wie ein Ventil, welches sich nur nach einer Seite öffnet und daher Flüssigkeit nur in einer Richtung durchläßt. Die Ursache dieser einseitigen Wirkung liegt darin, daß Kathode und Anode verschiedene Funktionen beim Durchgang der Elektrizität

durch eine Gasstrecke haben. Daraus kann sich aber noch keine Ventilwirkung ergeben, wenn beide Elektroden gleichartig sind. Ist aber die eine derart beschaffen, daß sie ihre Aufgabe als Kathode leichter erfüllt als die andere, so wird zum mindesten ein stärkerer Strom in jener Halbperiode hindurchgehen, wo sie Kathode ist, während in der anderen Halbperiode nur ein schwacher oder gar kein Strom hindurchgelassen wird.

II. Aus § 240 wissen wir, daß zum Bestande eines Quecksilberlichtbogens unbedingt erforderlich ist, daß die Kathode aus metallischem Quecksilber besteht, während die andere aus einem anderen Leiter bestehen kann. Schließt man eine solche Quecksilberröhre an eine Wechselstromquelle an, so kann der Strom nur während jener Halbperiode durch, wo das Quecksilber Kathode ist. Dieser Fall liegt also genau so wie bei dem durch Abb. 370 erläuterten Fall des Metallkohlelichtbogens. Praktisch steht der Anwendung dieses Verfahrens der Umstand entgegen, daß die Zündung eines Quecksilberlichtbogens schwierig ist. Wenn der Lichtbogen nach der einen Halbwelle erloschen ist, entsteht er nur wieder, wenn er ganz von neuem gezündet wird. Diese Schwierigkeit fällt weg, wenn drei um 120^0 verschobene Wechselströme (Dreiphasenstrom) in einem Gefäß mit drei Anoden und einer Quecksilberkathode (Abb. 371) zur Anwendung kommen. Wenn der Strom I (Abb. 372) seinen Nullwert erreicht, hat der Strom II schon den Wert *e*. Der Lichtbogen geht daher schon zur Zeit t_1 auf den zweiten Strom und die Anode II über. Bevor dieser null wird, geht der Lichtbogen zur Zeit t_2 auf den Strom III und die Anode III über; von da wieder auf den Strom I und die Anode I und so fort, so daß ein dauernder Lichtbogen besteht, wobei *K* immer Kathode ist. Jeder der drei Ströme muß durch die Leitung *KO* zwischen der Kathode und dem neutralen Punkt des Stromerzeugers gehen. Es fließt also hier ein Strom von der in Abb. 372 stark ausgezogenen Form; das ist ein pulsierender Gleichstrom. Hier kann also z. B. eine Akkumulatorenbatterie eingeschaltet und geladen werden. Bei einem einzelnen Wechselstrom erreicht man dasselbe, nämlich den Anschluß eines zweiten Lichtbogens, bevor der der ersten Halbwelle verlöscht, durch die in Abb. 373 dargestellte Schaltung, wo die von der Strom-

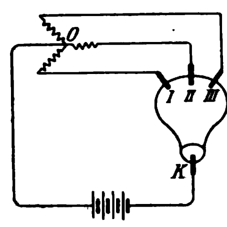


Abb. 371. Quecksilbergleichrichter für Drehstrom.

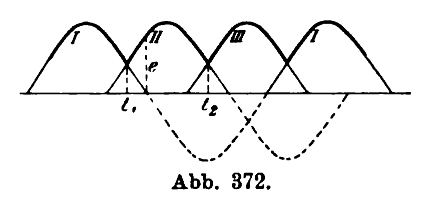


Abb. 372.

quelle $F_1 F_2$ kommende Spannung durch die Drosselspulen D_1, D_2 geteilt wird. Zwischen dem dadurch erhaltenen Spannungsmittelpunkt O und der Quecksilberkathode K kann eine zu ladende Batterie eingeschaltet werden. Die eine Halbwelle i_1 nimmt den durch die ausgezogenen Pfeile, die andere i_2 den durch die gestrichelten Pfeile angedeuteten Weg. In Abb. 374 sind diese beiden durch oszillographische Aufnahmen dargestellt. Wie man sieht, setzt der zweite ein, bevor der erste null wird. In der Leitung OK kommen sie beide im selben Sinn zusammen und ergeben den pulsierenden Gleichstrom i_g. Die Spannung zwischen den Punkten OK hat gleiche Form. In der Stromquelle und in den Leitungen $F_1 H_1$ und $F_2 H_2$ verkehrt der gewöhnliche Wechselstrom. In Abb. 375 ist noch die Spannung zwischen der Anode A_1 und der Kathode K dargestellt.

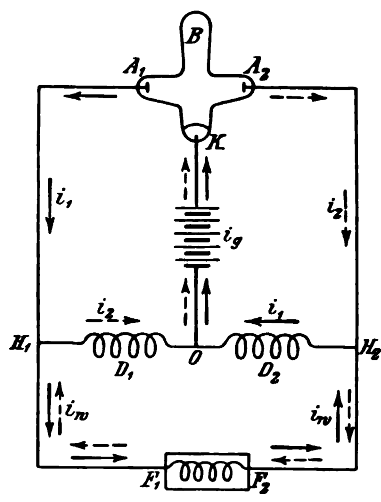


Abb. 373. Quecksilbergleichrichter für einphasigen Wechselstrom.

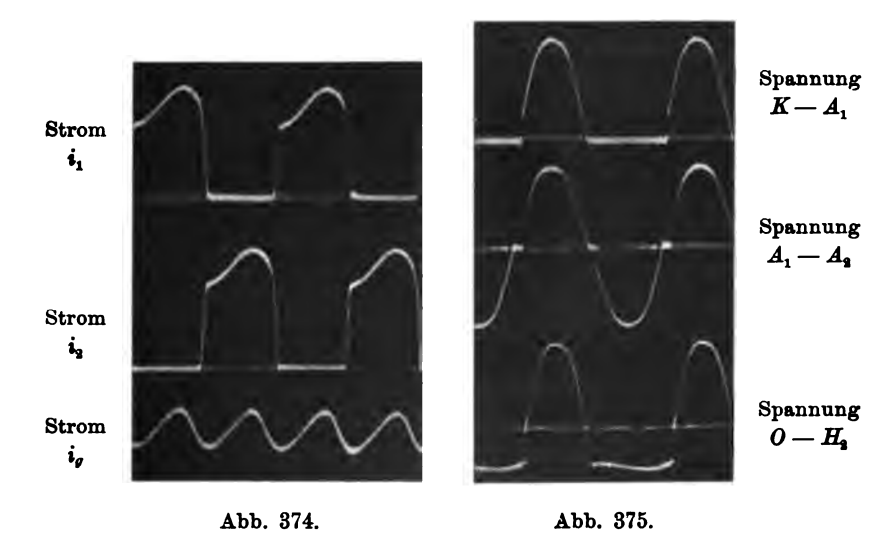


Abb. 374. Abb. 375.

Die Spannung zwischen A_2 und K hat gleiche Gestalt. Beide zusammen geben die Spannung zwischen A_1 und A_2, die sich nur

durch die kleinen Unterbrechungen beim Beginn jeder Halbwelle von der Klemmenspannung der Stromquelle F_1 F_2 unterscheidet. Eine eigenartige Form hat die Spannung an den Klemmen OH_1 oder OH_2 der Drosselspulen. Sie ist unsymmetrisch zur Nullinie und die Abstände der Nullpunkte sind verschieden lang; sie hat den Charakter der Wellenform in Abb. 320, enthält also ein Glied zweiter Ordnung. Mithin hat das magnetische Feld in diesen Drosselspulen eine Wellenform wie Abb. 319. Wird als Stromquelle ein Transformator angewendet, so kann die Teilung der Spannung dadurch erfolgen, daß man den Anschluß O in der Mitte der sekundären Spule macht. Bei sehr hohen Spannungen kann ein direkter Stromübergang zwischen A_1 und A_2 stattfinden, weil diese mit den Klemmen der Stromquelle in Verbindung stehen, und das Gefäß mit leitendem Quecksilberdampf gefüllt ist. Um das zu verhindern, schaltet man den Klemmen A_1 und A_2 Drosselspulen vor.

III. Die in § 227 erwähnte Wirkung glühender Metalloxyde, durch welche der Kathodenfall einer Entladungsröhre auf 20 V. herabgesetzt wird, kann ebenfalls zur Ventilwirkung benützt werden[1]), wenn als zweite Elektrode ein Metall verwendet wird (Abb. 376). Durch den Hilfsstrom i_h wird die Oxydelektrode O glühend erhalten. Von dem Wechselstrom i_w wird dann nur jene Halbwelle durchgelassen, bei welcher O Kathode ist.

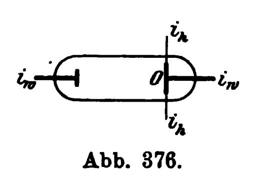


Abb. 376.

IV. Auch bei gewöhnlichen Funkenentladungen tritt eine Ventilwirkung ein, wenn die eine Elektrode aus einer Spitze, die andere aus einer Platte besteht, weil die Kraftliniendichte und daher die elektrische Kraft an einer Spitze größer ist als bei einer Platte. Bei geeignetem Verhältnis des Elektrodenabstandes zur Spannung tritt daher die Entladung nur bei jener Halbwelle ein, wo die Spitze Kathode ist, dagegen nicht, wenn die Platte Kathode ist.

Abb. 377. Abb. 378.

V. Legt man zu einem der vorstehenden elektrischen Ventile einen Nebenschluß CD (Abb. 377), so erhält man in diesem jene Halbwelle, welche durch das Ventil nicht durchgelassen wird, wenn der Widerstand des Nebenschlusses größer ist, als der des Ventiles. Daraus erklärt sich die Gleichstromspannung, die man mißt, wenn man ein Gleichstrom-Voltmeter mittels der Sonden C, D an die Kohlen eines

[1]) Wehnelt, Annal. d. Phys. 19, 1906.

Wechselstromlichtbogens AK anlegt, weil eine kleine Ungleichheit zwischen den Elektroden immer vorhanden ist. Die vollkommenste Trennung der beiden Halbwellen erhält man, wenn man den Nebenschluß mit einem entgegengesetzt geschalteten Ventil versieht, wie Abb. 378 zeigt. Dann geht durch jeden der beiden Zweige immer nur jene Halbwelle, für welche K Kathode ist, während dieselbe Halbwelle im jeweiligen anderen Zweig ein bedeutendes Hindernis findet.

VI. Auf einem anderen Wege gelang dem Verfasser[1]) die Zerlegung des Wechselstromes in seine beiden Halbwellen. Einer gewöhnlichen Kohle B (Abb. 379) wurde eine gespaltete C, deren Hälften durch Glimmer von einander isoliert sind, gegenübergestellt und ein Lichtbogen gezündet. Wird nun ein gleichgerichtetes magnetisches Feld, dessen Kraftlinien senkrecht zur Zeichenebene verlaufen, hergestellt, so lenkt es den Lichtbogen während einer

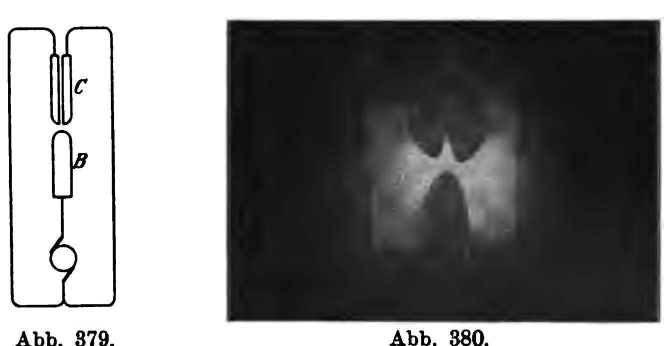


Abb. 379. Abb. 380.
Teilung eines Wechselstromes durch ein magnetisches Gebläse.

halben Welle nach der einen Seite (links), während der nächsten Halbwelle nach der anderen Seite (rechts) ab, so daß in den Zuleitungen zu C je ein gleichgerichteter pulsierender Strom verkehrt. Der Lichtbogen hat dementsprechend zwei Fackeln, wie Abb. 380 zeigt. Merkwürdigerweise gelingt diese Trennung durch das magnetische Feld nur im Lichtbogen, nicht aber in einem metallischen oder elektrolytischen Leiter.

VII. Endlich gibt es auch elektrolytische Ventile[2]), bestehend aus einer Aluminiumanode, irgend einer indifferenten (Kohle, Blei, Platin) Kathode und einem diese nicht angreifenden Elektrolyten (z. B. verdünnte Schwefelsäure, Alaun- oder Sodalösung). Wird eine solche Zelle in einen Stromkreis von mehr als 22 Volt

[1]) ETZ 1903, S. 403.
[2]) Graetz, Annal. d. Phys. 62, 1897.

eingeschaltet, so entsteht an der Aluminiumanode eine Polarisation von 20—22 Volt. Nach anderer Ansicht soll es sich nicht um eine elektrolytische Polarisation, sondern um einen dünnen Überzug der Aluminiumplatte mit isolierendem Aluminiumoxyd handeln, der den Stromdurchgang verhindert. Geht der Strom in umgekehrter Richtung durch, so tritt der Sauerstoff an der indifferenten Elektrode auf, wo er entweicht. Schließt man also die Zelle an Wechselstrom

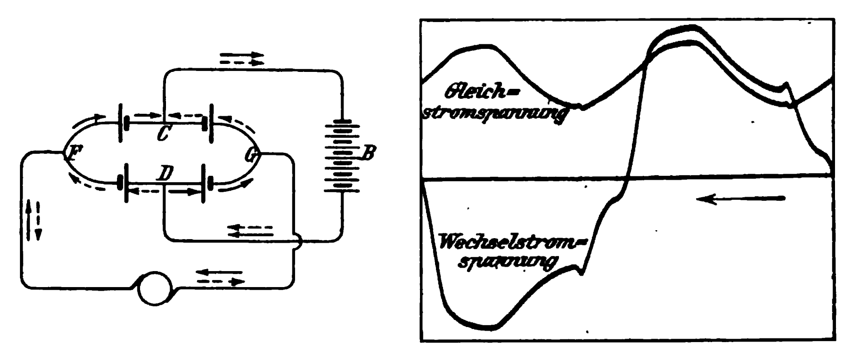


Abb. 381. Abb. 382.
Vierzelliger elektrolytischer Gleichrichter.

an, so geht nur jene Halbwelle durch, für welche die Aluminiumplatte Anode ist. Bei der in Abb. 381 dargestellten Schaltung mit vier solchen Zellen gelangen beide Halbwellen in den Leiter *CBD*, so daß man hier eine Batterie laden kann. Die gestrichelten Pfeile deuten den Weg der einen, die ausgezogenen Pfeile den der anderen Halbwelle an. Abb. 382 stellt die Spannungswelle des Wechselstromes zwischen den Punkten *FG* und die des gleichgerichteten Stromes zwischen den Punkten *CD* dar.

VIII. Die Pulsationen der mittels vorstehender Methoden gleichgerichteten Ströme können durch Einschaltung von Drosselspulen vermindert werden. Natürlich wird dadurch aber auch die Stromstärke im Ganzen vermindert.

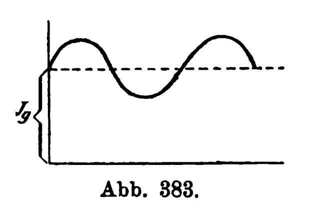


Abb. 383.

Diese pulsierenden Ströme (oder Spannungen) sind hinsichtlich ihrer Wellenform aus einem Gleichstrom von der Stärke J_g und einem Wechselstrom von der Form $i = \mathfrak{J}_1 \sin \omega t + \mathfrak{J}_3 \sin 3\omega t + \ldots$ zusammengesetzt (Abb. 383). Ist J_w der effektive Wert dieses Wechselstromes, so gilt wie für jede beliebige Wellenform (Gl. 255, S. 408) daß der effektive Wert $J = \sqrt{J_g^2 + J_w^2}$ ist. Die Wattleistung ist $P = J_g E_g + J_w E_w \cos \varphi$.

oder
$$i = J\left(1 - \varepsilon^{-\frac{w}{L}t}\right) = J - J\varepsilon^{-\frac{w}{L}t} \quad . \quad . \quad (206)$$

wobei J die schließlich eintretende stationäre Stromstärke ist.

Abb. 254 zeigt den Verlauf des Stromes i in zwei Fällen vom Beginn des Stromschlusses an. Beide gelten für denselben Widerstand w; daher ist der endgültige Wert J derselbe. Die Kurve *II* gilt aber für eine größere Selbstinduktion und steigt daher langsamer an als die Kurve *I*.

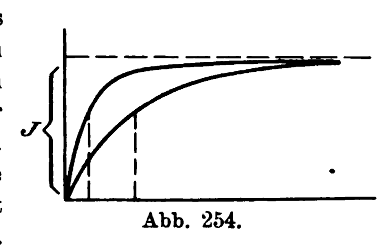


Abb. 254.

Der Ausdruck $E\varepsilon^{-\frac{w}{L}t}$ stellt die induzierte EMK e_s und der Ausdruck $J\varepsilon^{-\frac{w}{L}t}$ den entsprechenden Extrastrom i_s dar. Es ist also $i_s = \frac{e_s}{w}$ und $i = J - i_s$. Der Extrastrom und seine EMK werden erst für $t = \infty$ null. Sie kommen aber dem Nullwert schon nach ganz kurzer Zeit sehr nahe, und zwar um so rascher, je größer der Faktor $\frac{w}{L}$ ist. Man nennt daher diesen Faktor die Zeitkonstante. Der Extrastrom fällt also um so rascher ab, je größer der Widerstand und je kleiner die Selbstinduktion ist. Gäbe es einen Stromkreis, für den $L = 0$ wäre, so würde bei seiner Änderung keine EMK induziert werden, und der Strom sofort den Wert J haben.

Zur Zeit $t = \frac{L}{w}$ ist

$$i = J - \frac{1}{\varepsilon} J = J - 0{,}37\, J = 0{,}63\, J.$$

Zu dieser Zeit erreicht also der Strom etwa zwei Drittel seines endgültigen Wertes. Die gestrichelten Ordinaten in Abb. 254 stellen diesen Wert dar. Zur Zeit $t = 0$ hat die induzierte EMK und der Extrastrom den größten Wert, nämlich E bzw. J. Daher beginnt der Strom i beim Schließen des Stromkreises mit dem Werte null.

II. Verschwinden des Stromes.

Um den ungestörten Verlauf des Stromes bei seinem Verschwinden feststellen zu können, müssen wir annehmen, daß der Widerstand des Stromkreises unverändert bleibt, d. h. daß das Verschwinden nicht dadurch erfolgt, daß der Stromkreis durch einen Ausschalter unterbrochen wird, sondern daß seine EMK plötzlich

verschwindet. Rechnen wir die Zeit t von diesem Augenblick an, so ist für $t=0$, $E=0$ und die Gl. 204 geht über in

$$-iwD=\varepsilon^{-\frac{w}{L}t}.$$

In demselben Augenblick ($t=0$) hat der Strom noch seinen vollen, stationären Wert, nämlich $i=J$. Dies eingesetzt gibt $D=-\frac{1}{wJ}$, mithin

$$i=J\varepsilon^{-\frac{w}{L}t}=\frac{E}{w}\varepsilon^{-\frac{w}{L}t}=i_s \quad . \; . \; . \quad (207)$$

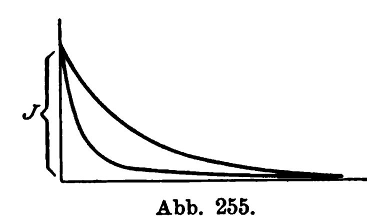


Abb. 255.

Das ist derselbe Extrastrom wie beim Schließen des Stromkreises, Abb. 255 zeigt seinen Verlauf in zwei Fällen mit gleichem Widerstand, aber verschiedener Selbstinduktion.

Die entsprechende EMK ist, wie man sieht

$$e_s=E\varepsilon^{-\frac{w}{L}t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (208)$$

Beide sind gleich den entsprechenden Ausdrücken beim Schließen des Stromkreises und die Zeitkonstante ist hier ein Maß für die Raschheit des Verschwindens des Extrastromes, und weil dieser nach dem Aufhören der EMK mit dem im Stromkreis überhaupt noch vorhandenen Strom identisch ist, ein Maß für das Verschwinden des Stromes überhaupt.

Zur Zeit $t=\frac{L}{w}$ ist $i=0{,}37\,J$. Zu dieser Zeit ist also der Strom auf etwa ein Drittel seines ursprünglichen Wertes gesunken.

184. Vergleich der Selbstinduktion mit der Trägheit.

Aus dem vorhergehenden und dem Lenzschen Gesetze (§ 125) wissen wir, daß die Selbstinduktion jeder Veränderung des Stromes widerstrebt, indem sie beim Zunehmen des Stromes einen anderen von entgegengesetzter Richtung induziert und beim Abnehmen einen von derselben Richtung. Sie sucht also ebenso wie die Trägheit oder das Beharrungsvermögen schwerer Körper den bestehenden Zustand aufrecht zu erhalten. Besonders auffallend ist dieser Vergleich beim Öffnen und Schließen eines Stromes. Beim Öffnen wird ein gleichgerichteter Strom (Öffnungsextrastrom) induziert, der für einen Augenblick so stark ist, daß er in Form eines Funkens

die Luftstrecke durchschlägt; er sucht den Strom aufrecht zu erhalten, ebenso wie die Trägheit den bestehenden Bewegungszustand eines Körpers aufrecht zu halten versucht. Beim Schließen eines Stromes wird ein Extrastrom von entgegengesetzter Richtung induziert, der sein plötzliches Anwachsen verhindert, ebenso wie ein schwerer Körper nur allmählich auf eine gewisse Geschwindigkeit gebracht werden kann.

Um ein Schwungrad in Drehung zu versetzen, ist eine gewisse Kraft und Zeit notwendig. Die Arbeit, die dabei zur Überwindung der Trägheit aufgewendet werden muß, entspricht beim Schließen eines Stromes jener Arbeit, die zur Herstellung des magnetischen Feldes aufgewendet werden muß. Ist die richtige Geschwindigkeit erreicht, so bedarf es zu ihrer Aufrechterhaltung nur soviel Arbeit, als zur Überwindung des Reibungswiderstandes, beim Strome nur soviel, als zur Überwindung des Leitungswiderstandes notwendig ist. Hört die Bewegung des Rades auf, so gibt es dabei infolge seiner Trägheit soviel Arbeit ab, als beim Inbewegungsetzen aufgewendet wurde. Ebenso sucht das verschwindende magnetische Feld beim Öffnen des Stromes diesen aufrecht zu erhalten, und gibt dabei soviel Arbeit an den Stromkreis zurück, als beim Entstehen aufgewendet wurde.

Die Erzeugung eines periodischen Stromes entspricht dem Versuche, dem Rade eine pendelnde Bewegung zu geben. Dazu ist eine periodisch wechselnde Kraft notwendig. Dieser wirkt entgegen die Kraft des Pendels infolge seiner Trägheit; diese ist am kleinsten bei der größten Ausweichung aus der Ruhelage und am größten, während es durch die Ruhelage geht; dieselbe Beziehung besteht zwischen der induzierten EMK und dem Strome. Ferner sieht man ein, daß die Geschwindigkeit des pendelnden Rades niemals so groß wird, als wenn der größte Wert der Kraft immer in derselben Richtung wirken würde. Die Trägheit scheint ebenso wie die Selbstinduktion den Widerstand zu vergrößern.

185. Entstehen und Verschwinden eines Stromes bei gegenseitiger Induktion.[1]

Treffen die Kraftlinien eines entstehenden oder verschwindenden Stromes auf einen zweiten geschlossenen Stromkreis, so daß in diesem ein sekundärer Strom induziert wird, so erscheint ersterer als primärer Strom, und wir können, um einen Überblick in qualitativer Hinsicht zu gewinnen, darauf die Ergebnisse des § 146 anwenden. Demnach erscheint an Stelle des wahren Ohmschen Widerstandes w_1

[1]) Benischke, „Elektrotechnik und Maschinenbau." Wien 1906. S. 923.

der *größere* äquivalente Widerstand ϱ und an Stelle der wahren Selbstinduktion L_1 die *kleinere* äquivalente Selbstinduktion λ. Da ersterer im Zähler, letztere im Nenner des negativen Potenzexponenten (der Zeitkonstante) von ε steht, so folgt daraus ein rascherer Verlauf des Extrastromes und der entsprechenden induzierten EMK, als wenn der sekundäre Stromkreis nicht vorhanden ist. Die stationäre Stromstärke $J = \frac{E}{w}$ bleibt unverändert, da sie sich auf jene Zeit bezieht, wo noch keine Änderung eingetreten ist.

Eine strenge Ableitung des Extrastromes bei Anwesenheit eines geschlossenen sekundären Stromkreises ergibt folgende Formeln, wobei sich die Größen mit dem Index $_1$ auf den in Betrachtung stehenden Stromkreis, die mit dem Index $_2$ auf den sekundären Stromkreis beziehen und M den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion bedeutet.

$$i_s = \frac{J}{2}\left[\left(1 + \frac{w_1 L_2 - w_2 L_1}{\beta}\right)\varepsilon^{\gamma t} + \left(1 - \frac{w_1 L_2 - w_2 L_1}{\beta}\right)\varepsilon^{\gamma' t}\right] \quad (209)$$

Hierin bedeuten

$$\beta = \sqrt{(w_1 L_2 - w_2 L_1)^2 + 4 w_1 w_2 M^2}$$

$$\gamma = -\frac{(w_1 L_2 + w_2 L_1) + \beta}{2(L_1 L_2 - M^2)}$$

$$\gamma' = -\frac{(w_1 L_2 + w_2 L_1) - \beta}{2(L_1 L_2 - M^2)}.$$

Führt man die magnetische Streuung oder, was noch übersichtlicher ist, die *magnetische Kupplung* $\varkappa$ ein, die nach § 153 definiert ist durch

$$M^2 = \varkappa^2 L_1 L_2,$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \sqrt{(w_1 L_2 - w_2 L_1)^2 + 4 w_1 w_2 L_1 L_2 \varkappa} \\ \gamma &= -\frac{(w_1 L_2 + w_2 L_1) + \beta}{2 L_1 L_2 (1 - \varkappa^2)} \\ \gamma' &= -\frac{(w_1 L_2 + w_2 L_1) - \beta}{2 L_1 L_2 (1 - \varkappa^2)} \end{aligned}\right\} . \quad (210)$$

Der Einfluß, den die Stärke der magnetischen Kupplung und der sekundäre Widerstand auf i_s ausüben, läßt sich daraus nicht ohne weiteres übersehen. Wir diskutieren daher diese Formeln zunächst hinsichtlich der Kupplung und dann hinsichtlich des sekundären Widerstandes.

Ist $\varkappa = 0$, d. h. sind die beiden Stromkreise voneinander unabhängig, so ist

$$\beta = w_1 L_2 - w_2 L_1 \qquad \gamma = -\frac{w_1}{L_1}$$

und die Gleichung für i_s geht über in Gl. 205 für einen einzelnen Stromkreis.

Ist $\varkappa = 1$, d. h. besteht keine magnetische Streuung, sondern ist die magnetische Kupplung eine vollständige, so ist

$$\beta = w_1 L_2 + w_2 L_1$$

$$\gamma = -\infty$$

$$i_s = \frac{J}{2}\left(1 - \frac{w_1 L_2 - w_2 L_1}{w_1 L_2 + w_2 L_1}\right)\varepsilon^{\gamma' t} \quad . \; . \; . \quad (211)$$

Der stärkste Einfluß des sekundären Stromes ist dann vorhanden, wenn $w_2 = 0$. Dann ist $i_s = 0$. Der Strom erreicht also beim Schließen des Stromkreises sofort seinen endgültigen Wert J und wird beim Verschwinden der EMK sofort null. Für alle zwischen diesen äußersten Fällen liegenden Werte der Kupplung $(1 > \varkappa > 0)$ erkennt man aus den Ausdrücken für γ und γ', daß im Vergleich zu Gl. 205 eine verkleinerte Selbstinduktion steht, wie dies schon eingangs dieses Paragraphen aus den Ergebnissen des § 146 gefolgert wurde.

Diskutieren wir hinsichtlich des sekundären Widerstandes, so ist für den Fall, daß $w_2 = 0$ ist:

$$\beta = w_1 L_2$$

$$\gamma = -\frac{w_1}{L_1(1-\varkappa^2)} \qquad \gamma' = 0$$

$$i_s = J\varepsilon^{-\frac{w_1}{L_1(1-\varkappa^2)}t} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (212)$$

Man erkennt daraus, daß dieser um so kleiner ist, je größer die magnetische Kupplung $\varkappa$, d. h. je kleiner die Streuung ist. Für $\varkappa = 1$ ist wie oben $i_s = 0$.

Der sekundäre Strom i_2, der während des Verlaufes des Extrastromes im sekundären Stromkreis induziert wird, ist

$$i_2 = -w_1 J \varkappa \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\beta}\left(\varepsilon^{\gamma t} - \varepsilon^{\gamma' t}\right) \quad . \; . \; . \quad (213)$$

Dieser Ausdruck wird für $t = 0$ und $t = \infty$ null. Dazwischen muß er also ein Maximum haben. Man findet seine Lage, wenn man den Differentialquotienten nach der Zeit gleich null setzt.

Für $w_2 = 0$ geht die letzte Gleichung über in

$$i_2 = -J\varkappa\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\left(\varepsilon^{-\frac{w_1}{L_1(1-\varkappa^2)}t} - 1\right) \quad . \quad . \quad (214)$$

186. Funken und Lichtbogen beim Unterbrechen eines Stromkreises. Überspannung.

Zur Aufstellung des Gesetzes, nach welchem der Extrastrom beim Verschwinden eines Stromkreises verläuft, haben wir angenommen, daß die EMK des Stromes plötzlich verschwindet, während sein Widerstand unverändert bleibt. In Wirklichkeit geht aber das Unterbrechen eines Stromes so vor sich, daß der Stromkreis mittels eines Ausschalters geöffnet wird, d. h. in den Stromkreis wird zwischen den sich voneinander entfernenden Kontakten eine Luftstrecke eingeschaltet, deren Länge rasch zunimmt, und deren Widerstand dementsprechend sehr rasch von null bis unendlich wächst, während die EMK bestehen bleibt.

Da nach § 183 beim Verschwinden des Stromes eine EMK e_s induziert wird, welche gleiche Richtung wie der verschwindende Strom und die EMK E der Stromquelle hat, so wirkt zwischen den außer Berührung kommenden Kontakten eine Spannung gleich $E + e_s$, welche den Luftzwischenraum, solange er noch kurz ist, in Form eines Funkens zu überbrücken vermag. Der Funken verlöscht, wenn die Entfernung zwischen den Kontakten so groß geworden ist, daß ihr Widerstand von dieser Spannung nicht überwunden werden kann; damit ist auch der Strom null geworden und seine Unterbrechung tatsächlich vollzogen.

Die Unterbrechung eines Stromes J geht also so vor sich, daß zu dem Widerstande w des Stromkreises noch ein zweiter, durch den Funken repräsentierter Widerstand w' hinzutritt. Mithin ist der Öffnungsextrastrom zu einer gewissen Zeit t nach dem Öffnen des Schalters

$$i_s = J\,\varepsilon^{-\frac{w+w'}{L}t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (215)$$

So lange der Funken besteht, ist der Stromkreis noch geschlossen. Sein gesamter Widerstand ist jetzt $w + w'$, und daher erzeugt die EMK E der Stromquelle einen Strom $\frac{E}{w+w'}$, der zum Extrastrom hinzukommt, so daß der gesamte Strom im Unterbrechungsfunken ist:

$$i = \frac{E}{w+w'} + \frac{E}{w}\varepsilon^{-\frac{w+w'}{L}t}.$$

Die während des Unterbrechens induzierte EMK ist (nach § 132)

$$e_s = -L\frac{di}{dt} = E\frac{w+w'}{w}\,\varepsilon^{-\frac{w+w'}{L}t} \quad . \; . \; . \quad (216)$$

Man erkennt daraus, daß durch das plötzliche Einschalten eines Widerstandes w' eine EMK induziert wird, deren größter Wert $\left(E\frac{w+w'}{w}\right)$ um das $\left(\frac{w+w'}{w}\right)$-fache größer ist als die EMK E der Stromquelle; man nennt sie daher Überspannung. Physikalisch erklärt sich die Abhängigkeit der induzierten EMK von dem eingeschalteten Widerstand w' dadurch, daß der Strom und daher auch sein magnetisches Feld um so rascher abnimmt, je größer w' ist. Nach § 124 ist aber die induzierte EMK um so größer, je rascher die Änderung des Feldes ist. Allerdings verschwindet sie und der entsprechende Extrastrom jetzt auch rascher, weil jetzt $w + w'$ statt w im negativen Potenzexponenten von ε steht. Da außerdem die EMK E so lange nicht abgeschaltet ist, als nicht der Öffnungsfunken verlöscht ist, so kommt diese noch hinzu, und es kann infolgedessen beim Ausschalten eine beträchtlich höhere Spannung gleich $E + E\frac{w+w'}{w}\varepsilon^{-\frac{w+w'}{L}t}$ auftreten, welche die Isolation des Stromkreises zu zerstören vermag. Dadurch erklären sich z. B. Durchschläge der Isolation beim plötzlichen Unterbrechen des Erregerstromes in der Magnetwickelung größerer Maschinen. Wäre der plötzlich eingeschaltete Widerstand w' unendlich groß, so wäre auch die induzierte EMK unendlich groß. Praktisch ist dieser Fall nicht möglich, weil der Widerstand zwischen den sich öffnenden Schalterkontakten von null an zu wachsen beginnt und erst in dem Augenblick unendlich wird, in dem der Extrastrom null wird.

Beim Vorhandensein eines sekundären Stromkreises ist die im primären Stromkreis induzierte EMK nach § 145

$$e_s = -\left(L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}\right).$$

Wir wollen die Ausrechnung nur für den Fall $w_2 = 0$, also mit den Gl. 212 und 214 ausführen, da sie im allgemeinen Fall unübersichtlich wird. Setzt man für M den Wert $\varkappa\sqrt{L_1 L_2}$ ein und $w_1 + w'$ statt w_1, so erhält man schließlich

$$e_s = E\frac{w_1+w'}{w_1}\,\varepsilon^{-\frac{w_1+w'}{L(1-\varkappa^2)}t} \quad . \; . \; . \; . \quad (217)$$

Der größte Wert $E\frac{w_1+w'}{w_1}$ dieser EMK ist also ebensogroß,

wie wenn kein sekundärer Strom vorhanden ist; sie fällt aber umso schneller ab, je größer die magnetische Kupplung ist. Für $\varkappa = 1$, d. h. für vollständige magnetische Kupplung ist $e_s = 0$, welchen Wert auch w' haben mag.

Entsteht zwischen den Schalterkontakten nebst dem Öffnungsfunken des Extrastromes auch noch ein Lichtbogen durch die EMK E der Stromquelle, so müssen, um den Strom zu unterbrechen, die Kontakte so weit voneinander entfernt werden, bis der Abstand nicht mehr von einem Lichtbogen überbrückt werden kann. Dieser Abstand ist um so größer, je größer die EMK ist und je mehr das Material der Elektroden die Lichtbogenbildung begünstigt. Am günstigsten ist Kohle, am ungünstigsten schwer schmelzbares Metall; wobei aber auch die Masse der Kontakte eine wichtige Rolle spielt. Je größer die Masse ist, desto schwerer erreichen die Fußpunkte des Lichtbogens die für den Lichtbogen nötige Verdampfungstemperatur und desto mehr Spannung und Stromstärke ist zu seiner Bildung erforderlich, und bei desto kürzerem Abstand reißt ein schon entstandener Lichtbogen ab. (Über Lichtbogenbildung vgl. (§ 237 u. f.)

Je länger der Lichtbogen wird, desto langsamer nimmt der Widerstand zwischen den Kontakten zu, desto geringer ist nach dem obigen die Spannungserhöhung durch den Extrastrom. Man benützt dies in solchen Fällen, wo die Spannungserhöhung so groß werden kann, daß sie der Isolation des Stromkreises gefährlich wird, also z. B. beim Unterbrechen des Erregerstromes in der Magnetwickelung elektrischer Maschinen, bei selbsttätigen Ausschaltern u. dgl., indem man die Kontakte aus Kohle herstellt. Ein anderes Mittel zur Verhütung dieser Gefahr besteht darin, daß man parallel zu den Kontakten, zwischen denen die Stromunterbrechung stattfindet, einen induktionsfreien Widerstand w_p (Abb. 256) legt. In diesem Falle wird also der Strom nicht ganz unterbrochen, der Widerstand kann nicht bis Unendlich, sondern nur bis zum Werte w_p ansteigen.

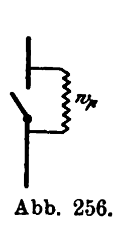


Abb. 256.

Bei der Unterbrechung eines Wechselstromes kommt es ganz darauf an, wie lange es vom Öffnen der Kontakte an dauert, bis der Strom null geworden ist. Spielt sich dieser Vorgang innerhalb einer Zeit t_0 bis t_1 (Abb. 257) ab, die nur einen Teil einer Halbperiode ausmacht, so ist er derselbe wie beim Unterbrechen eines Gleichstromes. Dieser Fall ist aber selten, denn in der Regel wird durch Ausbildung eines Funkens oder eines Lichtbogens der Unterbrechungsvorgang über eine oder mehrere Halb-

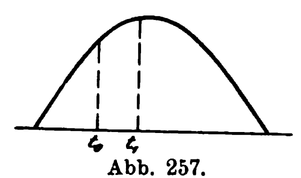


Abb. 257.

perioden ausgedehnt. Dann hört der Strom immer bei einem Durchgang durch null auf.

So einfach die Unterbrechung eines Stromes von niederer Spannung ist, so schwierig ist sie bei hohen Spannungen, wo sich Lichtbögen bis zu 1 m, sogar 2 m Länge bilden können. Dann empfiehlt es sich nicht mehr, die Kontakte in Luft voneinander zu entfernen, sondern unter Öl. Das Öl verhindert erstens durch den Abschluß der Luft, daß das Material der Kontakte so stark verbrennt und verdampft wie in Luft, zweitens wirkt es abkühlend auf den entstehenden Lichtbogen und erschwert dadurch seine Ausbildung (§ 233), drittens wirkt der stärkere Druck, der unter der Flüssigkeit herrscht, einschnürend auf den Lichtbogen. Besonders rasch wird die Verlöschung des Lichtbogens bewirkt, wenn das Öl zwischen den Kontakten in Bewegung versetzt wird,[1]) weil auf diese Weise der Lichtbogen in ähnlicher Weise zerrissen wird wie in Luft durch Wind oder durch magnetisches Gebläse.[2])

187. Die Wärmearbeit des Extrastromes.

Der beim Unterbrechen eines Stromkreises auftretende Funken bewirkt eine Verbrennung der Kontakte, die namentlich bei den Kommutatoren der Maschinen möglichst vermieden werden soll. Es ist daher von großer Wichtigkeit die Wärme des Funkens zu kennen.

Die Wärmearbeit des Extrastromes während der Zeit dt ist gleich $i_s^2 w' dt$.

Rechnen wir die Zeit t von dem Moment an, wo das Verschwinden des Stromes beginnt, so finden wir die ganze Arbeit A während des Verschwindens des Stromes, wenn wir von 0 bis ∞ integrieren, da nach unendlich langer Zeit der Strom jedenfalls null geworden ist, selbst wenn sein Verschwinden noch so langsam vor sich geht. Es ist also nach Gl. 215

$$A = \int_0^\infty i_s^2 w' dt = \int_0^\infty w' J^2 \varepsilon^{-\frac{2(w+w')}{L}t} dt$$

$$A = J^2 \frac{w' L}{2(w+w')}.$$

Hingegen ist die gesamte vom Extrastrom im Stromkreis und im Funken entwickelte Wärmearbeit

[1]) Benischke, „Hochspannungs-Ölschalter", ETZ 1903, S. 613. D.R.-P. 141 961 und 150 912.

[2]) Über den Funken bei oszillatorischer Entladung vgl. § 193. Über den Mechanismus der selbständigen Funkenentladung vgl. § 230—232.

$$A_g = \int_0^\infty i_s^2 (w + w')\, dt = \int (w + w') J^2 \varepsilon^{-\frac{2(w+w')}{L} t} \, dt$$

$$A_g = J^2 \frac{L}{2}.$$

Dieser Ausdruck ist (nach § 119) gleich der magnetischen Arbeit des Stromes J, also jener Arbeit, welche beim Entstehen des Stromes von der Stromquelle aufgewendet werden mußte, um das magnetische Feld des Stromes herzustellen. Da beim Verschwinden des Stromes auch sein magnetisches Feld verschwindet, so setzt sich diese Arbeit in Wärme um. Deshalb kommt im letzten Ausdruck der Widerstand nicht vor. Ist w verschwindend klein gegen w', so ist $A = A_g$, d. h. die gesamte Wärme des Extrastromes konzentriert sich im Funken.

Bei Gegenwart eines sekundären Stromes ergibt sich die Funkenwärme in gleicher Weise aus Gl. 209. Wir berechnen sie hier nur für den Fall $w_2 = 0$, also aus Gl. 212 und erhalten bei gleichzeitigem Ersatz von w_1 durch $w_1 + w'$

$$A = \int_0^\infty w' J^2 \varepsilon^{-\frac{2(w_1+w')}{L(1-\varkappa^2)} t} \, dt = J^2 \frac{w' L (1 - \varkappa^2)}{2(w_1 + w')}.$$

Man sieht, die Funkenwärme wird gegenüber dem obigen Wert umso kleiner, je stärker die magnetische Kupplung ist. Für vollständige Kupplung ($\varkappa = 1$) wird die Funkenwärme null. Natürlich muß auch jetzt die gesamte magnetische Arbeit des Stromes J in Stromwärme umgesetzt werden. Aber nur der durch die letzte Formel angegebene Teil wird durch den Funken in Wärme umgesetzt, während der übrige Teil durch den Strom i_2 im sekundären Stromkreis in Wärme umgesetzt wird.

Geht über den Funken außer dem Extrastrom auch noch ein Strom von der Stromquelle, so kommt zu den vorstehend berechneten Wärmearbeiten noch ein entsprechender Betrag hinzu. Aber auch dieser ist umso kleiner, je größer der Einfluß des sekundären Stromes ist, weil der Funken umso rascher verschwindet, und daher auch der Stromübergang umso kürzer dauert.

Von der magnetischen Arbeit sehen wir, daß sie gleich derjenigen ist, welche von einem Wechselstrom geleistet wird, während er von null bis zum größten Wert (Scheitelwert $\mathfrak{J}$) ansteigt, da J hier ebenfalls den größten Wert der Stromstärke bedeutet. Es kommt eben immer bloß auf den Anfangs- und Endwert des Stromes an; wie er dazwischen verläuft, ist gleichgültig.

Dieser Einfluß des sekundären Stromes auf die Verminderung

der Funkenwärme zeigt sich deutlich bei Kommutatormotoren und bei Kommutatorzählern mit kurzgeschlossenen Stromkreisen. Entfernt oder öffnet man letztere, so werden die Kommutatoren durch die Funkenbildung viel stärker angegriffen.[1])

Bildet die EMK der Stromquelle einen Lichtbogen zwischen den Kontakten, so gelten die vorstehenden Ableitungen natürlich nicht mehr, weil dann eben kein Funken, sondern ein Lichtbogen besteht.

Faßt man die Ergebnisse zusammen, so ergibt sich, daß beim Unterbrechen eines Stromkreises, der mit einem anderen geschlossenen Stromkreis magnetisch gekuppelt ist, der Extrastrom und die von ihm erzeugte Überspannung umso schneller abfällt, und die Funkenwärme umso kleiner ist, je größer der sekundäre Strom und je stärker die magnetische Kupplung ist.

Wie wir in § 164 gesehen haben, wirken die Verluste durch Wirbelströme und Hysterese in Stromkreisen mit Eisenkern (Drosselspulen) ebenso, als wenn ein sekundärer Stromkreis mit entsprechendem Widerstand vorhanden wäre. Es gilt daher auch für das Öffnen eines einzelnen Stromkreises mit Eisenkern, daß der Strom schneller null wird und die Wärme des Unterbrechungsfunkens kleiner ist, als in einer Spule ohne Eisenkern, aber gleicher Selbstinduktion. Das gilt aber nicht von massiven Eisenkernen, weil bei solchen eine elektrodynamische Schirmwirkung auftritt.

188. Entstehen und Verschwinden eines Stromes in Spulen mit massivem Eisenkern.

In § 185 haben wir gesehen, daß durch die Wirkung eines sekundären Stromes ein rascheres Entstehen und Verschwinden des Stromes bewirkt wird. Da nach § 164 Wirbelströme und Hysterese eines Eisenkernes ebenso wirken wie ein sekundärer Strom, so müßte man erwarten, daß in einer Spule mit massivem Eisenkern, in dem die Wirbelströme besonders stark auftreten, das Entstehen und Verschwinden des Stromes besonders rasch erfolgt. Es zeigt sich aber das Gegenteil. Wird der Erregerstromkreis einer großen elektrischen Maschine mit massiven Polen geschlossen, so steigt der Strom ganz langsam an, so daß es unter Umständen bis zu einer Minute lang dauert, bis der Strom seinen endgültigen Wert $\frac{E}{w}$ erreicht hat. Desgleichen zeigt sich beim Ausschalten des Erregerstromes, daß die Spannung der Maschine (bei konstanter Umlaufs-

[1]) Benischke, ETZ 1904, S. 1041; 1905 S. 542.

zahl) noch längere Zeit nach dem gänzlichen Verschwinden des Erregerstromes besteht und nur allmählich bis zu dem vom Dauermagnetismus herrührenden Spannungswerte abfällt. Aus diesem Umstande muß man schließen, daß man es überhaupt nicht mit einer auf den Verlauf des Extrastromes beruhenden Erscheinung, sondern mit einer magnetischen Erscheinung zu tun hat, und zwar mit der elektrodynamischen Schirmwirkung der Wirbelströme. Bei einem von Wechselstrom umflossenen Eisenkern bleibt der innerste Teil infolge der Schirmwirkung der Wirbelströme nahezu unmagnetisch (§ 165). In unserem Falle, wo beim Schließen des Stromkreises die Stromstärke von null an wächst, werden Wirbelströme induziert, welche entgegengesetzte Richtung haben und daher auf das Innere des Eisenkörpers eine Schirmwirkung ausüben, so daß anfangs nur die äußeren Schichten magnetisiert werden. In dem Maße wie die Änderung des Stromes abnimmt, werden die Wirbelströme schwächer und die Magnetisierung dringt tiefer ein. Hat der Strom seinen endgültigen, konstanten Wert erreicht, so gibt es keine Wirbelströme mehr und der ganze Eisenkörper ist gleichmäßig magnetisiert.

Umgekehrt ist der Vorgang beim Unterbrechen des Erregerstromes. Die Wirbelströme haben nach dem Lenzschen Gesetze einen solchen Verlauf, daß sie das Verschwinden des magnetischen Feldes zu hindern suchen. Sie verstärken also den Magnetismus im Innern des Eisenkörpers, während in der äußersten Schicht das Feld gleich nach dem Verschwinden des Erregerstromes verschwindet. Die Abnahme des Magnetismus verursacht aber wieder Wirbelströme, welche in den von ihnen umschlossenen Teilen den Magnetismus aufrecht erhalten. Der Magnetismus kann also nur allmählich abnehmen, und zwar von außen nach innen.

Besteht das magnetische Eisengestell einer Maschine aus unterteiltem Eisen (Blech), so können sich Wirbelströme nur innerhalb jedes Blechquerschnittes ausbilden und daher nimmt der Magnetismus nahezu gleichzeitig mit dem Erregerstrom zu und ab.

189. Öffnen eines Stromkreises mit Kapazität und Selbstinduktion. Elektrische Schwingung.

Ist ein Kondensator mit einer seiner Potentialdifferenz $\mathfrak{E}_0$ und seiner Kapazität C entsprechenden Elektrizitätsmenge $\mathfrak{Q}_0$ auf irgend eine Weise geladen worden, und bringt man ihn durch die Funkenstrecke F (Abb. 258) über einen Stromkreis mit dem Widerstande w und der Selbstinduktion L zur Entladung, etwa dadurch, daß man die Elektroden der Funkenstrecke

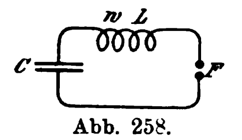


Abb. 258.

einander nähert, so sieht man einen Funken, der sich bei der Betrachtung mittels eines rotierenden Spiegels als aus mehreren Stromübergängen oder Teilfunken bestehend erweist, die aber so rasch aufeinander folgen, daß sie bei direkter Betrachtung als ein einziger Funken erscheinen.

Abb. 259 zeigt eine photographische Aufnahme auf einer rasch bewegten photographischen Platte. Der Funken sprang zwischen zwei feststehenden Elektroden über. Da jene Elektrode, bei welcher der Strom eintritt (negative Elektrode), stärker leuchtet (§ 216) als

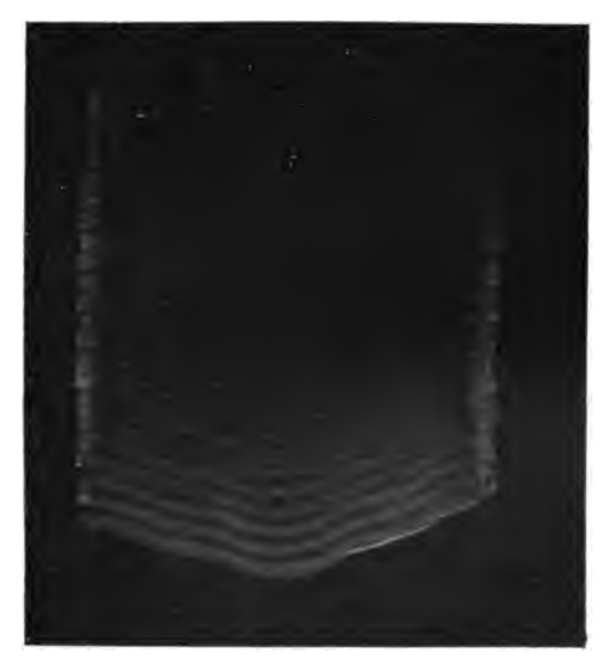
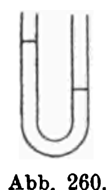


Abb. 259. Oszillatorische Entladung auf einer bewegten photographischen Platte aufgenommen.

jene, bei welcher der Strom austritt (positive Elektrode), so erkennt man aus diesem Bilde, daß ein Wechsel der Polarität stattfindet, da bei jedem Übergang (Teilfunken) abwechselnd die eine oder die andere Elektrode stärker leuchtet. Man hat es also mit einer hin- und hergehenden Bewegung der Elektrizität zu tun, die man als **oszillatorische Entladung** oder **elektrische Schwingung** bezeichnet, da die Ladung zwischen den beiden Kondensatorplatten durch die Verbindungsleitung und Funkenstrecke hin- und herschwingt (vgl. auch Abb. 265).

Das erklärt sich daraus, daß durch die erste Entladung ein Strom (Extrastrom) induziert wird, so wie beim Beginn jedes Stromes (§ 183). Durch diesen findet nun eine neuerliche Ladung statt, und zwar, wie man leicht einsieht, im entgegengesetzten Sinne wie vorher. Diese Ladung entladet sich wieder, und so setzt sich das Spiel fort und würde nie aufhören, wenn nicht die Entladungsdrähte einen gewissen Widerstand besäßen. Dieser verursacht einen Umsatz der elektrischen Arbeit in Wärme, so daß in der Regel nur einige derartige wechselnde Entladungen zustande kommen. Ist der Widerstand sehr groß, so wird schon bei der ersten Entladung die ganze elektrische Arbeit in Wärme umgesetzt, und es kommt zu keiner oszillatorischen Entladung. Der Vorgang ist genau so, wie bei einem Pendel oder einer Flüssigkeit in einer U-förmigen Röhre (Abb. 260) oder einer elastischen Feder. Die Trägheit (von der wir schon in § 184 gesehen haben, daß sie dieselbe Rolle spielt wie die Selbstinduktion) verursacht ein Hinausschwingen über die Ruhelage. Ist aber der Bewegungswiderstand sehr groß, so geht das Pendel oder die Flüssigkeit langsam in die Ruhelage zurück, ohne eine Schwingung auszuführen (aperiodische Dämpfung). Die folgende mathematische Betrachtung gibt nähere Aufschlüsse.


Abb. 260.

Sobald die Entladung des Kondensators über die Funkenstrecke F (Abb. 258) beginnt, fließt im Entladungsstromkreis ein Strom i. Die Summe aus dem Ohmschen Spannungsabfall wi und und dem induktiven Spannungsabfall $L\frac{di}{dt}$ muß in jedem Augenblick gleich der an den Klemmen des Kondensators herrschenden Spannung e (Kondensatorspannung)[1]) sein, also

$$e = wi + L\frac{di}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (218)$$

nun ist nach § 27

$$q = eC,$$

wenn q die in jedem Augenblick vorhandene, der Spannung e entsprechende Ladung bedeutet.

Ferner ist nach Gl. 177

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{de}{dt}$$

und daher

$$\frac{di}{dt} = -C\frac{d^2e}{dt}.$$

[1]) In § 170 und folgende haben wir die Kondensatorspannung mit e_c bezeichnet. Der Einfachheit halber lassen wir jetzt den Index c weg.

Mithin geht die obige Spannungsgleichheit über in

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{w}{L}\frac{de}{dt} + \frac{e}{LC} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (219)$$

Diese Differentialgleichung hat dieselbe Form, wie die für ein gedämpftes Pendel bei kleinen Ausschlägen. Ein Integral derselben ist

$$e = B\varepsilon^{\alpha t},$$

wobei ε die Basis der natürlichen Logarithmen und t die Zeit vom Beginn der Entladung an bedeutet, und B und α zwei Größen sind, deren Bedeutung sich im folgenden ergibt.

Bildet man $\frac{de}{dt}$ und $\frac{d^2e}{dt}$ und setzt alle 3 Werte in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$B\varepsilon^{\alpha t}\left(\alpha^2 + \frac{w}{L}\alpha + \frac{1}{LC}\right) = 0.$$

Da B nicht null sein kann, da sonst auch e null wäre, so muß der Klammerausdruck null sein. Dieser ist eine quadratische Gleichung, so daß sich für α folgende zwei Werte ergeben

$$\alpha_1 = -\frac{w}{2L} + \sqrt{\frac{w^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{w}{2L} - \sqrt{\frac{w^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Die allgemeinste Lösung für e muß beiden Werten Rechnung tragen; sie lautet daher

$$e = B\varepsilon^{\alpha_1 t} + D\varepsilon^{\alpha_2 t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (220)$$

Sind die Wurzelausdrücke reell, so sind α_1 und α_2 negativ, und die Spannung e wird daher mit wachsender Zeit immer kleiner, bis sie für $t = \infty$ schließlich null ist. e nimmt um so rascher ab, je größer α, d. h. je größer w und je kleiner L ist. Das Verhältnis $\frac{w}{L}$ haben wir in § 183 Zeitkonstante genannt. Diese kommt also auch hier in Betracht. Während der ganzen Zeit bleibt e positiv. Die Entladung erfolgt also stetig abnehmend, ohne periodische Schwankungen, d. h. aperiodisch, und zwar in Form einer Exponentialkurve wie in Abb. 255. Dieser Fall (Wurzelausdrücke reell), ist dann vorhanden, wenn

$$\frac{w^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$$

oder

$$w^2 \geqq \frac{4L}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (221)$$

ist, d. h. wenn der Ohmsche Widerstand einen gewissen von der Selbstinduktion und der Kapazität abhängigen Wert übersteigt.

Ist hingegen

$$w^2 < \frac{4L}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (222)$$

so sind die Wurzelausdrücke imaginär und man kann schreiben

$$\alpha_1 = -\frac{w}{2L} + \iota\omega$$

$$\alpha_2 = -\frac{w}{2L} - \iota\omega$$

wobei

$$\iota = \sqrt{-1}$$

und

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{w^2}{4L^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (223)$$

Dann geht Gl. 220 über in

$$e = \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}\left[B\varepsilon^{\iota\omega t} + D\varepsilon^{-\iota\omega t}\right]$$

$$e = \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}\left[(B + D)\cos\omega t + (B\iota - D\iota)\sin\omega t\right] \text{[1]}$$

Setzt man

$$B + D = M \qquad \text{und} \qquad B\iota - D\iota = N,$$

so ist

$$e = \varepsilon^{-\frac{w}{2L}t}(M\cos\omega t + N\sin\omega t).$$

Die Werte der Größen M und N ergeben sich auf folgende Weise. Zur Zeit $t = 0$ ist die Ladung und daher auch die Spannung des Kondensators noch unverändert, also $e = \mathfrak{E}_0$, wenn $\mathfrak{E}_0$ diese, vor Beginn der Entladung herrschende Spannung bedeutet. Dann ergibt sich

$$\mathfrak{E}_0 = M.$$

[1]) Weil nach einem mathematischen Lehrsatz

$$\varepsilon^{-\iota\omega t} = \cos\omega t + \iota\sin\omega t$$

und

$$\varepsilon^{\iota\omega t} = \cos\omega t - \iota\sin\omega t.$$

der Regel ist schon der Strom, der von einem Gliede 9. Ordnung herrührt, verschwindend klein.

Sind bei Sternschaltung die neutralen Punkte miteinander verbunden (Abb. 396), sei es, daß eine Leitung zwischen ihnen gelegt ist, oder daß beide an Erde gelegt sind, so addieren sich hier die Stromglieder, deren Ordnung ein Vielfaches von 3 ist, und der Strom i_k verkehrt in der Verbindung der neutralen Punkte. w_k und L_k bedeuten aber jetzt Widerstand und Selbstinduktion einer der drei parallelgeschalteten Schleifen, die von den Leitungen mit der neutralen Verbindung gebildet werden. Zwischen den neutralen Punkten herrscht eine Spannung gleich $\mathfrak{A}_3 \sin 3\omega t + \mathfrak{A}_9 \sin 9\omega t$. Schaltet man ein Voltmeter zwischen die neutralen Punkte, so zeigt es den Wert $\frac{1}{3} E_0$ an.

Wir gelangen also zu folgendem Ergebnis. Aus einer Maschine mit Sternschaltung ohne neutrale Verbindung oder mit Dreieckschaltung können Spannungs- oder Stromglieder, deren Ordnung ein Vielfaches von 3 ist, nicht in die Leitungen gelangen. Bei Sternschaltung mit neutraler Verbindung enthält jede der drei Leitungen dieselben Glieder in Strom und Spannung, die im Stromerzeuger entstehen. Sie sind daher auch in dem betreffenden Verbrauchsapparat (Motor, Transformator) vorhanden. In der neutralen Leitung addieren sich die Glieder, deren Ordnung ein Vielfaches von 3 ist. Bei Dreieckschaltung addieren sich diese Spannungsglieder im Stromerzeuger und erzeugen einen Strom in der geschlossenen Wickelung. In Verbrauchsapparaten kann ein Strom in der geschlossenen Wickelung nicht vorkommen, weil Glieder dritter Ordnung überhaupt nicht hineingelangen.

Für Cosinusglieder ergibt sich dasselbe wie im ganzen Vorstehenden für Sinusglieder.

249. Die elektrische Leistung des Dreiphasenstromes.

Die gesamte elektrische Leistung P eines Dreiphasenstromes ist natürlich gleich der Summe der Leistungen in den drei Wickelungszweigen. Sind Strom, Spannung und Phasenverschiebung in allen dreien gleich, so ist bei Sternschaltung (Abb. 397)

$$P = 3\, E' J \cos \varphi.$$

Enthalten die Wellenformen nur Glieder erster Ordnung, so ist nach § 247

$$P = \sqrt{3}\, E J \cos \varphi.$$

Bei Dreieckschaltung (Abb. 398) ist

$$P = 3\, E J' \cos \varphi = \sqrt{3}\, E J \cos \varphi.$$

Es gibt also in beiden Fällen dieselbe Formel, wenn Strom und Spannung auf die Leitungen bezogen werden. Die Phasenverschiebung φ bedeutet aber immer die in einem Wickelungszweig, nicht die zwischen Strom in einer Leitung und verketteter Spannung.

Die vorstehenden Formeln gelten natürlich nur, wenn Strom, Spannung und Phasenverschiebung in allen drei Leitungen gleich sind, andernfalls wird sie für jede Leitung besonders bestimmt. Sind die Stromstärken und Spannungen nicht gleich, erfüllen aber die drei Spannungen zwischen den Leitungen die Bedingung

$$e_I + e_{II} + e_{III} = 0,$$

so erhält man eine Formel für die gesamte Leistung auf folgende Weise. Bedeutet p die gesamte Leistung in jedem Augenblick, so ist nach Abb. 398

$$p = e_I i'_I + e_{II} i'_{II} + e_{III} i'_{III}.$$

Zufolge obiger Gleichung ist

$$i'_I (e_I + e_{II} + e_{III}) = 0.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der vorigen, so ist

$$p = e_{II} (i'_{II} - i'_I) + e_{III} (i'_{III} - i'_I).$$

Nun ist (nach Abb. 398)

$$i_I = i'_I \pm i'_{II} \quad \text{und} \quad i_{III} = i'_{III} \pm i'_I,$$

also

$$p = \pm e_{II} i_I \pm e_{III} i_{III}.$$

In dieser Gleichung kommen nur die Spannungen zwischen den Leitungen und die Ströme in den Leitungen vor. Will man zu den effektiven Werten übergehen, so müssen die Phasenverschiebungen zwischen diesen Spannungen und Strömen (γ bzw. δ) eingeführt werden und man erhält so für die gesamte Leistung in effektiven Werten

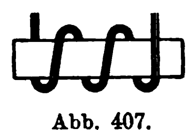
$$P = E_{II} J_I \cos \gamma \pm E_{III} J_{III} \cos \delta.$$

Die Summe dieser Produkte ist zu bilden, wenn γ und δ kleiner als 90^0 ist; hingegen die Differenz, wenn eine dieser Phasenverschiebungen größer als 90^0 ist. Ist die Phasenverschiebung φ in den Wickelungszweigen selbst null, so ist γ und δ (nach Abb. 401) gleich 30^0. Die Differenz ist also zu bilden, wenn φ in einer der Leitungen größer als 60^0 ist.

Über die Messung der Leistung mit Wattmetern vgl. § 271.

250. Das resultierende magnetische Feld eines Dreiphasenstromes.

Wirken die drei Ströme eines Dreiphasensystemes auf einen Eisenkern, so hängt das resultierende Feld von der Art der drei Wickelungen ab. Eine vollständige Übereinanderlagerung der drei Felder findet nur statt, wenn alle drei Ströme in ganz gleicher Weise zur Wirkung kommen. Das ist der Fall, wenn die drei Stromleiter unmittelbar nebeneinander liegen wie in Abb. 407. Die Berechnung des resultierenden Feldes kann aber nicht so vorgenommen werden, daß man etwa aus Abb. 111 oder 150 die zu jeder Wickelung gehörigen Kraftliniendichten $\mathfrak{B}$ entnimmt und daraus die Resultierende bildet. Das wäre deshalb falsch, weil in $\mathfrak{B}$ die Durchlässigkeit μ steckt, und diese hängt nicht von den Komponenten, sondern von der tatsächlich vorhandenen Kraftliniendichte ab. Man muß daher die Resultierende aus den MMKen bilden und dann erst die dazu gehörigen Kraftlinien suchen. Bei Luft oder anderen Stoffen von konstanter Durchlässigkeit ist es natürlich gleichgültig, ob man so oder so verfährt.


Abb. 407.

Sind f_I, f_{II}, f_{III} die Augenblickswerte der MMKe der drei Stromkreise, so ist die resultierende MMK f_r bei der in Abb. 407 dargestellten Wickelung

$$f_r = f_I + f_{II} + f_{III}$$

und nach § 105, wenn N die Windungszahl jedes Stromkreises ist,

$$f_r = 0{,}4\pi N(i_I + i_{II} + i_{III}).$$

Nach § 247 ist aber der Klammerausdruck null und daher

$$f_r = 0.$$

Es muß also auch das magnetische Feld null sein. Fließt aber einer der drei Ströme, z. B. i_I, in entgegengesetztem Sinne, sei es, daß der Sinn seiner Wickelung oder die Anschlüsse verkehrt sind, so ist

$$f_r = 0{,}4\,\pi N(-i_I + i_{II} + i_{III}).$$

Nun ist aber nach § 247

$$i_{II} + i_{III} = -i_I.$$

Mithin

$$f_r = -0{,}4\,\pi N \cdot 2 i_I = -2 f_I.$$

Daher ist der Scheitelwert $\mathfrak{F}_r$ der resultierenden MMK

$$\mathfrak{F}_r = 0{,}8\,\pi \mathfrak{J} N.$$

Kommen aber die drei Stromkreise nicht auf jeden Teil des Kernes in gleicher Weise zur Wirkung, so ist die resultierende MMK im ersten Fall größer als null und im zweiten Fall kleiner als 2. Das ist der Fall, wenn die drei Wickelungen übereinanderliegende Spulen bilden (Abb. 182a). Dann wirkt die mittlere Spule schwächer auf den Kern als die innere, und die oberste schwächer als die mittlere. Noch schlechter ist das Zusammenwirken der drei Spulen, wenn sie nebeneinanderliegen, weil sich dann zwischen den Spulen Folgepole ausbilden, wie in Abb. 136.

Das Vorstehende gilt aber nur für solche Wellenformen, die keine Glieder dritter Ordnung und ihrer Vielfachen enthalten. Sind solche in den Strömen vorhanden, so gibt ihre Summe, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, das Dreifache. Daher ist bei gleichem Wickelungssinn

$$f_r = 0{,}4\,\pi N (3\,\mathfrak{J}_3 \sin 3\omega t \pm 3\,\mathfrak{J}_9 \sin 9\omega t + \ldots)$$

$$f_r = 1{,}2\,\pi N (\mathfrak{J}_3 \sin 3\omega t \pm \mathfrak{J}_9 \sin 9\omega t + \ldots).$$

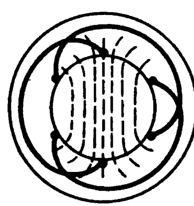
Der Scheitelwert der MMK ist also, je nachdem ob die Glieder höherer Ordnung + oder — Vorzeichen haben (§ 205):

$$\mathfrak{F}_r = 1{,}2\,\pi N (\mathfrak{J}_3 \mp \mathfrak{J}_9 \mp \ldots).$$

Fließt aber einer der Ströme im entgegengesetzten Sinne, so heben sich zwei dieser Glieder gegenseitig auf, und es ist

$$\mathfrak{F}_r = 0{,}4\,\pi N (\mathfrak{J}_3 \mp \mathfrak{J}_9 \mp \ldots).$$

Bei unsymmetrischen Wellenformen muß der Scheitelwert in jedem Falle besonders ermittelt werden (§ 207).


Abb. 408.

Anders ist es bei der **Trommelwickelung** einer Dreiphasenmaschine (Stromerzeuger oder Motor). Abb. 408 zeigt eine solche (zweipolige) schematisch. Die gestrichelten Linien deuten den Verlauf des resultierenden Feldes an, und zwar in dem Augenblick, der in Abb. 389 durch b bezeichnet ist. Denkt man sich in einem bestimmten Augenblick die von einem der drei Ströme erzeugte Kraftliniendichte im Luftzwischenraum zwischen Ständer und Läufer als senkrechte Linien auf den inneren Umfang aufgetragen, so erhält man die in Abb. 409 durch die gestrichelte Linie dargestellte Feldverteilung. Sie kann als Sinuslinie mit dem Scheitelwert $\mathfrak{M}$ betrachtet werden. Rechnet man die Welle vom

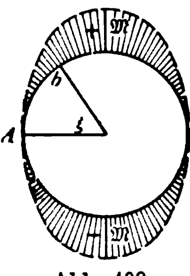


Abb. 409.

Punkt A an, so ist die MMK an irgend einer Stelle b des Umfanges, die von A um den Winkel ξ und um das Stück l des Umfanges entfernt ist:

$$f_I = \mathfrak{M} \sin \xi l.$$

Ist λ die Länge des Umfanges, also die Wellenlänge, so ist $\xi = \frac{2\pi}{\lambda}$. Tatsächlich ist dann für $l = \frac{\lambda}{4}$ $f = \mathfrak{M} \sin \frac{\pi}{2} = \mathfrak{M}$; für $l = \frac{\lambda}{2}$ $f = 0$; für $l = \frac{3\lambda}{4}$ $f = -\mathfrak{M}$.

Durch diese Gleichung wird die räumliche Verteilung der MMK bestimmt, gleichgültig ob Gleichstrom oder Wechselstrom durch die betreffende Spule geht. Ist es ein Wechselstrom, dessen zeitlicher Verlauf sinusförmig ist, so ist die MMK $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \sin \omega t,$$

wenn $\mathfrak{F}$ den Scheitelwert der MMK einer Spule bedeutet. Es ist demnach

$$f_I = \mathfrak{F} \sin \omega t \cdot \sin \xi l.$$

Durch diese Gleichung wird also die MMK an einem beliebigen Punkte des Umfanges, dessen Bogenlänge l ist, zur Zeit t bestimmt. Das gilt für eine Spule. Für die zweite Spule, die um ein Drittel des Umfanges, also um 120^0 räumlich verschoben ist und einen Strom führt, der um 120^0 zeitlich verschoben ist, gilt

$$f_{II} = \mathfrak{F} \sin (\omega t + 120) \sin (\xi l + 120)$$

und für die dritte Spule

$$f_{III} = \mathfrak{F} \sin (\omega t + 240) \sin (\xi l + 240).$$

Die gesamte, aus der Wirkung der drei Spulen resultierende EMK f_r ist in jedem Augenblick

$$f_r = f_I + f_{II} + f_{III}.$$

Unter Benützung einer bekannten trigonometrischen Formel [1]) erhält man dann

$$\begin{aligned} f_r = \frac{\mathfrak{F}}{2} \Big[& \cos (\omega t - \xi l) - \cos (\omega t + \xi l) + \cos (\omega t - \xi l) \\ & - \cos (\omega t + \xi l + 240) + \cos (\omega t - \xi l) - \cos (\omega t + \xi l + 480) \Big] \\ = \frac{\mathfrak{F}}{2} \Big[& 3 \cos (\omega t - \xi l) - \cos (\omega t + \xi l) - \cos (\omega t + \xi l) \cos 240 \\ & + \sin (\omega t + \xi l) \sin 240 - \cos (\omega t + \xi l) \cos 480 \\ & + \sin (\omega t + \xi l) \sin 480 \Big]. \end{aligned}$$

---

[1]) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$.

Weil aber

$$\sin 480 = \sin 120 = -\sin 240$$

$$\cos 480 = \cos 120 = \cos 240 = -\frac{1}{2},$$

so verschwinden die letzten Glieder, und es ist

$$f_r = \frac{3}{2}\mathfrak{F}\cos(\omega t - \xi l).$$

Diese Gleichung gibt an, welchen Wert die resultierende MMK an irgend einer Stelle des Umfanges zu irgend einer Zeit hat.

Der Scheitelwert $\mathfrak{F}_r$ der resultierenden MMK ist nach der vorstehenden Gleichung

$$\mathfrak{F}_r = \frac{3}{2}\mathfrak{F}.$$

Die Magnetisierung wird also dargestellt durch eine MMK mit dem Scheitelwerte $\mathfrak{F}_r$, deren räumliche Verteilung einer einfachen periodischen Funktion entspricht und die mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω rotiert.[1])

Da für eine Spule

$$\mathfrak{F} = 0{,}4\,\pi\,\mathfrak{J}N \text{ ist,}$$

so ist

$$\mathfrak{F}_r = 0{,}6\,\pi\,\mathfrak{J}N.$$

Hat der in den Spulen fließende Wechselstrom eine zusammengesetzte Wellenform von der Art

$$\mathfrak{J}_1 \sin\omega t + \mathfrak{J}_3 \sin 3\omega t + \mathfrak{J}_5 \sin 5\omega t + \ldots,$$

so ist

$$f_I = \left[\mathfrak{F}_1 \sin\omega t + \mathfrak{F}_3 \sin 3\omega t + \mathfrak{F}_5 \sin 5\omega t + \ldots\right] \sin\xi l$$

$$f_{II} = \left[\mathfrak{F}_1 \sin(\omega t + 120) + \mathfrak{F}_3 \sin 3(\omega t + 120) + \mathfrak{F}_5 \sin 5(\omega t + 120) + \ldots\right] \sin(\xi l + 120)$$

$$f_{III} = \left[\mathfrak{F}_1 \sin(\omega t + 240) + \mathfrak{F}_3 \sin 3(\omega t + 240) + \mathfrak{F}_5 \sin 5(\omega t + 240) + \ldots\right] \sin(\xi l + 240)$$

Die Ausrechnung ergibt für die resultierende MMK

$$f_r = \frac{3}{2}\mathfrak{F}_1\cos(\omega t - \xi l) - \frac{3}{2}\mathfrak{F}_5\cos(5\omega t + \xi l) + \frac{3}{2}\mathfrak{F}_7\cos(7\omega t - \xi l) - \frac{3}{2}\mathfrak{F}_{11}\cos(11\omega t + \xi l).$$

---

[1]) Durch experimentelle Bestimmung mittels eines Wellenzeichners wurde festgestellt, daß die Feldverteilung tatsächlich sinusförmig ist, und zwar unabhängig von der Anzahl der Wickelungslöcher und der Form der Spulen, wenn die Spannung des zugeführten Stromes sinusförmig ist: Electrical World Bd. 46, Nr. 8, S. 408, 1906. ETZ 1906 S. 702.

Mithin ist der Scheitelwert

$$\mathfrak{F}_r = \frac{3}{2}(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_5 + \mathfrak{F}_7 - \mathfrak{F}_{11}).$$

Die Glieder, deren Ordnung ein Vielfaches von 3 sind, sind verschwunden. In dem resultierenden Ankerfelde eines Stromerzeugers, welches die Ankerrückwirkung erzeugt, sowie im Felde eines Motors kommen also solche Glieder nicht vor, selbst wenn sie in den Strömen und in den MMKen der einzelnen Wickelungen vorkommen.

Den Scheitelwert $\mathfrak{Z}_r$ der resultierenden Kraftlinienmenge erhält man nun (§ 105) aus

$$\mathfrak{Z}_r = \frac{\mathfrak{F}_r}{\mathfrak{w}}$$

wenn $\mathfrak{w}$ den magnetischen Widerstand des gesamten Kraftlinienbündels bedeutet.

Für Cosinusglieder dritter Ordnung und ihrer Vielfachen gilt dasselbe wie für Sinusglieder. Sind noch andere Cosinusglieder vorhanden, so muß in jedem Fall die resultierende MMK nach vorstehender Methode und ihr Scheitelwert durch Ausrechnung des Maximums oder durch Aufzeichnen der Wellenform ermittelt werden.

Aus der vorletzten Gleichung folgt

$$\mathfrak{F}_r = \frac{3}{2}\,0{,}4\,\pi N(\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_5 + \mathfrak{J}_7 - \mathfrak{J}_{11}).$$

Der Klammerausdruck ist aber nicht gleich dem Scheitelwert des Stromes in einer der drei Wickelungen, denn dieser ist nach der Voraussetzung und nach § 212 gleich

$$\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_3 + \mathfrak{J}_5 - \mathfrak{J}_7 + \mathfrak{J}_9 - \mathfrak{J}_{11}.$$

Der effektive Wert ist

$$J = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{J}_1^2 + \mathfrak{J}_3^2 + \mathfrak{J}_5^2 + \ldots)}$$

Man sieht daraus, daß man diesen effektiven Wert aus den der bekannten resultierenden MMK bzw. aus $\mathfrak{Z}_r$ nicht berechnen kann. Man muß sich dann mit dem Näherungswert begnügen, der sich unter der Annahme einfacher Sinuswellen ergibt, also aus

$$\mathfrak{Z}_r = \frac{0{,}6\,\pi N \mathfrak{J}}{\mathfrak{w}}.$$

Dann ergibt sich der effektive Wert J des Stromes in einer Leitung aus $J = \frac{\mathfrak{J}}{\sigma}$, wenn der Scheitelfaktor σ der Stromwelle bekannt ist.

251. Das resultierende magnetische Feld eines Zweiphasenstromes.

Wird ein Eisenkern wie in Abb. 407 von den durchwegs parallelliegenden Leitungen eines Zweiphasenstromes magnetisiert, so ist die resultierende MMK in jedem Augenblick

$$f_r = f_I + f_{II} = 0{,}4\,\pi N \mathfrak{J}\,[\sin \omega t + \sin (\omega t + 90)].$$

Das gibt auf gleiche Weise wie in § 246

$$f_r = \mathfrak{F}\sqrt{2}\,\sin(\omega t + 45).$$

Läuft der Strom in einer der beiden Wickelungen im entgegengesetzten Sinne, so ist

$$f_r = f_I - f_{II} = \mathfrak{F}\sqrt{2}\,\sin(\omega t - 45).$$

Der Scheitelwert $\mathfrak{F}_r$ der resultierenden EMK ist also in beiden Fällen

$$\mathfrak{F}_r = \sqrt{2}\,\mathfrak{F} = 0{,}566\,\pi N \mathfrak{J}.$$

Hat der Strom eine zusammengesetzte Wellenform, so ergibt sich auf gleiche Weise

$$f_r = \sqrt{2}\left[\mathfrak{F}_1 \sin(\omega t \pm 45) + \mathfrak{F}_3 \sin(3\omega t \pm 45) + \mathfrak{F}_5 \sin(5\omega t \pm 45) + \ldots\right]$$

Bei der Trommelwickelung einer Zweiphasenmaschine sind die beiden Wickelungen um 90° (Viertel einer Wellenlänge) räumlich verschoben. Analog der Dreiphasenwickelung im vorigen Paragraphen ist also bei einfachen Sinuswellen

$$f_I = \mathfrak{F} \sin \omega t \cdot \sin \xi l$$

$$f_{II} = \mathfrak{F} \sin(\omega t + 90) \sin(\xi l + 90) = \mathfrak{F} \cos \omega t \cdot \cos \xi l.$$

Daher die resultierende MMK in jedem Augenblick

$$f_r = f_I + f_{II} = \mathfrak{F}(\sin \omega t \cdot \sin \xi l + \cos \omega t \cdot \cos \xi l)$$

$$f_r = \mathfrak{F} \cos(\omega t - \xi l).$$

Der Scheitelwert $\mathfrak{F}_r$ der resultierenden MMK ist also gleich dem einer Wickelung und daher die resultierende Kraftlinienmenge

$$\mathfrak{Z}_r = \frac{0{,}4\,\pi \mathfrak{J} N}{\mathfrak{w}}.$$

Hat der Strom eine zusammengesetzte Wellenform, so ist

$$f_I = \left[\mathfrak{F}_1 \sin \omega t + \mathfrak{F}_3 \sin 3\,\omega t + \ldots\right] \sin \xi l$$

$$f_{II} = \left[\mathfrak{F}_1 \sin(\omega t + 90) + \mathfrak{F}_3 \sin 3\,(\omega t + 90) + \ldots\right] \sin(\xi l + 90)$$

und daraus die resultierende MMK

$$f_r = \mathfrak{F}_1 \cos(\omega t - \xi l) - \mathfrak{F}_3 \cos(3\omega t + \xi l) + \mathfrak{F}_5 \cos(5\omega t - \xi l) \pm \ldots$$

mithin der Scheitelwert der resultierenden MMK

$$\mathfrak{F}_r = \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_5 \pm \ldots$$

252. Umwandlung von Zwei- in Dreiphasenstrom.

Mittels zweier Transformatoren kann man durch die Scottsche Schaltung eine solche Umwandlung ausführen. Abb. 410 zeigt die Schaltung der beiden Transformatoren, die primär an Zweiphasenstrom angeschlossen sind. *ABC* sind die Enden der sekundären Wickelungen, von denen der Dreiphasenstrom abgenommen wird. Abb. 411 zeigt das Diagramm dieser Schaltung. *I* ist der Vektor der sekundären Spannung der Wickelung *AB*. Senkrecht darauf im Mittelpunkt *O* steht der Vektor *II* der sekundären Spannung der Wickelung *OC*. Diese beiden Vektoren stehen deshalb senkrecht aufeinander, weil die den primären Wickelungen zugeführten Spannungen des Zweiphasenstromes um 90^0 gegeneinander verschoben sind. Ist die Spannung *OC* gleich dem $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $(=0{,}87)$-fachen der Spannung *AB*, so ist das Spannungsdreieck *ABC* ein gleichseitiges, wie in Abb. 403. Daher sind die drei Spannungen zwischen *AB*, *BC* und *CA* um 120^0 untereinander verschoben. Um dieses bestimmte Spannungsverhältnis zu bekommen, muß bei gleicher primärer Spannung das Übersetzungsverhältnis des Transformators *II* gleich dem 0,87fachen des Transformators *I* sein, d. h. bei gleicher Magnetisierung in den Eisenkernen muß die sekundäre Windungszahl des Transformators *II* gleich der 0,87fachen des Transformators *I* sein.

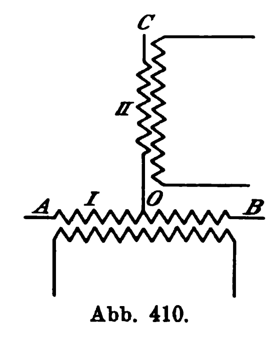


Abb. 410.

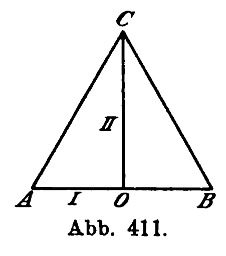


Abb. 411.

253. Herstellung mehrphasiger Ströme aus einphasigem Wechselstrom.

I. Wird ein Wechselstrom in zwei Zweige geteilt (Abb. 412), von denen der eine den nahezu induktionsfreien Widerstand w_1, der andere soviel Selbstinduktion L_2 enthält, daß der Widerstand

w_2 gegen den induktiven Widerstand ωL_2 verschwindet, so besteht nach § 141 eine Phasenverschiebung zwischen den beiden Zweigströmen von nahezu 90°. Man erhält also auf diese Weise einen Zweiphasenstrom. Will man aber damit einen Motor betreiben, so müssen beide Zweigströme durch die entsprechenden Wickelungen geschickt werden und dadurch erhält nun auch der Zweig 1 einen erheblichen induktiven Widerstand, so daß die Phasenverschiebung zwischen den beiden Zweigströmen weit kleiner als 90° ist. Ein zum Betrieb geeignetes Drehfeld erhält man also im Motor auf diese Weise nicht, und man verwendet es daher nur, um einen einphasigen Induktionsmotor, der von selbst nicht anläuft, in Betrieb zu setzen. Dieser erhält zu diesem Zweck zwei Wickelungen wie in Abb. 388, die von den beiden Zweigströmen gespeist werden, und er läuft nun als Zweiphasenmotor mit 40—60° Phasenverschiebung an. Hat der Motor seine normale Umlaufszahl erreicht, so wird der Zweig mit dem Widerstand w_1 abgeschaltet, beide Motorwickelungen hintereinander geschaltet und von dem einphasigen Wechselstrom durchflossen, so daß er nun als Einphasenmotor weiterläuft. Ganz kleine Motoren, wo es auf den Wirkungsgrad, der durch den Widerstand w_1 stark herabgedrückt wird, nicht ankommt, läßt man wohl auch dauernd in der Schaltung Abb. 412 laufen.

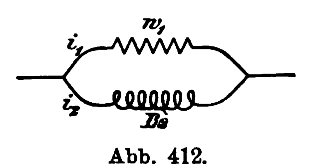


Abb. 412.

II. Mittels anderer Schaltungen lassen sich aber auch Phasenverschiebungen von genau 90° und mehr herstellen. So mit der Brückenschaltung (Abb. 413), wo w_2, w_3, w_5 induktionsfreie Widerstände bedeuten. Durch den Brückenzweig CD gehen zwei Ströme, die durch die gestrichelte und die strichpunktierte Linie angedeutet sind. Der letztere geht durch beide Selbstinduktionen und hat daher eine große Phasenverschiebung gegen die Spannung zwischen den Punkten AB, wenn w_5 nicht zu groß ist. Der erstere hat keine Phasenverschiebung, da er nur durch die Widerstände w_3, w_5, w_2 geht. Da er aber im Zweig CD dem anderen Strom entgegengerichtet ist, so ist er als um 180° verschoben zu betrachten. Im Zweig CB entsteht also ein resultierender Strom, der bei geeigneter Wahl der Widerstände und Selbstinduktionen um 90° und darüber gegen den Strom i verschoben ist. Diese Schaltung wird bei den Induktionsinstrumenten von Siemens & Halske (§ 261) angewendet.

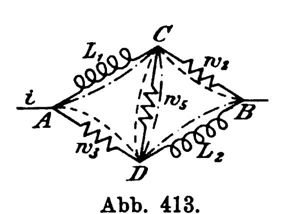


Abb. 413.

III. Bei der durch Abb. 414 dargestellten Schaltung denke

man sich zunächst den Zweig mit der Selbstinduktion L' weg. Dann hat der durch L und w gehende Strom i eine Phasenverschiebung von nahezu 90^0 gegen die Spannung zwischen den Punkten AD, wenn ωL groß gegen w ist. In gleicher Phase mit diesem Strom ist die Spannung zwischen den Punkten BD, da w induktionsfrei ist; legt man nun den Zweig L' an, so hat der Strom i' in diesem Zweig eine Phasenverschiebung von nahezu 90^0 gegen die Spannung zwischen seinen Anschlußpunkten BD. Man würde also eine Phasenverschiebung von nahezu 180^0 zwischen i' und der Spannung AD erhalten, wenn die Spannung zwischen BD unverändert geblieben wäre. Das ist nun nicht der Fall, aber man sieht, daß man eine Phasenverschiebung von 90^0 und darüber durch geeignete Wahl der Größen L, L' und w erhalten kann. Nimmt man nun von AD einen induktionsfreien Zweig ab, so kann die Phasenverschiebung zwischen dem Strom in ihm und i' mehr als 90^0 betragen. Die genaue Berechnung der Ströme und aller Phasenverschiebung zwischen ihnen und den Spannungen läßt sich mit Hilfe der Formeln in § 141 bis 143 ausführen.

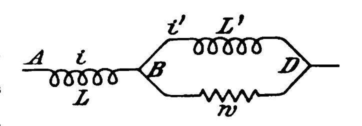


Abb. 414.

IV. Schaltet man einen Kondensator in einen Zweig (Abb. 415), so erhält man eine Phasenverschiebung von genau 90^0 zwischen den beiden Zweigströmen, wenn der Kondensator ein vollkommener ist. Da solche sehr teuer sind, kommt dieses Mittel praktisch nicht zur Anwendung. Bei unvollkommenen Kondensatoren (§ 179) ist die Phasenverschiebung kleiner als 90^0. Durch Einschaltung einer Selbstinduktion in den Zweig 1 kann man aber die Phasenverschiebung zwischen beiden Zweigströmen auf 90^0 und darüber bringen (§ 176).

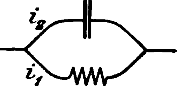


Abb. 415.

V. Endlich läßt sich bei einer Stromverzweigung mit gegenseitiger Induktion, also bei der in Abb. 212 S. 272 dargestellten Schaltung, eine Phasenverschiebung von 90^0 und darüber zwischen den beiden Zweigströmen herstellen, wenn der Wickelungssinn so ist, daß für die wirksamen Selbstinduktionen die Gleichungen 173 gelten. Dann ist die Phasenverschiebung β zwischen den beiden Zweigströmen nach Gl. 121 (S. 224)

$$\operatorname{tg}\beta = \omega \frac{w_2 (L_1 - M) - w_1 (L_2 - M)}{w_1 w_2 + \omega^2 (L_1 - M)(L_2 - M)}.$$

Soll z. B. $\beta = 90$, also $\operatorname{tg}\beta = \infty$ sein, so muß

$$w_1 w_2 + \omega^2 (L_1 - M)(L_2 - M) = 0 \quad \text{sein.}$$

Daraus ergibt sich für M

$$M = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \pm \sqrt{(L_1 - L_2)^2 - \frac{4\,w_1 w_2}{\omega^2}}.$$

Es gibt also zwei Werte von M, welche dieser Bedingung genügen, wenn L_1, L_2, w_1, w_2 so gewählt werden, daß die Wurzel reell ist.

Alle diese Schaltungen bezeichnet man als Schaltungen mit Kunstphase. Wegen der erheblichen Verluste durch Stromwärme in den induktionsfreien Widerständen können sie nur bei kleinen Motoren, wo es auf den Wirkungsgrad nicht ankommt, und die Wärme leicht abgeleitet werden kann, angewendet werden; und zwar hauptsächlich bei Induktions-Elektrizitätszählern und Meßinstrumenten.

254. Motoren mit verschobenen magnetischen Feldern.

Zwar sind bei allen gewöhnlichen Drehstrommotoren, wie sie in § 245 erläutert wurden, magnetische Felder vorhanden, die ebenso wie die Ströme untereinander verschoben sind und ein sich drehendes resultierendes Feld ergeben; es lassen sich aber auch aus dem Felde einer einzigen vom Wechselstrom durchflossenen Spule magnetische Felder von verschiedener Phase erzeugen, und zwar mit Hilfe sekundärer Ströme.

Bei dem durch Abb. 416 dargestellten Motor System Tesla geht ein Teil der Kraftlinien durch die Polschuhe C und der übrige Teil durch die Polschuhe D, die von jenen durch den Zwischenraum d getrennt sind. Sind die Polschuhe D aus massivem Eisen, so entstehen in ihm Wirbelströme von beträchtlicher Stärke, die in bezug auf den Strom in der Spule N sekundäre Ströme sind. Da auch diese ein magnetisches Feld erzeugen, so entsteht in den Polschuhen D ein resultierendes Feld $\mathfrak{Z}$, das nach Abb. 191 gegen den primären Strom verschoben und zwar verspätet ist, also auch gegen das durch die Polschuhe C, die aus

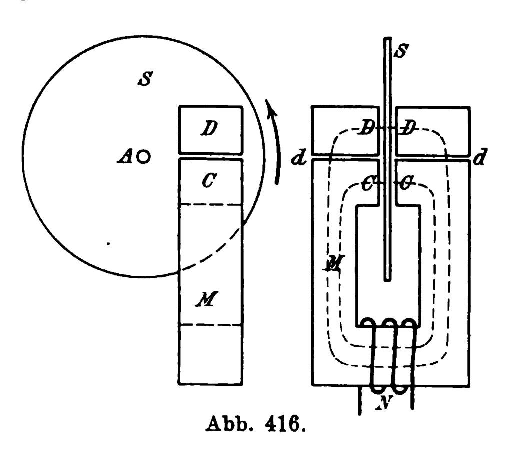


Abb. 416.

unterteiltem Eisen bestehen, gehende Feld. Das magnetische Feld schreitet also von *C* nach *D* fort. Die Scheibe *S* (aus Kupfer oder Aluminium) muß sich daher drehen wie ein kurzgeschlossener Anker in einem Drehfelde, weil in ihr Ströme induziert werden, welche das Fortschreiten des Feldes von *C* nach *D* zu verhindern suchen; und weil sie das nicht können, wird die Scheibe von dem fortschreitenden Felde mitgenommen.[1]) Die massiven Polschuhe *D* können auch seitwärts vom Magnet angeordnet werden wie in Abb. 417.

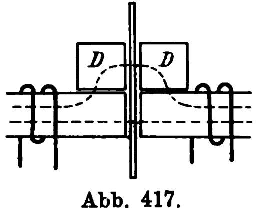


Abb. 417.

Statt der sekundären Polschuhe aus massivem Eisen können auch solche aus unterteiltem Eisen angewendet werden, wenn sie von geschlossenen Ringen aus gut leitendem Metall derart umschlossen sind, daß die Kraftlinien in der Richtung der Achsen der Ringe verlaufen. Dann entstehen in diesen die sekundären Ströme, die die Verschiebung dieses Feldes bewirken. Hierauf beruht einer der ältesten Elektrizitätszähler für Wechselstrom, nämlich der von Wright-Ferranti (Abb. 418), bei dem eine um die Achse *A* drehbare Kupfer- oder Aluminiumtrommel *T* unter der Wirkung der Pole *M* steht, auf denen die Kupferringe *R* sitzen. Infolgedessen sind die hinter diesen Ringen liegenden Teile magnetisch verspätet gegen die vor ihnen liegenden.

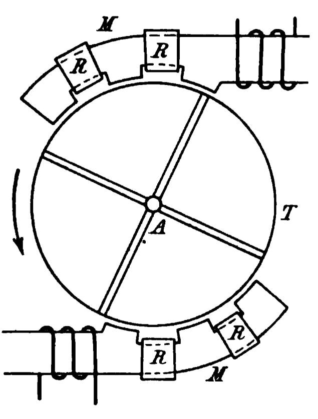
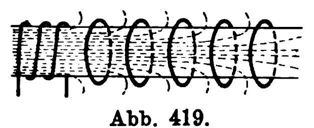


Abb. 418.

Auf diese Weise kann man mittels mehrerer Kupferringe, die auf einen Eisenkern (Abb. 419) aufgeschoben sind, und der an einem Ende von einer Wechselstromspule magnetisiert wird, bewirken, daß in diesem Eisenkern ein magnetisches Feld entsteht, dessen Phase um so mehr verspätet ist, je weiter nach rechts man kommt. Es entsteht auf diese Weise eine räumlich fortschreitende magnetische Welle.


Abb. 419.

Das Zustandekommen dieser räumlichen magnetischen Phasen-

[1]) Dieser Motor wird bei einer Regelungsvorrichtung (Wechselstrombogenlampe) von Schuckert & Co. (DRP. Nr. 73886) angewendet. Über den auf elektrodynamischer Schirmwirkung beruhenden Wechselstrommotor vgl. § 157.

verschiebungen ist aber nur dadurch möglich, daß eine magnetische Streuung besteht, infolge deren ein Teil der Kraftlinien aus den Seitenflächen des Eisenkernes heraustreten kann. Würde keine Streuung bestehen, sondern würden alle von dem Strom in der Spule und von den sekundären Strömen erzeugten Kraftlinien durch den Eisenkern in seiner ganzen Länge verlaufen, so würde ein resultierendes Feld entstehen, das zwar gegen den Strom in der Spule wie in Abb. 191 verspätet, aber an allen Stellen gleich viel verspätet ist, so daß ein Phasenunterschied zwischen verschiedenen Stellen des ganzen Kraftlinienpfades nicht besteht.

Daher erhält man die stärkste Motorwirkung (Drehmoment), wenn die Streuung durch einen gewissen Luftzwischenraum zwischen primärem und sekundärem Polschuh wie in Abb. 416 u. 417 begünstigt wird. Er darf natürlieh nicht zu weit sein, weil sonst der magnetische Widerstand zu groß ist und dann zu wenig Kraftlinien in den sekundären Polschuh gelangen.[1])

---

[1]) Motoren, Elektrizitätszähler, Meßinstrumente, bei denen dieses Prinzip oder das in vorigen Paragraphen erläuterte angewendet wird, werden häufig als Ferraris-Motoren oder Ferraris-Instrumente bezeichnet. Das ist unberechtigt, denn noch bevor Ferraris die Wirkung phasenverschobener Ströme gefunden hatte, waren schon zwei Elektrizitätszähler nach obigem Prinzip bekannt, nämlich der von Borel und der von Schallenberger. (Vgl. ETZ 1901, S. 743 und Fodor „Die elektr. Verbrauchsmesser" Wien 1891, S. 96 u. 106.) Wollte man aber alles, wo Drehmomente durch phasenverschobene Ströme oder Felder erzeugt werden, als Ferraris-Prinzip bezeichnen, so müßte man vor allem alle normalen Drehstrommotoren als Ferraris-Motoren bezeichnen.

Sechzehntes Kapitel.

Die Grundlagen der Meßtechnik.

255. Allgemeines über Meßinstrumente.

Bei den meisten elektrischen Meßinstrumenten wird ein leicht drehbarer Teil durch die Wirkung des Stromes oder der elektrischen Ladung um eine Achse gedreht. Der Drehung wirkt eine Elastizitätskraft oder die Schwerkraft entgegen (Gegenkraft), bis bei einem gewissen Drehwinkel (Ausschlag) beide sich das Gleichgewicht halten, so daß einem bestimmten Strom- oder Spannungswerte ein bestimmter Ausschlag entspricht.

Ausschlag. Die Größe des Ausschlages wird entweder mittels eines an dem drehbaren Teile befestigten Zeigers auf einer Skala abgelesen (direkt zeigende Instrumente) oder auf dem drehbaren Teil ist ein Spiegel befestigt, der einen von einer Lichtquelle kommenden Lichtstrahl reflektiert und auf eine Skala wirft (Spiegelinstrumente) oder der drehbare Teil wird durch eine Torsionsfeder, die einerseits an ihm, andererseits an einem drehbaren Knopf mit Zeiger befestigt ist, in die Nullstellung zurückgedreht. Der Drehungswinkel des Knopfes wird auf einer Gradteilung abgelesen. Die ablenkende Kraft des Stromes ist diesem Torsionswinkel proportional (Torsionsinstrumente).

Dämpfung. Wird der die Ablenkung bewirkende Strom (oder Spannung) plötzlich auf das Instrument geschaltet, so erhält der drehbare Teil einen Stoß und schwingt daher so lange, bis seine Schwingungsenergie durch die dämpfende Wirkung der Reibung und des Luftwiderstandes aufgezehrt ist. Infolgedessen kann man die Ablesung erst nach einiger Zeit vornehmen, während welcher sich Strom oder Spannung schon verändert haben können. Um daher eine möglichst rasche Einstellung zu erreichen, werden besondere Mittel zur Dämpfung der Schwingungen angebracht. Solche sind:

1. Luftdämpfung. Ein mit der Achse *A* (Abb. 420) verbundener Flügel *F* bewegt sich in einer geschlossenen Luftkammer *K*, die so eng an den Flügel anschließt, daß die Luft mit erheblicher Geschwindigkeit und daher mit erheblicher Reibung durch den Zwischenraum hindurch muß. Von Wichtigkeit ist dabei, daß der Schlitz in der Kammer bei *b*, wo der Arm des Flügels hindurchgeht, möglichst eng ist, damit nicht zu viel Luft aus ihm entweichen kann. In Abb. 431, wo der Deckel der Kammer *K* abgenommen ist, ist der Dämpferflügel *Z* zu sehen.

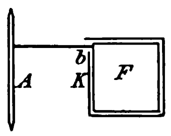


Abb. 420.

Bei der von Raps bei den Instrumenten von Siemens & Halske eingeführten Luftdämpfung (Abb. 421) ist der Schlitz überhaupt vermieden, weil sich der Dämpferflügel wie ein Kolben in einer nur an einem Ende offenen ringförmigen Röhre bewegt.

Abb. 421.

Bei fest aufgestellten Instrumenten wird auch Flüssigkeitsdämpfung angewendet, die natürlich viel stärker wirkt.

2. Magnetische Dämpfung. Mit dem drehbaren Teil ist ein leichter Aluminiumflügel verbunden, der sich bei der Drehung zwischen den Polen des Dauermagnetes *M* (Abb. 422) bewegt. Bei der Bewegung werden dessen Kraftlinien geschnitten und daher Ströme in den Flügel induziert, welche die Bewegung zu hindern suchen (§ 125) und die Schwingungsenergie in Stromwärme umsetzen. Abb. 438 zeigt eine solche Dämpfung. Bei den Drehspuleninstrumenten (Abb. 427) ist es das die Wickelung tragende Metallrähmchen, bei den Induktionsinstrumenten (Abb. 439 u. 456) ist es die das Drehmoment hervorbringende Scheibe selbst, auf welche der Dauermagnet wirkt. Bei jenen Galvanometern, deren drehbarer Teil ein kleiner Dauermagnet ist, wird dieser von einer feststehenden Kupferkapsel umgeben, in welcher die dämpfenden Ströme bei der Drehung des Magnetes induziert werden. Die Dämpfung darf nicht zu stark sein, weil sonst die Bewegung des drehbaren Teiles zu langsam vor sich geht (das Instrument kriecht). Namentlich ist dann in der Nähe der endgültigen Einstellung die Bewegung eine so langsame, daß die geringste Reibung in den Lagern genügt, um zu bewirken, daß die Bewegung noch vor Erreichung dieser Einstellung zum Stillstand gelangt, also nicht richtig anzeigt. Es

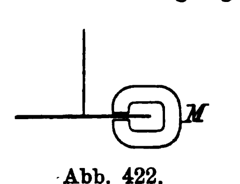


Abb. 422.

ist daher zweckmäßig, daß die Bewegung nicht vollständig aperiodisch erfolgt, sondern nur so viel gedämpft ist, daß das System noch ein oder zwei kleine Schwingungen um seine endgültige Einstellung macht. Sieht man solche, so ist man sicher, daß die Einstellung ohne Reibung und ohne Bewegungshindernis erfolgt. Da die Dämpfung der ersten bis zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist, so wirkt sie um so stärker, je rascher die Bewegung des drehbaren Teiles ist, also je kleiner dessen Trägheit ist.

Trägheit. Nicht zu verwechseln mit der Dämpfung ist die Trägheit, obwohl diese kurz dauernde Schwankungen des Stromes oder der Spannung nicht zur Geltung kommen läßt, weil ihre Kraftwirkungen nicht groß genug sind, um einer Masse von großer Trägheit eine merkliche Drehung zu erteilen. Kommt es aber durch einen genügenden Stromstoß zu einer Ablenkung, so dauern die Schwingungen um so länger, je größer die Trägheit ist, und daher ist eine um so stärkere Dämpfung erforderlich. Sehr große Trägheit, wie sie namentlich den Hitzdrahtstrommessern eigen ist, bewirkt, daß selbst große Änderungen des Stromes, wenn sie rasch erfolgen, nicht angezeigt werden, sondern ein nicht definierbarer Mittelwert. Nur bei den sogenannten ballistischen Galvanometern (§ 268), die dazu dienen, die Elektrizitätsmenge eines kurz dauernden Stromes zu messen, ist große Trägheit notwendig.

Empfindlichkeit. Unter Empfindlichkeit eines Instrumentes versteht man die Fähigkeit, kleine Änderungen der zu messenden Größe anzuzeigen. Bei Instrumenten, deren Ausschlag der zu messenden Größe proportional ist, ist die Empfindlichkeit an allen Stellen des Meßbereiches dieselbe. Bei solchen, deren Ausschlag mit dem Quadrate der zu messenden Größe wächst, überhaupt bei allen, deren Skala nicht gleichmäßig verläuft, ist die Empfindlichkeit an verschiedenen Stellen des Meßbereiches verschieden. Die Empfindlichkeit ist bei gleichen Kräften um so größer, je kleiner die Reibung und die Trägheit des drehbaren Teiles ist. Die Dämpfung hat keinen Einfluß darauf, wenn sie nicht so groß ist, daß die kleinste Reibung bereits zu einem Bewegungshindernis wird. Die Empfindlichkeit ist im allgemeinen um so größer, je kleiner die Gegenkraft ist.

Genauigkeit. Diese ist von der Empfindlichkeit wohl zu unterscheiden. Sie ist gekennzeichnet durch den Unterschied zwischen dem richtigen Werte und dem vom Instrument angezeigten Werte. Je größer dieser Unterschied, desto kleiner die Genauigkeit, oder desto größer die Ungenauigkeit. Bei Instrumenten z. B. deren Angaben der zu messenden Größe proportional sein sollen, besteht die Ungenauigkeit in der Abweichung von der Proportionalität. Bei Instrumenten mit geeichter Skala besteht die

Ungenauigkeit in der Abweichung vom Sollwert der Teilstriche. Die Ungenauigkeit kann herrühren von der Ausführung der Eichung und der Teilstriche oder von der Beschaffenheit des Instrumentes selbst (Ungleichheit des Ausschlages zu verschiedenen Zeiten infolge von Reibung, Temperaturänderung, Feuchtigkeit, magnetischen oder elektrischen Einflusses, Veränderung der Lage u. dgl.). In der Regel ist die Genauigkeit an verschiedenen Stellen des Meßbereiches verschieden.

Einteilung. Direkt zeigende Instrumente kommen zur unmittelbaren Messung der Stromstärke, der Spannung (Potentialdifferenz) und der Leistung in Anwendung. Außerdem können diese Größen aber auch mittelbar gemessen werden.

Die Messung der Stromstärke kann auf folgende Arten geschehen:

a) durch chemische Wirkung (Voltameter);
b) durch Wechselwirkung zwischen Strömen und Magneten (Galvanometer, Tangenten-Boussole, Drehspulen-Instrumente);
c) durch elektrodynamische Wirkung (Dynamometer, Stromwagen);
d) durch Wärmewirkung (Hitzdraht-Instrumente);
e) durch Anziehung oder Ablenkung weicher Eisenkörper im Felde des Stromes (Elektromagnetische Instrumente);
f) durch elektrodynamische Induktion (Induktionsinstrumente);
g) durch indirekte Methoden.

Die zur Gruppe a) und b) gehörenden Meßgeräte eignen sich nur für gleichgerichtete Ströme, die der Gruppen c), d), e) für Gleich- und Wechselströme, die der Gruppe f) nur für Wechselströme. Die zur Gruppe e) gehörenden bedürfen einer besonderen Eichung für die eine oder andere Stromart.

Die Messung der Spannung kann auf folgende Arten geschehen:

a) durch die Anziehung oder Abstoßung statischer Ladungen (Elektrostatische Spannungsmesser);
b) durch alle Strommesser der vorstehenden Gruppen a) bis f) (Galvanometrische Spannungsmesser);
c) durch indirekte Methoden.

Die Messung der Leistung kann auf folgende Arten geschehen:

a) durch elektrodynamische Wirkung (Dynamometer, Stromwagen);

b) durch elektrodynamische Induktion (Induktionsinstrumente);
c) durch indirekte Methoden.

Im folgenden werden die einzelnen Gruppen behandelt.

Strom- und Spannungsmessung.

256. Voltameter.

Nach § 59 ist die von einem konstanten Strome J während der Zeit t in einer Zersetzungszelle ausgeschiedene Gewichtsmenge eines Jons

$$G = bJt,$$

wenn b sein elektrochemisches Äquivalent bedeutet. Daraus erhält man J, wenn die übrigen Größen bekannt sind.

Das Kupfervoltameter ist eine Zersetzungszelle, bestehend aus einer Kupferplatte als Anode und einer Kupfer- oder Platinplatte als Kathode. Als Elektrolyt dient eine 10- bis 15prozentige eisenfreie Lösung von Kupfersulphat. Man stellt die Elektroden mit einer gegenseitigen Entfernung von 1 bis 2 cm auf und rechnet auf etwa 1 dm^2 Oberfläche 2 bis 5 Amper. Eine größere Stromdichte soll vermieden werden. Die Kathode muß vor dem Einsenken in die Zelle gut gereinigt und abgewogen werden. Nachdem der Strom eine gewisse Zeit von t Sekunden geschlossen war, spült man die Kathode vorsichtig ab und trocknet sie ebenso vorsichtig zwischen Fließpapier oder an der Luft, ohne zu erwärmen. Dann wiegt man wieder und erhält so das Gewicht des ausgeschiedenen Kupfers. Für Kupfer ist $z = 0{,}000329$ g in 1 Sekunde bezogen auf Ampere.

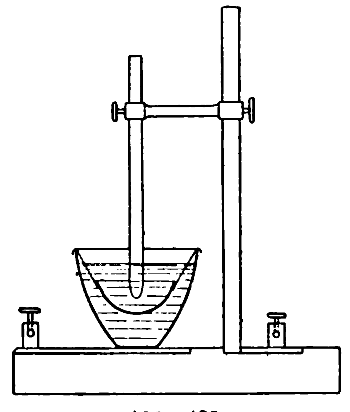


Abb. 423.

Eine genauere Bestimmung ermöglicht das Silbervoltameter. Bei der von der Firma Hartmann & Braun (Frankfurt a. M.) erhältlichen Ausführung dient ein Platintiegel (Abb. 423) als Kathode. Derselbe enthält eine 15 bis 30 proc. Lösung von salpetersaurem Silber. Als Anode dient ein Kegel oder Stab aus Silber. Die Stromdichte soll 0,5 bis 2 A für je 1 dm^2 Oberfläche betragen. Für Silber ist $z = 0{,}001118$ g in 1 Sekunde bezogen auf Ampere.

Diese Arten der Strommessung setzen natürlich einen konstant bleibenden Strom voraus; ist dies nicht der Fall, so kann man nur die während einer gewissen Zeit vom Strome gelieferte *Elektrizitätsmenge* bestimmen, entsprechend der Gleichung

$$G = bQ = b\int i\,dt.$$

Nur zu diesem Zweck werden die elektrolytischen Methoden noch angewendet.

257. Instrumente mit Dauermagneten.

Die hierher gehörigen Instrumente, die man gewöhnlich als galvanometrische bezeichnet, beruhen auf der Kraftwirkung zwischen einem Magnet und einem stromführenden Leiter. Ist der Stromleiter fest und der Magnet beweglich, so wird dieser abgelenkt. In der Regel ist der Magnet an einem Kokon- oder Quarzfaden aufgehängt. Seine Nullstellung ergibt sich aus der Einstellung im magnetischen Feld der Erde (oder im Felde eines Richtmagnetes) und der Gleichgewichtslage des Aufhängefadens.

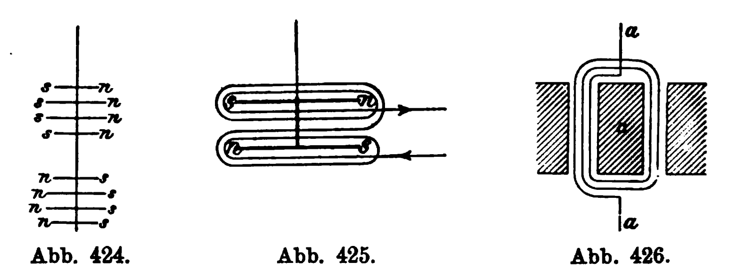


Abb. 424. Abb. 425. Abb. 426.

Befindet sich der Magnet in einem homogenen Felde, und sind die Ausschläge sehr klein, so sind die Ausschläge dem Strom proportional. Um die erste Bedingung zu erfüllen, macht man die Nadel sehr kurz und verwendet dafür mehrere (Abb. 424). Um die zweite Bedingung zu erfüllen, wendet man Spiegelablesung und weit entfernte Skala an, so daß man trotz sehr kleiner Drehungswinkel große Ausschläge auf der Skala erhält. Bei Instrumenten, die besonders empfindlich sein sollen, ist die Richtkraft des Erdmagnetismus schon zu stark. Der Magnet selbst darf aber nicht schwach sein, weil sonst auch die ablenkende Kraft schwach ist. Man verwendet daher *astatische* Nadelpaare (Abb. 425 und 424) und umgibt sie mit Spulen von entgegengesetzter Stromrichtung, so daß sich die ablenkenden Kräfte addieren. Statt der Verwen-

dung eines astatischen Nadelpaares kann man die Empfindlichkeit auch dadurch erhöhen, daß man das ganze Instrument mit einem Eisenzylinder umgibt, der den größten Teil des Erdmagnetismus abschirmt (Abb. 119, S. 148), so daß die Nullage eventuell nur durch den Aufhängefaden bestimmt wird (Panzergalvanometer).

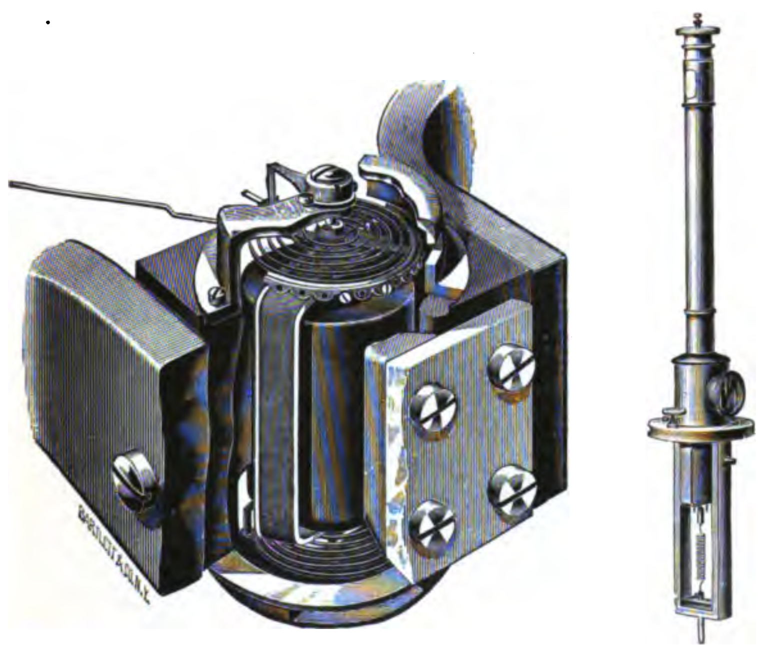


Abb. 427. Drehspuleninstrument der Weston Co.

Abb. 428. System des Drehspulengalvanometers von Siemens & Halske.

Ist umgekehrt der Dauermagnet fest und der Stromleiter beweglich (System Deprez & D'Arsonval), so erhält man die sogenannten Drehspuleninstrumente (Abb. 426 bis 428). Die Anordnung dieser Instrumente ist ähnlich der einer zweipoligen Gleichstrommaschine mit einer Ankerspule. Zwischen zwei Polen eines Dauermagnetes (Abb. 426) befindet sich ein fester Eisenzylinder *c*. In dem Luftzwischenraum zwischen beiden befindet sich eine Ankerspule, deren Aufhängedrähte zugleich als Stromzuführung *a* dienen, wenn das Instrument als Spiegelinstrument ausgeführt wird. Abb. 428 zeigt das aus dem Dauermagnet herausgehobene System eines solchen Spiegelinstrumentes (Bauart Siemens & Halske). Bei den Zeigerinstrumenten ist die Ankerspule auf ein leichtes Aluminium- oder Kupferrähmchen aufgewickelt, das mittels zweier Spitzen

in Achat- oder Saphirsteinen gelagert ist. Die Nullage wird durch zwei Spiralfedern bestimmt, die gleichzeitig als Stromzuführung dienen. (In Abb. 427 ist ein Teil des vorderen Polschuhes weggeschnitten um das Rähmchen sichtbar zu machen.) Diese Bauart wurde von Weston eingeführt. Der Vorteil dieser Instrumente liegt in ihrer hohen Empfindlichkeit, weil das magnetische Feld in dem Luftzwischenraum sehr stark ist, und in ihrer starken durch das genannte Metallrähmchen bewirkten Dämpfung bei geringer Trägheit.

258. Dynamometer.

Das Wesen dieser von W. Weber angegebenen Instrumente besteht aus zwei zueinander senkrecht stehenden Stromkreisen (Abb. 429). Werden sie in der Richtung der Pfeile vom Strome durchflossen, so besteht Anziehung zwischen den gleichgerichteten und Abstoßung zwischen den entgegengesetzt gerichteten Seiten, d. h. die Stromflächen suchen sich parallel zu stellen. Die Kraft, mit der dies geschieht, ist proportional dem Produkte der Stromstärken in beiden Kreisen. Werden beide von demselben Strome durchflossen, so ist sie proportional dem Quadrate der Stromstärke, also proportional dem in § 207 definierten Ausdruck für den effektiven Wert eines Stromes. Instrumente dieser Art zeigen also für Gleich- und Wechselstrom, unabhängig von Periodenzahl und Wellenform, den effektiven Wert an.

Abb. 429.

Bei den Torsionsdynamometern (Abb. 430) ist der eine Stromkreis mittels eines Kokonfadens und einer Spiralfeder an dem drehbaren Knopfe K aufgehängt. Stromkreis und Knopf sind mit Zeigern versehen. In der Ruhelage stehen diese auf dem Nullpunkt der Skala und die bewegliche Spule steht senkrecht zu zwei anderen Spulen A und B, wovon die eine aus mehreren Windungen eines dünneren Drahtes (für schwächere Ströme), die andere aus dickerem Drahte (für stärkere Ströme) besteht. Die Enden der drehbaren Windung tauchen in zwei Quecksilbernäpfchen c und d. Wird nun der zu messende Strom mit den Klemmen 1 und 2 verbunden, so geht er durch die feste Spule B und durch die bewegliche Spule. Wird der Strom mit 3 und 2 verbunden, so geht er durch die

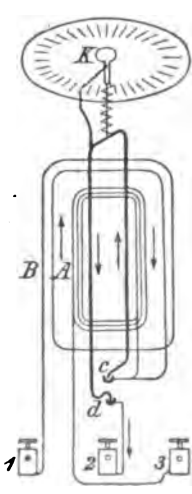


Abb. 430.

feste Spule *A* und die bewegliche Spule. Wird nun die bewegliche Spule durch den Strom abgelenkt, so dreht man sie mittels des Knopfes *K* wieder auf Null zurück. Der Torsionswinkel, der vom Zeiger des Knopfes angegeben wird, ist proportional dem Quadrate der Stromstärke. In der Regel hat man eine Tabelle, die zu jedem Torsionswinkel die Stromstärke direkt angibt.

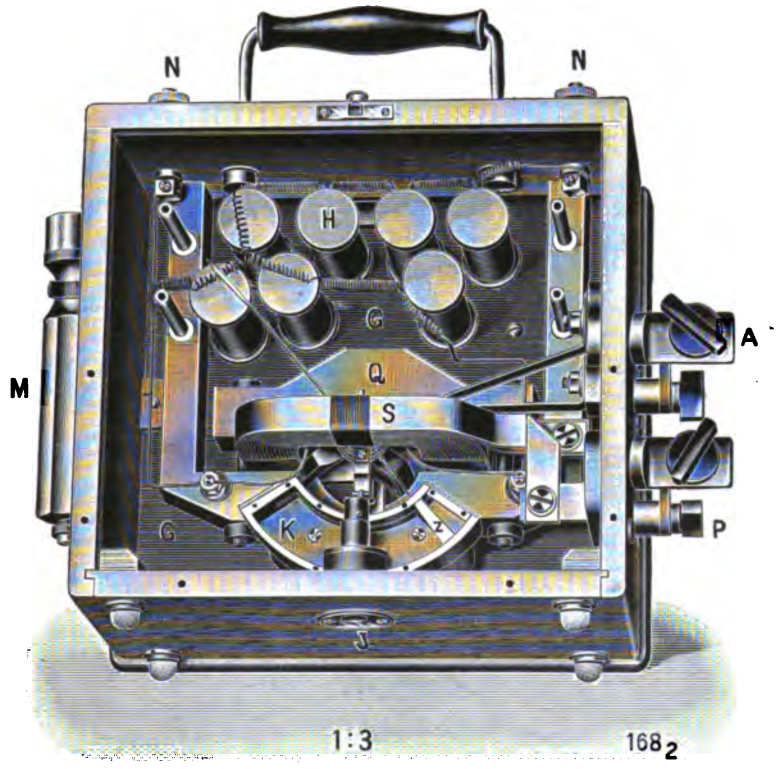


Abb. 431. Dynamometrisches Zeigerinstrument von Hartmann & Braun.

Die Anwendung des Torsionsprinzipes ist nur bei genügend konstantem Strom möglich. Daher sind diese Instrumente selten in Gebrauch, und an ihre Stelle sind Zeigerinstrumente getreten, wo die bewegliche Spule in Spitzen zwischen Steinen gelagert ist und die Stromzuführung durch die Spiralfedern, die die Gegenkraft bilden, geschieht. Abb. 431 und 434 zeigen solche Ausführungen. Man sieht die drehbare Spule *B* innerhalb der festen Spule *S*. An der Achse ist ein Zeiger und ein Dämpfflügel *Z* befestigt, der sich bei Abb. 431 in der Luftkammer *K*, von der der Deckel abgenommen ist, bewegt. Der Zeiger bewegt sich über

einer Skala, die bei diesen Instrumenten natürlich empirisch geeicht sein muß.

Da der Strom zur beweglichen Spule durch die Spiralfedern gehen muß, ist diese Ausführung zunächst nur für kleine Stromstärken sowie für Spannungsmesser (§ 265) und Leistungsmesser anwendbar. Daher wurde vom Verfasser für größere Stromstärken die in Abb. 432 angegebene Nebenschlußschaltung in Anwendung gebracht, wobei durch die bewegliche Spule nur der Zweigstrom i' hindurchgeht, während der übrige Strom durch den Widerstand W und die feste Spule geht. Damit die Angaben bei Gleichstrom und Wechselstrom dieselben sind, muß in beiden Zweigen der induktive Widerstand gegen den Ohmschen verschwindend klein sein. Daher ist der beweglichen Spule der induktionsfreie Widerstand w' vorgeschaltet. Oder die induktiven Widerstände müssen im selben Verhältnis zueinander stehen wie die Ohmschen Widerstände. Bei hohen Periodenzahlen (über 300) trifft das nicht mehr zu und daher sind diese Instrumente dann nicht mehr ganz richtig. Der Stromkreis des Nebenschlusses hat ungefähr denselben Temperaturkoeffizient wie der Widerstand W, so daß die Angaben des Instrumentes von der Temperatur unabhängig sind.[1]) Abb. 433 zeigt die Schaltung dieser

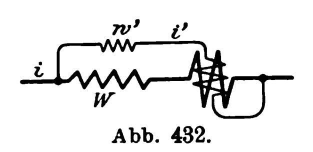


Abb. 432.

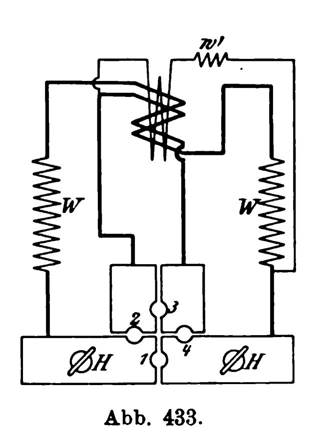
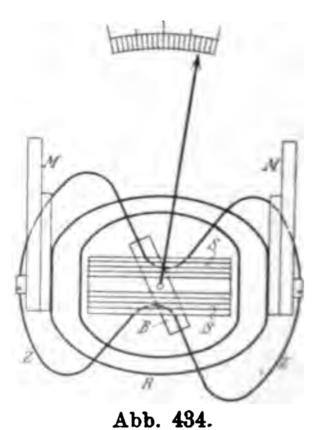


Abb. 433.


Abb. 434.

Strommesser für zwei Meßbereiche. Ist das Loch 3 zugestöpselt, so sind beide festen Spulen hintereinandergeschaltet. Ist 2 und 4

[1]) Über eine Vergleichung dieser Strommesser bei Gleich- und Wechselstrom mittels der optisch-pyrometrischen Methode in der Phys.-techn. Reichsanstalt siehe Orlich, Zeitschr. für Instrumentenkunde, 1904, März, S. 69.

zugestöpselt, so sind die beiden Spulen parallel geschaltet. Das Loch 1 dient zum Kurzschließen des Instrumentes.

Eine große Schwierigkeit der dynamometrischen Instrumente liegt darin, daß das von der festen Spule erzeugte magnetische Feld ziemlich schwach ist und daher zur Erreichung des nötigen Drehmomentes bedeutend mehr Amperewindungen für die drehbare Spule erforderlich sind als bei den Drehspuleninstrumenten für Gleichstrom (§ 257). Daher sind bei den von der Allgemeinen

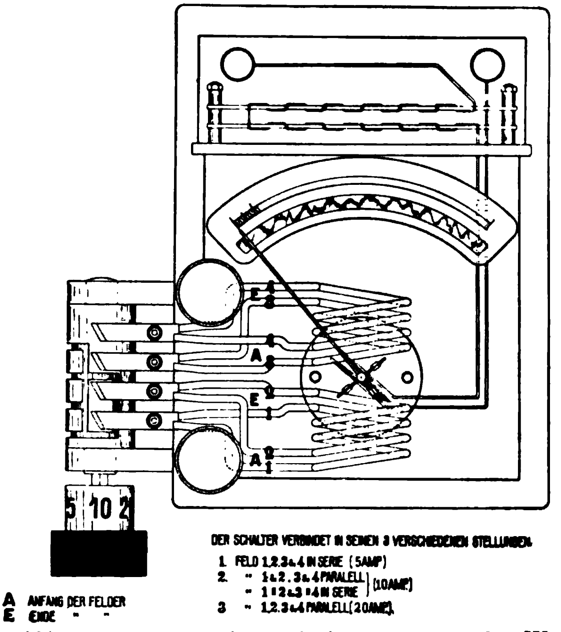


Abb. 434a. Dynamometrischer Leistungsmesser der Weston Co.

Elektrizitätsgesellschaft nach Angaben des Verfassers hergestellten Instrumenten[1]) die festen Spulen S (Abb. 434) mit einem geschlossenen Ring R aus unterteilten Eisen umgeben, wodurch das Feld stärker wird. Das Innere der Spulen darf kein Eisen enthalten, weil sonst Fehler durch Hysterese entstehen würden. Bei dieser Anordnung aber geht bloß der Rückweg der Kraftlinien durch Eisen, während sich die bewegliche Spule B in einem eisenfreien Felde befindet. Die Übereinstimmung zwischen Gleich- und Wechselstrom ist daher ebensogut als wenn der Eisenmantel nicht vorhanden ist. Die dadurch erzielte Verstärkung des Feldes ist aber besonders für die Strommesser von Vorteil, weil hier nur der Nebenschlußstrom i' für

[1]) ETZ 1900, S. 399. DRP. Nr. 111124, 1899.

die drehbare Spule zur Verfügung steht. Gleichzeitig bildet der Eisenmantel einen Schutz des Inneren gegen die Dauermagnete *M*, zwischen deren Polen sich der Aluminiumdämpferflügel *Z* bewegt.

Abb. 434a zeigt ein dynamometrisches Instrument der Weston Co., bei dem die feste Spule aus vier getrennten Windungen besteht, die durch den Walzenschalter in drei verschiedene Schaltungen gebracht werden können. Diese Schaltung ist aber nur bei Leistungsmessern möglich.

Über die Anwendung der dynamometrischen Instrumente als Leistungsmesser siehe § 269.

259. Stromwagen.

Das Prinzip dieser von W. Thomson angegebenen Instrumente ist aus Abb. 435 ersichtlich.

Zwei Paare von kreisförmigen Stromleitern *A*, *B* und *C*, *D* befinden sich in paralleler Lage übereinander. Werden sie in der Richtung der Pfeile von Strömen durchflossen, so ziehen sich *C* und *D* an, während sich *A* und *B* abstoßen. Befestigt man nun die beiden oberen, *B* und *D*, an einem Wagebalken, so erhält man einen Ausschlag, der durch ein Laufgewicht wieder kompensiert werden kann. Man hat also dasselbe so lange auf dem Wagebalken zu verschieben, bis er sich im Gleichgewicht befindet; die Stromstärke, die eben herrscht, wird an der Stelle, wo das Laufgewicht steht, auf einer empirisch geeichten Teilung abgelesen. Die Wirkung ist bei Gleich- und Wechselstrom dieselbe. Wegen der Schwierigkeit der Stromzuführung zum beweglichen Teil und wegen seiner großen Trägheit kommen die Stromwagen heute kaum mehr zur Anwendung.

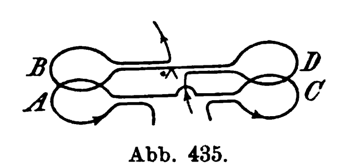


Abb. 435.

260. Hitzdraht-Instrumente.

Sendet man einen Strom durch einen Draht, so dehnt sich dieser proportional der in ihm entwickelten Jouleschen Wärme aus. Da letztere durch $A = \alpha J^2 w t$ gegeben ist, so ist die Längenausdehnung proportional dem Quadrate der Stromstärke. Diese Instrumente zeigen also wie die dynamometrischen bei Gleich- und Wechselstrom den effektiven Wert unabhängig von Periodenzahl und Wellenform an. Es handelt sich nun bloß darum, die Längenausdehnung auf einen Zeiger zu übertragen. Bei den Instrumenten

von Hartmann & Braun geschieht dies auf die in Abb. 436 dargestellte Art. AB ist der vom Strome durchflossene Draht. An diesen ist bei C ein anderer angelötet, der bei D befestigt ist. An diesen wiederum ist ein dritter bei F angelötet, der einmal um das Röllchen H geschlungen und mit dem anderen Ende an der Feder G befestigt ist. Letztere befindet sich im gespannten Zustande und bewegt sich daher nach links, wenn sich der Draht AB infolge der Erwärmung ausdehnt. Dabei muß sich das Röllchen H und der an ihm befestigte Zeiger Z drehen, der auf einer empirisch geeichten Skala einspielt.

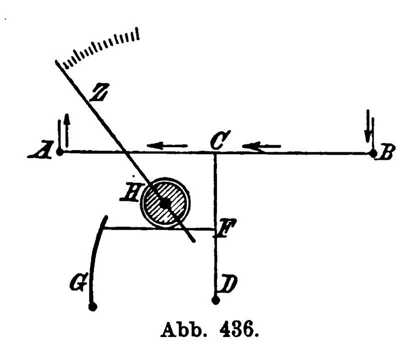


Abb. 436.

Da die im Draht entwickelte Temperatur mit der Zeit wächst, so ist die Ausdehnung des Drahtes erst von dem Augenblick an eine bestimmte, wo die ausgestrahlte Wärme gleich der entwickelten ist. Erst von da an behält der Draht eine bestimmte, dem Quadrate der Stromstärke proportionale Temperatur und daher auch eine bestimmte Ausdehnung. Damit nun diese Zeit nicht zu lange dauert, muß die Oberfläche des Drahtes sehr groß sein gegenüber seinem Querschnitt; es kann also nur ein sehr dünner Draht verwendet werden. Dadurch ist aber auch ein großer Widerstand bedingt, so daß diese Anordnung zunächst nur für sehr kleine Stromstärken (Spannungsmesser) anwendbar ist.

Um als Strommesser für stärkere Ströme geeignet zu sein, muß man den Hitzdraht AB als Nebenschluß zu einem Widerstande W (Abb. 437) legen, durch den der zu messende Strom fließt. Da aber die Potentialdifferenz zwischen den Punkten PP', an welche der Nebenschluß angelegt ist, nur klein ist, so würde der Widerstand des Hitzdrahtes AB zu groß sein, um genügend Strom zu seiner Erwärmung durchzulassen. Daher wird der Nebenschlußstrom durch ein sehr dünnes, lockeres Silberband dem Hitzdrahte in der Mitte zugeführt, so daß er sich hier teilt und dann in der Schiene MN wieder vereinigt. Durch die Parallelschaltung des Hitzdrahtes von der Mitte aus wird dem Strome nur der vierte Teil des Widerstandes geboten. Durch mehrmalige derartige Unterteilung des

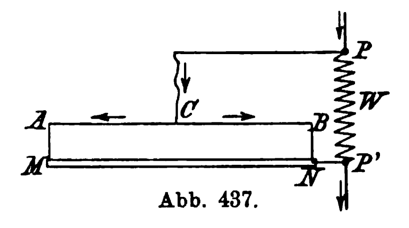


Abb. 437.

Hitzdrahtes wie in Abb. 438 wird der Widerstand noch weiter vermindert. Trotzdem muß für einen Strommesser auch noch ein dicker Draht als Hitzdraht verwendet werden, um den Widerstand genügend klein zu erhalten. Daher dauert es einige Zeit (bis zu 8 Sekunden) bis ein stationärer Wärmezustand erreicht ist. Rasche Stromschwankungen werden daher von diesen Strommessern überhaupt nicht angezeigt. Bei den Instrumenten für sehr kleine Stromstärken (Spannungsmesser) kann zwar der Draht so dünn gewählt werden, daß der stationäre Zustand schon nach 1 Sekunde erreicht wird; dafür treten aber leicht dauernde Dehnungen des Drahtes ein, wodurch die Eichung unrichtig wird. Nach längerer Einschaltung ändern sich die Angaben auch dadurch, daß sich die Platte, welche den Hitzdraht trägt, ausdehnt, und dadurch der Draht eine andere Spannung erhält. Die Hitzdrahtinstrumente aller Art sind daher hinsichtlich einer bleibenden Eichung die unzuverlässigsten von allen gebräuchlichen Meßinstrumenten. Man kann sich auf ihre Angaben nur verlassen, wenn man sie vor der Anwendung mit Gleichstrom prüft, bei stärkerer Beanspruchung auch nachher. Der Stromverbrauch bei den Spannungsmessern (0,2 Amp.) und der Spannungsabfall bei den Strommessern (0,25 Volt) und daher ist der Wattverbrauch größer als bei anderen Systemen.



Abb. 438. Hitzdraht-Strommesser von Hartmann & Braun.

261. Induktionsinstrumente.

Auf elektrodynamischer Schirmwirkung beruhende Induktionsinstrumente, System Benischke. Abb. 439 zeigt die Anwendung des in § 157 besprochenen Prinzipes auf Meßinstrumente[1]) nach Ausführung der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft. Auf die Aluminiumscheibe, die das Drehmoment erfährt, wirkt auch der aus der Abbildung ersichtliche Dauermagnet, der die Dämpfung bewirkt. Infolge des hohen induktiven Widerstandes der Stromwickelung bei sehr kleinen Stromstärken bedürfen sie als Spannungsmesser bis 250 Volt keines Vorschaltwiderstandes. Ist i der induzie-

[1]) DRP. Nr. 84871, 1895. ETZ 1899, S. 82.

rende Strom in der Magnetspule, i_1 der induzierte Strom in Schirm T (Abb. 205), i_2 der induzierte Strom in der Scheibe S, so ist $i_1 = c_1 i$, $i_2 = c_2 i$, wenn $c_1\, c_2$ Proportionalitätsfaktoren sind. Da nun das Drehmoment auf der Anziehung zwischen i_1 und i_2 beruht, so ist es proportional $c_1\, c_2 \int i^2\, dt$. Diese Instrumente geben also den effektiven Wert an.

Auf phasenverschobenen Feldern beruhende Induktionsinstrumente (Drehfeldinstrumente). Abb. 440 zeigt die Einrichtung derselben, die von **Siemens & Halske**[1]) unter dem Namen **Ferraris-Instrumente** fabri-

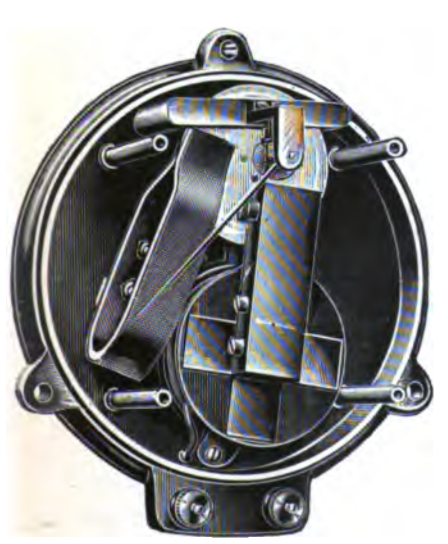


Abb. 439. Induktionsinstrument (Strom- oder Spannungsmesser) der Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft.

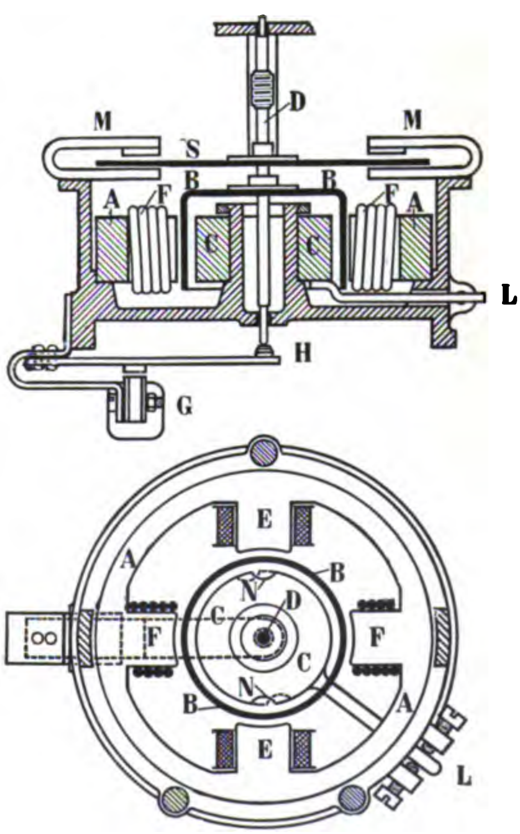


Abb. 440. Induktionsinstrumente von Siemens & Halske.

ziert werden, und auf dem in § 253 II erläuterten Prinzip der Phasenverschiebung durch Brückenschaltung beruhen. Der drehbare Teil ist die Aluminiumtrommel B zwischen den vier Polen E, F. Die Felder in E sind gegen die in F um nahezu 90^0 in der Phase

[1]) **Schrottke**, ETZ 1901, S. 657.

verschoben, so daß die Anordnung einem vierpoligen Zweiphasenmotor entspricht. Außerdem ist eine besondere Dämpfscheibe *S*, auf welche die Dauermagnete *M* wirken, erforderlich.

Im Wesen aller Induktionsinstrumente liegt es, daß sie von der Temperatur abhängig sind, weil sich der spezifische Widerstand der induzierten Scheibe oder Trommel mit der Temperatur ändert. Die Abhängigkeit ist aber keine proportionale, sondern erheblich geringer, weil der Einfluß auf den Widerstand der Scheibe oder Trommel durch andere unmittelbare Einflüsse auf das Drehmoment zum Teil kompensiert wird. Da die induzierten Ströme auch von der Periodenzahl abhängen, so sind die Angaben dieser Instrumente auch davon abhängig. Da aber auch schon das in den Eisenkernen der Spulen erzeugte magnetische Feld von der Periodenzahl abhängt, so ist die Abhängigkeit je nach der Art und dem Verwendungszweck verschieden. So zeigt sich, daß bei der Eichung nach Stromstärken die Abhängigkeit von der Periodenzahl erheblich größer ist als bei der Eichung nach Spannungen.

Die Abhängigkeit von der Wellenform ist gering[1]) für solche Wellenformen, deren positive und negative Hälften gleich sind. Bei Wellenformen von der durch Abb. 383 (S. 480) dargestellten Art, wo auch ein Gleichstrom darin enthalten ist, sind Induktionsinstrumente unbrauchbar, weil sie auf Gleichstrom überhaupt nicht reagieren.

Über die Induktionsinstrumente als Leistungsmesser siehe § 270.

262. Elektromagnetische Instrumente.

Hierunter gehören alle Instrumente, die auf der Anziehung oder Abstoßung eines weichen Eisenstückes beruhen.

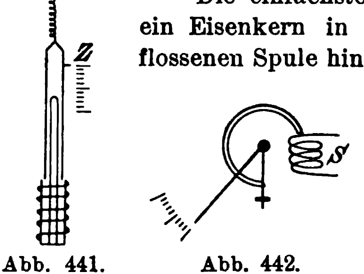


Abb. 441. Abb. 442.

Die einfachste und älteste Art beruht darauf, daß ein Eisenkern in das Innere einer vom Strome durchflossenen Spule hineingezogen wird. Bei dem Feder-Stromzeiger von Kohlrausch (Abb. 441) besteht der Eisenkern aus einer Röhre von dünnem Eisenblech, der an einer Spiralfeder hängt. An der Röhre befindet sich ein Zeiger *Z*, der auf einer Skala einspielt. In den älteren Instrumenten von Siemens & Halske (Abb. 442) hat der Eisenkern die Form eines Kreisbogens, der in das Solenoid *S* hineinragt. Der Anziehung

[1]) ETZ 1901, S. 301.

wird durch ein Gegengewichtchen oder durch eine Spiralfeder das Gleichgewicht gehalten. Diese Instrumente haben infolge des langen Eisenkörpers beträchtlichen Dauermagnetismus. Für Gleichstrom hat das zur Folge, daß die Angaben bei fallendem Strom zu hoch sind, weil der von der vorhergehenden stärkeren Magnetisierung verbliebene Magnetismus noch wirkt. Für Wechselstrom hat das eine starke Abhängigkeit von der Wellenform des Stromes und von der Periodenzahl zur Folge.[1]) Nach § 102 ist der Dauermagnetismus um so kleiner, je kürzer das Eisenstück ist. Daher wird in den neueren Instrumenten von Siemens & Halske ein rundes Stück Eisenblech (Abb. 421) angewendet, das in der Nullstellung über der stromführenden Spule steht und beim größten Ausschlag ein Stück in diese hineingezogen ist. An der Achse befindet sich der in § 255 beschriebene Dämpferkolben.

Eine andere Art elektromagnetischer Instrumente beruht auf der gleichartigen Magnetisierung zweier Eisenstücke im Innern eines Solenoides. Abb. 443 zeigt dieses Prinzip in der Anordnung von Drexler. F und F' sind die beiden Eisenstücke, von denen das erstere fest, das andere aber um die Achse A, die noch den Zeiger Z trägt, drehbar ist. Durch den Strom werden sie so magnetisiert, daß die gleichnamigen Enden nebeneinander liegen und F' infolgedessen abgestoßen wird.

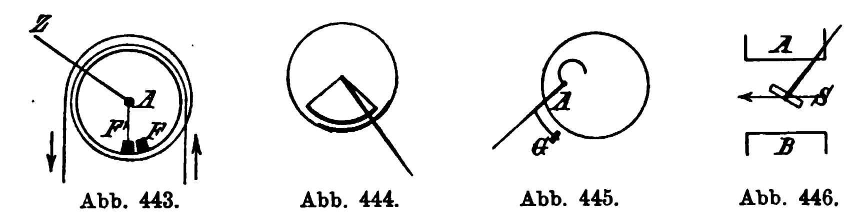


Abb. 443. Abb. 444. Abb. 445. Abb. 446.

Bei dem System Uppenborn befinden sich im Innern der Spule zwei konaxiale Zylindermantelstücke aus Eisenblech. Das innere ist beweglich und steht in der Nullstellung gegen das andere etwas nach rechts verschoben (Abb. 444). Durch den Strom werden sie so magnetisiert, daß die auf derselben Seite liegenden Kanten gleichnamig sind, so daß eine noch weitere Verschiebung gegeneinander stattfindet. Eine ähnliche Ausführung haben die neueren Instrumente der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft.

Bei dem System Hummel befindet sich im Innern der Spule ein zylindrisches Eisenblech, das um die Achse A drehbar ist (Abb. 445). Das magnetische Feld der Spule ist nun bestrebt, das

[1]) ETZ 1901, S. 301.

Eisenblech näher an die innere Wand der Spule zu ziehen, was gelingt, weil die Achse *A* exzentrisch ist.

Eine andere Art von solchen Instrumenten beruht auf dem Bestreben länglicher Eisenkörper, sich mit ihrer Längsachse in die Richtung der Kraftlinien zu stellen. Ist *AB* der Querschnitt einer Spule (Abb. 446), so haben die Kraftlinien die durch den Pfeil angedeutete Richtung. Das Eisenstück *S* sucht sich nun in diese Richtung einzustellen.

Bei diesen Instrumenten kann als Gegenkraft entweder das Gewicht des Eisenstückes oder des Zeigers oder beider zusammen, oder mit einer Spiralfeder angewendet werden, wovon natürlich der Verlauf der Skala abhängt. Soll eine Spiralfeder allein wirken, so muß das Gewicht des Eisenstückes und des Zeigers durch Gegengewichte ausbalanciert werden.

263. Elektrostatische Spannungsmesser.

Die einfachsten Mittel zur Messung elektrischer Spannungen (Potentialdifferenzen) sind das in § 25 beschriebene Elektroskop und das Elektrometer (System Braun). Viel genauer ist das Quadrantenelektrometer (Thomson). Es besteht im wesentlichen aus einer flachen, zylindrischen Metallbüchse, die durch zwei aufeinander senkrechte Achsenschnitte in 4 Quadranten geteilt ist (Abb. 447). In der Mitte derselben schwebt an einem feinen Drahte eine dünne Platte aus Aluminium in Form einer Lemniskate. Je zwei Quadranten *I* und *III*, *II* und *IV*, also die gegenüberliegenden, sind miteinander durch Drähte verbunden. Die Lemniskate wird mittels ihres Aufhängedrahtes mit einer Elektrizitätsquelle von konstanter Spannung verbunden und erhält so eine konstante Ladung. Verbindet man nun die Quadrantenpaare mit zwei Punkten, deren Potentialdifferenz oder Spannung gemessen werden soll, so erhält das eine eine positive, das andere eine negative Ladung. Die Lemniskate wird also von dem einen angezogen, von dem anderen abgestoßen und erfährt so eine Drehung, bis die Torsion des Aufhängedrahtes den elektrischen Kräften das Gleichgewicht hält. Das ist die gewöhnliche Art der Verwendung des Qadrantenelektrometers.

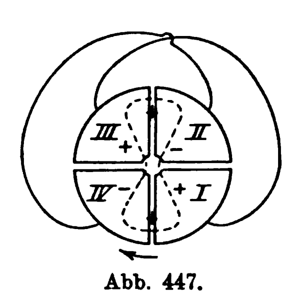


Abb. 447.

Behandelt man das Problem ganz allgemein mathematisch und bezeichnet mit u die Potentialdifferenz der Lemniskate gegen das Gehäuse, mit u_1 und u_2 die Potentialdifferenz der beiden Quadranten-

paare gegen das Gehäuse, so ist der Drehungswinkel α der Lemniskate

$$\alpha = c\,(u_1 - u_2)\left[u - \frac{u_1 + u_2}{2}\right],$$

wobei c ein Proportionalitätsfaktor ist.

Daraus ergeben sich folgende 2 Arten der Verwendung dieses Instrumentes.

1. Ist u sehr groß gegenüber $u_1 + u_2$, so kann man schreiben

$$\alpha = cu\,(u_1 - u_2) = c'\,(u_1 - u_2) = c'E.$$

Unter dieser Voraussetzung ist also der Ausschlagswinkel proportional der Potentialdifferenz jener Punkte, die mit den Quadrantenpaaren verbunden sind. Da der neue Proportionalitätsfaktor $c' = cu$ ist, so sind die Ausschlagswinkel um so größer und das Instrument ist um so empfindlicher, je größer das Potential u der Lemniskate ist. In allen Fällen aber muß es so groß sein, daß $u_1 + u_2$ dagegen klein ist. Man genügt dieser Bedingung, wenn man die Lemniskate mit einem Pol einer Zambonischen Säule (§ 72) oder einer Akkumulatorenbatterie verbindet, deren anderer mit dem Gehäuse verbunden ist. Da die Quadranten manchmal schon vor der Messung eine kleine Ladung besitzen, so muß man, um den Nullpunkt der Einstellung zu finden, beide Paare miteinander, oder was auf dasselbe hinauskommt, mit der Erde verbinden.

2. Eine zweite Art der Anwendung erhält man, wenn $u = u_1$ ist. Dies ist der Fall, wenn man die Lemniskate mit einem Quadrantenpaar verbindet. Dann ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung

$$\alpha = c\,(u_1 - u_2)\frac{u_1 - u_2}{2} = c'\,(u_1 - u_2)^2 = c'E^2.$$

Der Ausschlagswinkel ist jetzt proportional dem Quadrate der Potentialdifferenz; es ändert sich also der Sinn der Drehung nicht, wenn die Potentialdifferenz E ihr Vorzeichen wechselt, da das Quadrat immer positiv ist. Man kann also bei dieser Schaltung die Spannungsdifferenzen von Wechselströmen messen. Zur Eliminierung des Proportionalitätsfaktors kann man eine konstante EMK E_1 verwenden, für welche $\alpha_1 = c'E_1^2$ ist. Dann ist also

$$E = E_1\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}.$$

Die Wechselstromspannung E ist durch die in § 207 gegebene Definition bestimmt.

Der Vorteil des Quadrantenelektrometers gegenüber den anderen Instrumenten zur Spannungsmessung liegt darin, daß kein Strom

verbraucht wird. Man ist also gänzlich unabhängig von der Widerstandsänderung der Stromwindungen infolge Joulescher Wärme. Die Messung mit diesem Apparat ist freilich schwieriger und umständlicher, als mit jedem anderen, so daß es nur für Laboratoriumsmessungen in Betracht kommt. Ein weiterer Übelstand ist der, daß bei sehr empfindlichen Instrumenten die obigen Gleichungen nicht genau stimmen, weil noch Nebenwirkungen dazu treten. Diese sind bei Gleichstrom kleine EMKe an den Stellen, wo verschiedene Metalle zur Berührung kommen (Lemniskate, Aufhängedraht, Schraube) so daß die Lemniskate von vornherein eine Ladung erhält. Bei Wechselstrom kann durch die Ausstrahlung aus den scharfen Kanten ein Drehmoment hinzukommen, daß vom größten Wert (Scheitelwert) abhängt, also ein von der Wellenform abhängiges Drehmoment.[1])

264. Statische Spannungsmesser für hohe Spannungen.

Der Umstand, daß die statischen Instrumente keinen Strom verbrauchen, oder nur so viel, als ihrem Kapazitätswiderstand entspricht, ferner die theoretische Gleichheit der Angaben bei Wechselstrom und Gleichstrom, haben viel Bemühungen gezeitigt, sie als technische Spannungszeiger auszugestalten. Abb. 448 zeigt ein solches Instrument der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft für 6000 Volt. Praktisch aber haben sie so viele Nachteile, daß sie fast nur mehr als Isolationsprüfer oder im Laboratorium unter besonderen Vorsichtsmaßregeln zur Anwendung kommen. Aus dem oben erwähnten Umstand, daß nämlich auch der Scheitelwert von Einfluß ist, sowie aus rückständigen Ladungen in den Isoliermaterialien ergeben sich bei höheren Spannungen oft beträchtliche Abweichungen zwischen Gleich- und Wechselstrom.[2]) Abb. 449 zeigt diese Abweichungen bei einem Instrument für 6000 Volt nach Messungen der Physikalisch-technischen Reichsanstalt.



Abb. 448. Statisches Voltmeter der Allgemein. Elektrizitäts-Gesellschaft.

[1]) Näheres über die Messungen mittels des Quadrantenelektrometers bei Orlich, Zeitschr. f. Instrumentenkunde. April 1903, S. 97.

[2]) Benischke, Physikal. Zeitschr. 7, S. 525, 1906.

Ihr größter Übelstand liegt aber in der leichten Beeinflussung durch äußere Ladungen und in der leichten Zerstörbarkeit durch atmosphärische Entladungen.

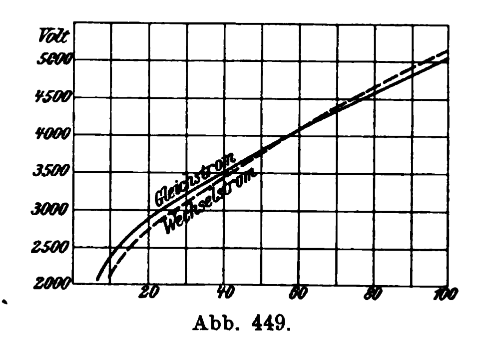


Abb. 449.

Infolge des äußerst geringen Stromverbrauches können die statischen Instrumente im Nebenschluß zu einem Kondensator, der mit anderen hintereinandergeschaltet ist, verwendet werden.[1]) So genügt zur Messung der Spannung zwischen *AB* (Abb. 450) ein Voltmeter *V*, dessen Meßbereich nur etwa den vierten Teil der Spannung zwischen *AB* zu umfassen braucht.

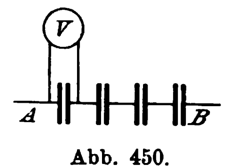


Abb. 450.

265. Galvanometrische Spannungsmesser.

Alle Strommesser für sehr kleine Stromstärken können zur Spannungsmessung verwendet werden gemäß dem Ohmschen Gesetze $E = JW$, wenn sie zwischen den Klemmen *AB* (Abb. 451) eingeschaltet werden und der Widerstand *W* konstant ist. Zur praktischen Anwendung wird natürlich die Eichung gleich in Spannungseinheiten (Volt) statt in Stromeinheiten ausgeführt. Der Widerstand *W* braucht kein Ohmscher zu sein, sondern kann auch ein induktiver sein. Da er konstant sein muß, darf er keinen merklichen Temperaturkoeffizienten haben, sonst sind die Angaben von der Temperatur abhängig. Daher soll der Widerstand der Kupferdrahtwickelung selbst nur einen kleinen Teil des gesamten Widerstandes ausmachen und der Vorschaltwiderstand aus Konstanten oder Manganin oder dergl. bestehen. Ein induktiver Widerstand hat natürlich keinen Temperaturkoeffizienten, dafür ist er aber von der Periodenzahl abhängig. Doch kann dieser Einfluß zum Teil dadurch kompensiert werden, daß das Drehmoment des Instrumentes im entgegengesetzten Sinne von der Periodenzahl abhängt, wie bei den Induktionsinstrumenten (§ 261).

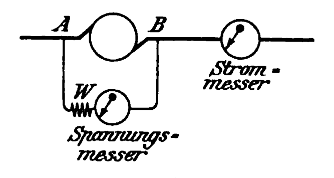


Abb. 451.

[1]) Peuckert, ETZ 1898, S. 657, Benischke, ETZ 1901, S. 265.

Der Widerstand eines Spannungsmessers soll möglichst klein sein, weil dann auch der Wattverbrauch und die Erwärmung des Instrumentes oder seines Vorschallwiderstandes klein ist. Verdoppelt man den Widerstand eines Spannungsmessers, so reicht das Instrument für einen doppelt so großen Meßbereich aus, aber auch die Wärmeentwickelung ist die doppelte. Daher verwendet man bei sehr hohen Spannungen kleine Transformatoren (Meßtransformatoren, Spannungstransformatoren), deren Hochspannungswickelung an die zu messende Spannung angeschlossen wird, während ein Spannungsmesser für niedrige Spannung an die sekundäre Wickelung angeschlossen ist. Ist der Transformator nicht zu klein und für ein bestimmtes Übersetzungsverhältnis gebaut, so stehen die Spannungen im selben Verhältnis wie das Übersetzungsverhältnis. Andernfalls muß das Instrument samt dem Transformator empirisch geeicht werden.

266. Indirekte Spannungsmessung.

Die indirekte Spannungsmessung, die im allgemeinen nur zur Eichung und Kontrolle von Instrumenten angewendet wird, besteht in der Vergleichung einer gegebenen Spannung mit den in § 71 besprochenen Normalelementen. Da ihre EMK nur dann konstant und gleich der Klemmenspannung ist, wenn aus dem Element kein Strom entnommen wird, und keiner hineingeht, so darf die Vergleichung nur mittels des Quadrantenelektrometers oder mittels des Kompensationsverfahrens ausgeführt werden.

Das Kompensationsverfahren besteht in folgendem. Man schließt die zu messende Spannung E (in Abb. 452 ist es eine Batterie) durch einen bekannten veränderlichen Widerstand W (zwischen C und D). An zwei Stellen F und H desselben legt man die Drähte an, die mit dem Normalelement E' und einem empfindlichen Galvanometer einen Stromkreis bilden. E und E' sind so geschaltet, daß die gleichnamigen Pole auf derselben Seite liegen, so daß sie in dem Normalelement E' einander entgegen wirken. Durch Verschieben der Kontakte F und H kann man den dazwischen liegenden Widerstand w so verändern, daß die Klemmenspannung zwischen diesen Punkten gleich ist der EMK E' des Normalelementes. Dann geht kein Strom durch das Galvanometer — sein Ausschlag ist null. Es verhält sich nun

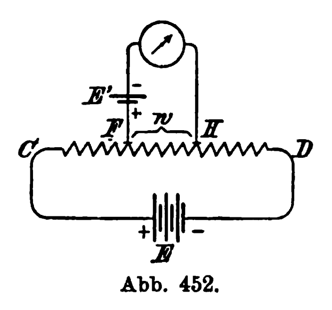


Abb. 452.

W zu w wie die zu messende EMK zu der des Normalelementes E', also

$$\frac{E}{E'} = \frac{W}{w}.$$

Hat man einen Spannungsmesser zu eichen, so schließt man ihn an die Punkte CD an. Abb. 453 zeigt die Einrichtung des für dieses Verfahren besonders zweckmäßigen Feußnerschen Kompensationsapparates. Hierbei besteht der Widerstand W aus $W_1 + W_2 + W_3 + W_4$. Die Schalthebel k_1 und k_2 stellen die veränderlichen Kontakte F und H vor. Außerdem ist noch der Widerstand W_3 durch Stöpselung veränderlich, so daß man den zwischen F und H liegenden Widerstand w in weiten Grenzen verändern kann. Cl bedeutet das Normalelement. Um zu verhindern, daß durch letzteres ein zu starker Strom geht, bevor die Kontakte k_1 k_2 richtig gestellt sind, wird noch ein großer Widerstand von etwa 100000 Ohm vorgeschaltet. Hat man k_1 und k_2 angenähert so gestellt, daß das Galvanometer keinen Ausschlag zeigt, so legt man den Hebel k_3 auf 0. Nun ist der Galvanometerkreis direkt geschlossen, und man kann die genaue Einstellung vornehmen. k_3 kann endlich auch auf einen dritten Knopf ∞ gelegt werden, wodurch der Stromkreis unterbrochen wird.

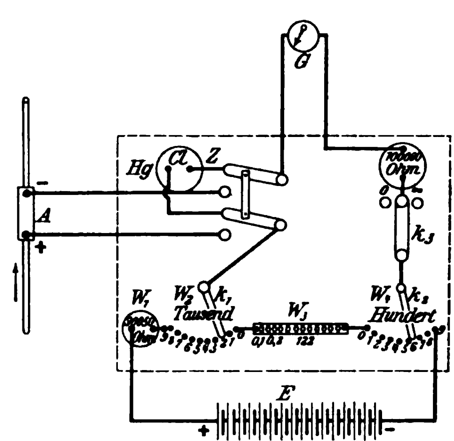


Abb. 453. Kompensationsapparat nach Feußner.

Um beliebig große Spannungen (bis 1400 Volt zu messen) verwendet man die Batterie E als Vergleichsbatterie. Es sei z. B. die Klemmenspannung E'' (bei A) eines durch den Pfeil angedeuteten Stromes zu bestimmen. Dann schaltet man jene statt des Normalelementes Cl mittels des in Abb. 453 ersichtlichen Umschalthebels ein und verfährt in der vorher beschriebenen Weise. Es sei w'' der Widerstand zwischen k_1 und k_2, bei welchem die Nullstellung des Galvanometers erreicht wird. Dann legt man den Doppelschalthebel um auf Cl (wie es die Figur zeigt) und stellt wieder ein. Der Widerstand zwischen k_1 und k_2 sei nun w'. Dann ist

$$\frac{E''}{E'} = \frac{w''}{w'}.$$

Ist bei *A* ein bekannter Widerstand in den Strom eingeschaltet, so erhält man nach Ermittelung der an den Klemmen des Widerstandes herrschenden Spannung die Stromstärke aus dem Ohmschen Gesetz.

267. Indirekte Strommessung.

Im vorstehenden wurde schon erwähnt, wie aus der an einem bekannten Widerstande gemessenen Spannung die Stromstärke ermittelt wird. Ein Verfahren, das gewöhnlich zur Eichung und Kontrolle von Strommessern benützt wird.

Mittels der Drehspuleninstrumente (§ 257), dynamometrischen Instrumente (§ 258) und Hitzdrahtinstrumente (§ 260) können stärkere Ströme nicht unmittelbar gemessen werden, weil sie nicht durch die Federn bzw. durch den Hitzdraht geschickt werden können. Es wird daher nur ein Zweigstrom i_1 durch das Meßinstrument geschickt (Abb. 454). Bei den dynamometrischen und Hitzdrahtinstrumenten wird der Widerstand w_2 in der Regel mit dem Instrument zusammengebaut und die Eichung für den Gesamtstrom i ausgeführt. Bei den Drehspuleninstrumenten für Schalltafeln geschieht dies auch; für tragbare Instrumente aber wird die Eichung gewöhnlich in Spannungseinheiten mit Meßbereichen bis 0,075 oder 0,100 oder 0,150 Volt ausgeführt, so daß sich die Stromstärke aus dem Ausschlag und dem bekannten Widerstand w_2 nach dem Ohmschen Gesetze ergibt. Voraussetzung ist aber, daß der Zweigstrom i_1 verschwindend klein ist gegen den Gesamtstrom i; andernfalls muß i aus den Kirchhoffschen Gesetzen (§ 50) berechnet werden, wozu auch noch der Widerstand w_1 des Instrumentes bekannt sein muß. Ferner ist zu beachten, daß das Instrument keinen merklichen Temperaturkoeffizienten haben soll, oder die Messung wenigstens ungefähr bei derselben Temperatur stattfinden soll, wie die Eichung des Instrumentes.

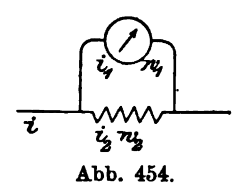


Abb. 454.

Bei Wechselstrom muß der Widerstand w_2 natürlich induktionsfrei sein, oder es muß sein Koeffizient der Selbstinduktion bekannt sein, woraus man sich für die betreffende Periodenzahl den scheinbaren Widerstand ausrechnen kann.

Zur Vergleichung von Wechselstrom mit Gleichstrom eignet sich besonders gut die optisch-pyrometrische Methode von Orlich.[1]) Ein dünnes Platinblech wird vom Wechselstrom zur hellen Rotglut er-

[1]) Zeitschr. f. Instrumentenkunde, März 1904, S. 65.

hitzt und darauf der glühende Faden einer Glühlampe projiziert. Durch Veränderung des Stromes der Glühlampe kann die Helligkeit so verändert werden, daß sie gegen den Hintergrund des glühenden Platinbleches keinen Unterschied zeigt. Durch eine Reihe gleicher Versuche mit Gleichstrom kann der durch die Glühlampe gehende Strom auf den durch das Platinblech gehenden Strom geeicht werden.

268. Messung eines Stromstoßes oder einer Elektrizitätsmenge.

Geht ein kurz dauernder Strom (Stromstoß) durch ein Galvanometer, so bewirkt dieser natürlich keine dauernde Ablenkung der Nadel, sondern nur einen einmaligen Ausschlag. Diesen kann man nicht proportional der Stromstärke annehmen, da eine konstante Stromstärke überhaupt nicht vorhanden ist, sondern eine von Null bis zu einem Maximum ansteigende und dann wieder bis Null abfallende. Es herrscht also in jedem Zeitelemente dt eine andere Stromstärke und daher auch eine andere Ablenkung. Ist aber die Schwingungsdauer sehr groß gegenüber der Dauer des Stromes, was durch ein großes Trägheitsmoment des drehbaren Teiles leicht zu erreichen ist (ballistisches Galvanometer), so ist der Ausschlag proportional der Summe aller Stromstärken, das ist $\int i\,dt$. Diese Summe ist aber nichts anderes als die von dem kurz dauernden Strome gelieferte Elektrizitätsmenge q. Hat diese einen Ausschlag α verursacht, so ist

$$q = c\alpha,$$

wobei c ein Proportionalitätsfaktor ist, der experimentell dadurch bestimmt werden kann, daß man eine bekannte Elektrizitätsmenge durch dasselbe Galvanometer schickt. Diese erhält man am geeignetsten, wenn man die Entladung eines Kondensators von bekannter Kapazität C, der mit einer bekannten Spannung E geladen ist, durch das Galvanometer gehen läßt.

Die Konstante c läßt sich auch berechnen[1]), und dann läßt sich umgekehrt die Ladung eines Kondensators messen, und daraus bei bekannter Spannung die Kapazität berechnen.

Die Elektrizitätsmenge eines länger dauernden Stromes wird mittels eines Voltameters (§ 256) gemessen.

---

[1]) Darüber muß auf ein Lehrbuch der Physik verwiesen werden, z. B. Kohlrausch, Praktische Physik.

Leistungsmessung.

269. Dynamometrische Leistungsmesser.

Bei Gleichstom ist die Leistung eines elektrischen Stromes J in einem Apparat oder einer Maschine V innerhalb der Klemmen FG (Abb. 455) gleich JE, wenn E die Spannung zwischen diesen Klemmen ist. Ein Instrument zur Messung der Leistung muß daher diese Multiplikation vornehmen. Das ist bei den Dynamometern (§ 258) der Fall. Zur Messung der Leistung geht der Strom J durch die feste Spule, während der von den Klemmen abgehende Nebenschlußstrom J' durch die drehbare Spule und durch einen vorgeschalteten großen Widerstand w' geht. Dann hängt der Ausschlag der drehbaren Spule von dem Produkte JJ' ab. Ist der Widerstand w' konstant, so ist J' der Spannung E proportional und daher mißt das Instrument bei entsprechender Bestimmung der Konstante oder bei entsprechender Eichung das Produkt JE, also die Leistung.

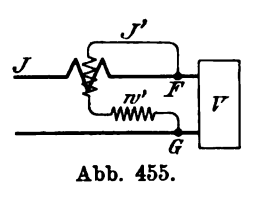


Abb. 455.

Bei Wechselstrom ist das Drehmoment D des Dynamometers

$$D = k\frac{1}{\tau}\int_0^\tau i i'\,dt,$$

wenn k einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Ist die Klemmenspannung

$$e = \mathfrak{E} \sin \omega t,$$

so ist

$$i = \mathfrak{J} \sin (\omega t - \varphi)$$

$$i' = \mathfrak{J}' \sin (\omega t - \varphi')$$

mithin

$$D = \frac{k}{\tau}\mathfrak{J}\mathfrak{J}'\int_0^\tau \sin (\omega t - \varphi)\cdot \sin (\omega t - \varphi')dt$$

$$= \frac{k}{2\tau}\mathfrak{J}\mathfrak{J}'\int_0^\tau \left[\cos (\varphi' - \varphi) - \cos (2\,\omega t - \varphi - \varphi')\right] dt$$

$$= \frac{k}{2\tau}\mathfrak{J}\mathfrak{J}'\left[t \cos (\varphi' - \varphi) - \frac{1}{2\omega}\sin (2\,\omega t - \varphi - \varphi')\right]_0^\tau$$

$$= k\frac{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}{2\tau}\left[\tau \cos (\varphi' - \varphi)\right]$$

und nach Einführung der effektiven Werte (§ 131)

$$D = k\, J J' \cos(\varphi' - \varphi)$$

nun ist (nach Gl. 114)

$$J' = \frac{E \cos \varphi'}{w'}$$

mithin

$$D = k \frac{J E \cos \varphi' \cdot \cos(\varphi' - \varphi)}{w'}$$

und da die Leistung $P = J E \cos \varphi$ ist, so ist

$$P = \frac{D}{k} w' \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cdot \cos(\varphi' - \varphi)}$$

oder nach Umformung der Cosinuse

$$P = \alpha w' \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi'^2}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'},$$

wenn α ein Eichfaktor ist.

Dieser Ausdruck geht über in

$$P = \alpha w',$$

wenn

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi'$$

ist, oder wenn

$$\operatorname{tg} \varphi' = 0$$

ist.

Der letzten Bedingung kann man sehr nahe kommen, wenn $\frac{\omega L'}{w'}$ sehr klein ist, d. h. wenn der induktive Widerstand $\omega L'$ der beweglichen Spule sehr klein ist gegen den Vorschaltwiderstand w'. Ist aber φ in dem zu messenden Stromkreis nahezu 90^0, so daß $\operatorname{tg} \varphi$ nahezu unendlich groß wird, so erhält der letzte Faktor auch dann noch einen großen Wert, wenn w' sehr groß ist. Daher kann man den Wattverbrauch eines guten Kondensators oder eines guten Kabels mit einem Leistungsmesser nicht messen. Aber auch durch die Wirbelströme in dem Leiter, aus dem die feste Spule gewickelt ist, werden die Angaben bei großer Phasenverschiebung beeinflußt. Daher werden diese Spulen aus möglichst dünnen Kupferblechstreifen gewickelt, von denen bei größeren Stromstärken eine entsprechende Anzahl parallel geschaltet werden. Dieser Einfluß läßt sich theoretisch nicht berechnen, da er von der Gestalt der Spule abhängt; man weiß nur, daß er sich umso mehr bemerkbar macht, je größer die Phasenverschiebung φ ist. Aus demselben Grunde müssen natürlich größere Metallteile von gutem Leitungsvermögen im Innern der drehbaren und festen Spule vermieden werden.

270. Induktions-Leistungsmesser.

Die in § 261 behandelten Induktionsinstrumente können auch als Leistungsmesser ausgeführt werden, wenn dafür gesorgt wird, daß ein Drehmoment entsteht, das dem Produkte aus Strom und Spannung proportional ist. Dies wird erreicht, wenn man ein dem Strome und ein der Spannung proportionales magnetisches Feld auf die Scheibe oder Trommel wirken läßt. Abb. 456 zeigt einen auf dem Schirmwirkungsprinzip beruhenden Leistungsmesser, der nach den Angaben des Verfassers[1]) von der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft ausgeführt wird. Der mittlere Magnet wird in den Strom J eingeschaltet (Abb. 455), die beiden äußeren in den Spannungsnebenschluß J'. Theoretisch ist nur einer nötig; dann entsteht aber noch ein zusätzliches Drehmoment auf Grund der in § 254 besprochenen Erscheinung, weil magnetische Streulinien aus den Eisenkernen seitlich austreten. Sitzen aber zu beiden Seiten des mittleren Kernes gleiche Kerne, so wirken diese zusätzlichen Drehmomente nach verschiedenen Seiten und heben sich auf. Es besteht dann bloß jenes Drehmoment, welches auf dem Zusammenwirken der vom Hauptstrom i induzierten Ströme i_1 und der vom Nebenschlußstrome i' induzierten Ströme i_2 beruht. Natürlich muß der Wickelungssinn auf den beiden äußeren Kernen entgegengesetzt sein, damit sich nicht diese Drehmomente auch aufheben, sondern addieren. Ist die Spannung zwischen den Punkten FG



Abb. 456. Induktions-Leistungsmesser der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft.

$$e = \mathfrak{E} \sin \omega t,$$

so ist

$$i = \mathfrak{J} \sin (\omega t - \varphi).$$

---

[1]) DRP. Nr. 84871 1895. ETZ 1899, S. 82.

Diesem ist (nach § 148) i_1 proportional unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung χ; also

$$i_1 = c_1 \mathfrak{J} \sin(\omega t - \varphi - \chi).$$

Nach § 147 ist i_2 proportional der Spannung e unter Berücksichtigung einer Phasenverschiebung ε

$$i_2 = c_2 \mathfrak{E} \sin(\omega t - \varepsilon).$$

Das Drehmoment ist nun wie oben

$$D = c\frac{1}{\tau}\int_0^\tau i_1 i_2 \, dt$$

und daraus erhält man wie im vorigen Paragraph

$$D = cJE\cos(\varepsilon - \chi - \varphi).$$

Gelingt es nun $\varepsilon = \chi$ zu machen, so erhält man

$$D = c\,JE\cos\varphi,$$

also ein der Leistung proportionales Drehmoment, und zwar ohne den von φ' abhängigen Faktor, wie oben beim Dynamometer. Um $\varepsilon = \chi$ zu machen, hat man mehrere Mittel: Die richtige Dimensionierung der Schirme, die jetzt nur vor den beiden Spannungsmagneten sitzen, sowie das Verhältnis des induktiven Widerstandes zum Ohmschen im Spannungskreis i', das man durch vorgeschaltete Drosselspulen oder induktionsfreie Widerstände in weiten Grenzen regulieren kann. Eine ganz genaue Abgleichung für alle Strom- und Spannungswerte, für welche ein Wattmeter gebraucht wird, ist aber nicht möglich, weil der magnetische Widerstand und daher auch die Selbstinduktion von der Kraftliniendichte, den Wirbelströmen und der Streuung abhängen.

Bei den auf phasenverschobenen magnetischen Feldern beruhenden Induktions-Leistungsmessern, wie dem Elektrizitätszähler[1]) von Hummel und den sogenannten Ferraris-Leistungszeigern von Siemens & Halske (Abb. 440) wird immer ein Pol mit der Stromwickelung und der folgende mit der Spannungswickelung versehen. Um ein der Leistung proportionales Drehmoment zu erhalten, müssen die entsprechenden Felder um genau 90° gegeneinander verschoben sein. Um das zu erreichen, hat Hummel die in § 253 unter III angegebene Methode, Siemens & Halske die unter II angegebene

[1]) Elektrizitätszähler unterscheiden sich grundsätzlich nur dadurch von diesen Leistungsmessern, daß die Gegenkraft wegfällt und ein Umlaufszähler angebracht ist, um die Umdrehungen der Scheibe der Trommel zu zählen.

verwendet. Aber auch da ist eine genaue Abgleichung für alle Strom- und Spannungswerte, die der Meßbereich eines Instrumentes umfaßt, nicht möglich.

271. Schaltung der Leistungsmesser bei Ein- und Mehrphasenströmen.

Bei der in Abb. 455 dargestellten Schaltung, wo V beispielsweise einen Stromverbraucher bedeutet, also der Nebenschluß hinter der Stromspule, bei FG angeschlossen ist, wird durch den Leistungsmesser die Wärmeleistung im Widerstand w' mitgemessen, weil der Strom J' auch durch die Stromspule geht. Will man die reine Leistung des Stromverbrauchers haben, so muß jene Wärmeleistung berechnet und von der gemessenen Leistung abgezogen werden. Wird der Nebenschluß vor der Stromspule angeschlossen, so wird jetzt die Wärmeleistung in w' nicht mitgemessen, wohl aber die in der Stromspule, die aber meist vernachlässigt werden kann. Ist V ein Stromerzeuger, so muß die entsprechende Wärmeleistung zu der gemessenen Leistung addiert werden. Der Vorschaltwiderstand w' soll immer so wie in Abb. 455 liegen, nicht zwischen F und dem Instrument, weil sonst die ganze Spannung innerhalb des Leistungsmessers zwischen Strom- und Spannungsspule auftritt, was bei höheren Spannungen zur Zerstörung des Instrumentes führen kann.

Bei Zwei- oder Dreiphasenstrom sind zur Ermittelung der gesamten Leistung zwei bzw. drei Messungen notwendig. Der Nebenschluß ist dabei immer von jener Spannung abzunehmen, welche zu dem betreffenden Strom gehört. Das gibt also bei Dreiphasenstrom mit neutralem Punkt die Schaltung in Abb. 457.

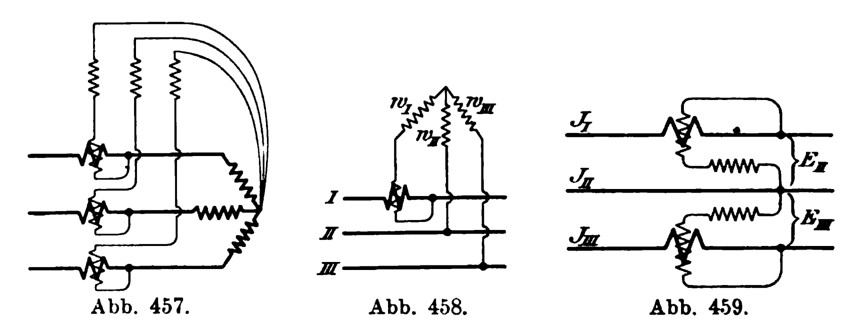


Abb. 457. Abb. 458. Abb. 459.

Bei unzugänglichem neutralen Punkt oder bei Dreieckschaltung müssen die drei Nebenschlüsse zu einem künstlichen neutralen Punkt vereinigt werden; ein solcher ist vorhanden, wenn die Widerstände der drei Nebenschlüsse einander gleich sind.

Weiß man, daß die drei Stromkreise gleiche Leistung haben, so genügt die Messung in einem. Ist ein neutraler Punkt nicht vorhanden, so wird wiederum ein künstlicher, durch die Widerstände w_I, w_{II}, w_{III} (Abb. 458) gebildet. Dabei muß der gesamte Widerstand von I, einschließlich der Spule des Instrumentes, gleich dem der anderen Zweige sein.

Bei ungleicher Leistung der drei Ströme sind zur Messung der gesamten Leistung drei Leistungsmesser nach Abb. 457, mindestens aber zwei Leistungsmesser nach Abb. 459 gemäß der in § 249 abgeleiteten Gleichung

$$P = J_I \, E_{II} \cos \gamma \pm J_{III} \, E_{III} \cos \delta$$

notwendig. Die Summe der Angaben ist zu bilden, wenn beide Instrumente bei gleichsinniger Schaltung nach derselben Seite ausschlagen, die Differenz, wenn sie bei gleichsinniger nach entgegengesetzter Seite, oder bei ungleichsinniger Schaltung nach derselben Seite ausschlagen.

Bei zusammengesetzten Wellenformen ist die Leistung (§ 209)

$$P = J_1 E_1 \cos \varphi_1 + J_3 E_3 \cos \varphi_3 + J_5 E_5 \cos \varphi_5 + \ldots$$

Ist einer der Faktoren, z. B. E_3 null, so verschwindet das ganze Glied dritter Ordnung und trägt zur Leistung nichts bei, selbst wenn das Stromglied J_3 vorhanden ist. Daher dürfen die durch Abb. 458 u. 459 dargestellten Schaltungen nicht angewendet werden, wenn ein neutraler Leiter besteht (Abb. 396), oder die neutralen Punkte des Stromerzeugers und des Stromverbrauchers an Erde gelegt sind. Denn dann sind die Glieder dritter Ordnung an der Leistung im Erzeuger und im Verbraucher beteiligt, im Leistungsmesser aber nicht, weil sie zwar durch die Stromspule, aber nicht durch den Nebenschluß desselben gehen (§ 248). Die durch Abb. 458 dargestellte Methode wird dann wieder richtig, wenn man den künstlichen neutralen Punkt mit einem natürlichen verbindet; dann braucht man aber die Widerstände w_{II} und w_{III} überhaupt nicht.

Ist bei einem Stromerzeuger mit Dreieckschaltung ein kurzgeschlossener Strom in der Wickelung vorhanden (§ 248), so erhält man durch Messung in den Leitungen die vom Stromerzeuger in die Leitungen geschickte Leistung, nicht aber die gesamte vom Stromerzeuger entwickelte Leistung.

272. Messung des Leistungsfaktors und des wattlosen Stromes.

Aus der Messung der Leistung P, des Stromes J und der Spannung E eines Wechselstromes ergibt sich der Leistungsfaktor $\cos\varphi$ aus der Formel

$$\cos\varphi = \frac{P}{JE},$$

wie auch immer die Wellenform beschaffen sein mag.[1]) Es sind zwar auch Instrumente konstruiert worden, welche den Leistungsfaktor direkt anzeigen. Sie sind aber zu kompliziert, zu ungenau, zu sehr von anderen Umständen abhängig, als daß sie sich hätten einbürgern können.

Wichtiger sind die Instrumente, welche den wattlosen Strom $J\sin\varphi$ unmittelbar anzeigen, weil sich darnach die Spannungsregulierung von Synchromotoren richtet. Solche Instrumente kann man aus jedem Leistungsmesser durch Umgestaltung des Nebenschlusses erhalten. Bewirkt man auf irgend eine Weise, daß der Strom oder das magnetische Feld des Nebenschlusses um 90° verschoben wird, so ist jetzt die Phasenverschiebung zwischen diesem und dem Hauptstrom $\varphi + 90$. Mithin ist jetzt das Drehmoment dieses Instrumentes

$$D = cJE\cos(\varphi + 90) = -cJE\sin\varphi.$$

Ist E konstant, so kann das Instrument in Einheiten des wattlosen Stromes $J\sin\varphi$ geeicht werden. Diese Einheiten sind natürlich ebenfalls Ampere, weil $\sin\varphi$ eine reine Zahl ist. Die Verschiebung kann bei Dynamometern annähernd erreicht werden, wenn man der beweglichen Spule statt des Widerstandes w' eine Drosselspule vorschaltet, deren Ohmscher Widerstand verschwindend klein ist gegen den induktiven. Bei den Induktionsleistungsmessern, wo das magnetische Feld des Nebenschlusses um 90° gegen das des Hauptstromes verschoben ist, nimmt man eine Rückverschiebung des Feldes um nahezu 90° dadurch vor, daß man dem Nebenschluß einen hohen induktionsfreien Widerstand vorschaltet.

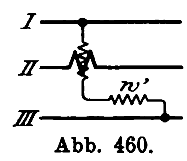


Abb. 460.

[1]) Aus der in Abb. 459 dargestellten Zweiwattmeterschaltung kann man die Phasenverschiebung auch erhalten. Es ist nämlich

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2},$$

wenn x_1, x_2 die Angaben der beiden Wattmeter bedeuten. Diese Methode ist aber nur gültig, wenn Strom- und Spannungswellen sinusförmig sind (vgl. Benischke, ETZ 1903, S. 193).

Bei Dreiphasenstrom kann man jeden Leistungsmesser für wattlosen Strom eichfähig machen, wenn man ihn statt wie in Abb. 457 oder 458 so schaltet wie in Abb. 460, also den Nebenschluß zwischen die beiden anderen Leitungen, wobei der Widerstand w' induktionsfrei sein muß. Aus Abb. 404 ersieht man, daß ein zwischen I und III abgenommener Strom J_I' um 90^0 gegen den Strom J_{II} verschoben ist.

273. Stromwandler.

Die Durchleitung eines hochgespannten Stromes durch einen Strommesser oder einen Leistungsmesser ist mit drei Übelständen verbunden. Erstens ist eine sorgfältige Isolation notwendig, um eine Zerstörung des Instrumentes durch Übergang einer Entladung zu verhüten, zweitens ist die Ablesung mit einiger Gefahr verbunden, drittens treten fehlerhafte Angaben auf, wenn die Ladung einen Ausschlag des beweglichen Teiles verursacht. Das letztere zeigt sich besonders häufig bei Leistungsmessern, indem der drehbare Teil schon einen Ausschlag zeigt, wenn die feste Spule noch stromlos ist. Deshalb wurden im Jahre 1898 vom Verfasser[1]) die jetzt überall bei Meßinstrumenten für Schalttafeln zur Anwendung kommenden Stromwandler eingeführt.



Abb. 461. Stromwandler der Allgem. Elektrizitäts-Gesellschaft.

Ein solcher Stromwandler ist ein kleiner Transformator (461), durch dessen primäre Wickelung der zu messende Strom J geschickt wird (Abb. 462), während an die sekundäre Wickelung der Strommesser oder die Stromspule des Leistungsmessers angeschlossen wird. Ist die Streuung zwischen primärer und sekundärer Wickelung klein, und der Widerstand des angeschlossenen Instrumentes nicht zu groß gegenüber dem Widerstand der sekundären Wickelung, so gilt für das Verhältnis zwischen primärem und sekundärem Strom (nach § 148)

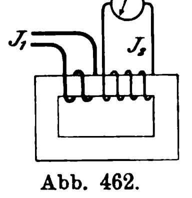


Abb. 462.

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{N_2}{N_1} = ü.$$

[1]) ETZ 1899, S. 86.

Man hat also den abgelesenen Strom J_2 mit dem Übersetzungsverhältnis zu multiplizieren, um den Strom J_1 zu erhalten. Da die Einhaltung des Übersetzungsverhältnisses eine größere Ausführung des Stromwandlers bedingt als sonst nötig ist, so verzichtet man in der Regel darauf und eicht das Instrument empirisch auf den primären Strom. Voraussetzung ist natürlich auch, daß sich die Wellenform des sekundären Stzomes nicht wesentlich von der des primären unterscheidet; das ist fast immer der Fall, wie aus Abb. 463 hervorgeht, welche die Stromwellen bei Anschluß eines Instrumentes mit kleinem Widerstand, und aus Abb. 464, welche sie bei Anschluß eines Instrumentes mit größerem Widerstand darstellt.

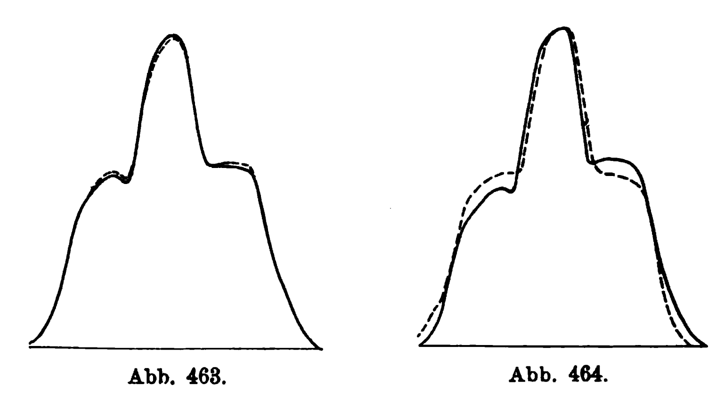


Abb. 463. Abb. 464.

Aber auch bei niedrigen Spannungen ist die Anwendung eines Stromwandlers von großem Vorteil, wenn die Stromstärke so groß ist, daß die Einführung entsprechender Leitungsquerschnitte in ein Meßinstrument Schwierigkeiten macht oder überhaupt unmöglich ist. Dann braucht der primäre Strom keine Windung um den Eisenkern zu machen, sondern nur gerade durchgeführt zu werden, wie die Abb. 465 und 466 zeigen. Da die Kraftlinien einen Leiter als geschlossene Linien umgeben (vgl. Abb. 75 S. 108), verlaufen sie im Eisenkern. Um bei sehr großen Stromstärken die Leitungsschienen nicht unterbrechen zu müssen, ist bei der in Abb. 466 dargestellten Ausführung der Eisenkern so eingerichtet, daß er auseinanderschraubt und genau so wie bei der Eichung auf den endgültigen Stromschienen wieder befestigt werden kann.

Um bei Leistungsmessern die Hochspannung vom Instrument fernzuhalten, muß auch der Nebenschlußstrom transformiert werden, was mit Hilfe der in § 265 erwähnten Spannungstransformatoren (Spannungswandler) geschieht. Das gibt die in Abb. 467 ersichtliche Schaltung von der durch Abb. 468 dargestellten Ausführung.

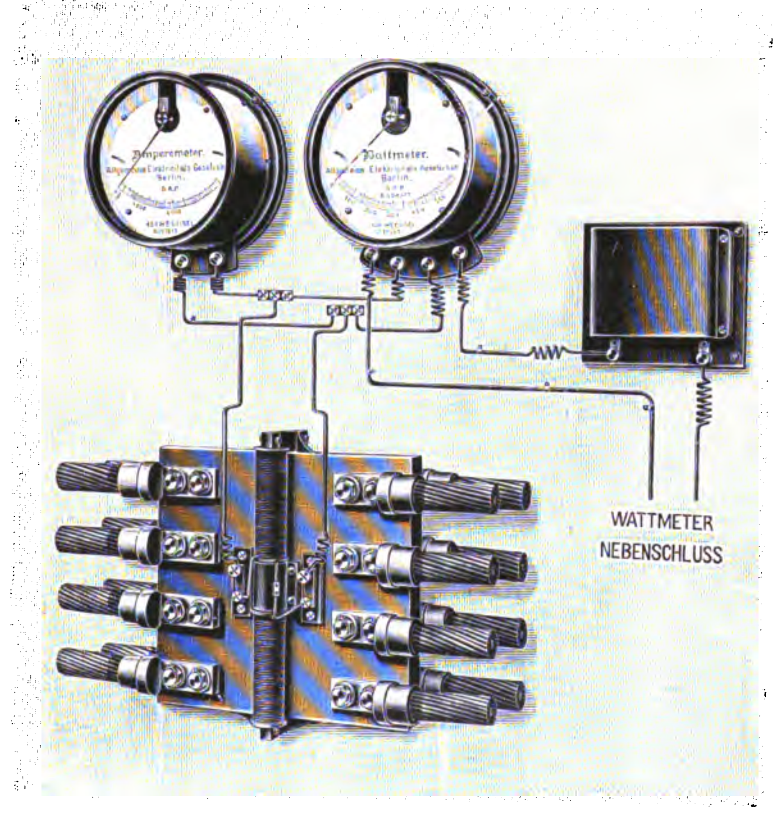


Abb. 465. Stromwandler der Allgem. Elektr.-Ges. mit Schienenstück.

Dabei tritt aber eine Schwierigkeit für die Eichung auf, weil die Phasenverschiebung zwischen primärem und sekundärem Strom im Stromwandler und im Spannungstransformator nicht gleich ist. Aus Abb. 463 und 464 sieht man, daß die Phasenverschiebung im Stromwandler bei kleinem Widerstand 0° ist (oder richtiger 180°, da die eine Stromrichtung umgekehrt ist), bei größerem Widerstand aber nicht. Im Spannungstransformator ist die

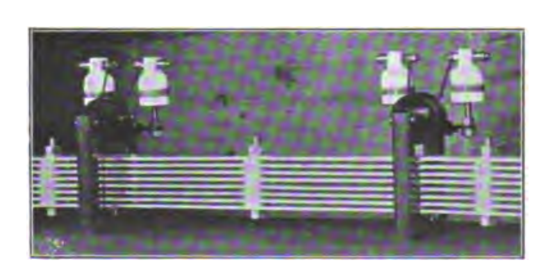


Abb. 466. Von den Schienen abnehmbare Stromwandler der Allgem. Elektr.-Ges.

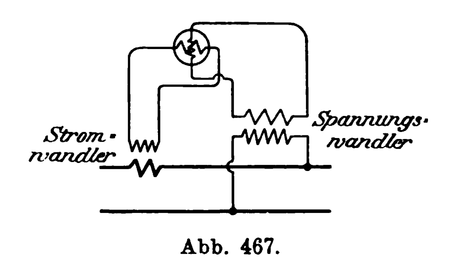


Abb. 467.

Verschiebung im allgemeinen größer. Daher muß vor der Eichung mit Hilfe phasenverschiebender Mittel (Ohmscher Widerstand, induktiver Widerstand) vorerst die Gleichheit der Phasenverschiebung hergestellt werden, so daß hier nur eine empirische Eichung in Frage kommt.

Die vorstehenden Abbildungen zeigen die Haupttypen der vom Verfasser angegebenen und von der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft ausgeführten Konstruktionen: Abb. 461 die kleinste Type

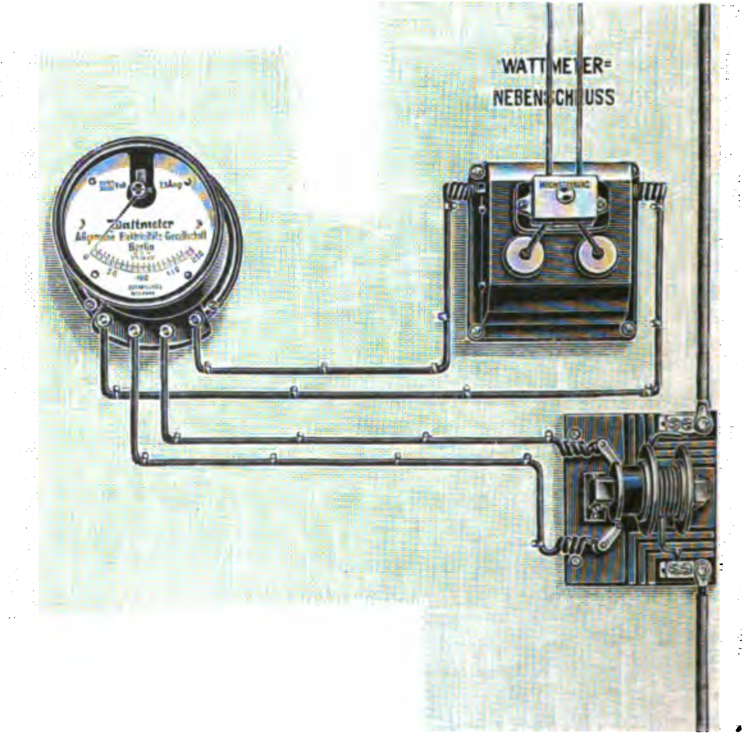


Abb. 468. Wattmeter der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft mit Strom- und Spannungswandler.

bis 6000 Volt und 100 Ampere für einen Strommesser oder einen Leistungsmesser; Abb. 465 und 466 bis 8000 Ampere bei niedriger Spannung für gleichzeitigen Anschluß eines Strommessers und eines

Leistungsmessers. Abb. 469 zeigt eine Ausführung von Siemens & Halske mit U-förmig gebogener Stromschiene.

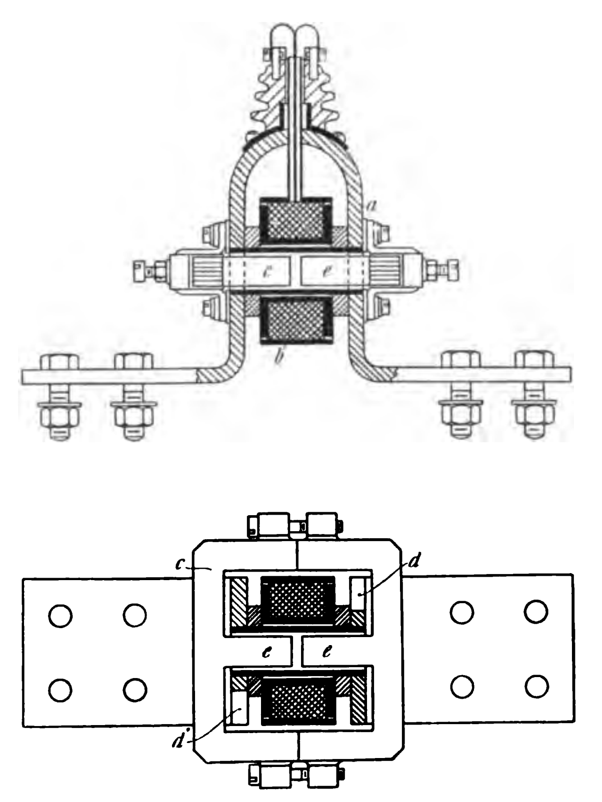


Abb. 469. Stromwandler für größere Stromstärken von Siemens & Halske.

Das magnetische Feld im Eisenkern eines Stromwandlers kann natürlich durch äußere Wechselstromfelder beeinflußt werden, z. B. von benachbarten Stromleitern mit großer Stromstärke. Darauf ist bei der Anordnung auf Schalltafeln zu achten, nötigenfalls ist der Stromwandler durch elektrodynamische Schirme von der durch Abb. 204 (S. 263) dargestellten Art zu schützen.

Widerstandsmessungen.

274. Widerstandsmessung durch Vergleichung. Thomsonsche Brücke.

Am einfachsten ergibt sich der Widerstand eines Leiters aus dem Ohmschen Gesetz, wenn man den Strom und die Spannung an seinen Enden mißt. Genauer und zuverlässiger ist die Ver-

gleichung mit bekannten Widerständen, die unveränderlicher sind als Meßinstrumente. Schaltet man zu diesem Zweck den unbekannten Widerstand x und den bekannten w hintereinander (Abb. 470) und legt die Enden eines empfindlichen Strom- oder Spannungsmessers einmal an die Klemmen von x und einmal an die Klemmen von w, so verhalten sich die Ausschläge des Instrumentes wie diese Widerstände, wenn die Stromstärke unverändert geblieben ist. Ferner ist Voraussetzung, daß der Strom, der durch das Instrument geht, verschwindend klein ist gegen den Strom, der durch w und x geht. Daher verwendet man bei genauen Messungen als Spannungsmesser den Kompensationsapparat (§ 266).

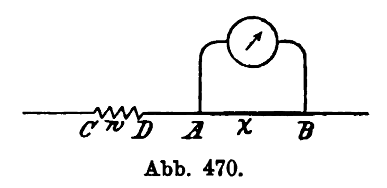


Abb. 470.

Von der Forderung konstanter Stromstärke während der Messung ist man unabhängig bei der Thomsonschen Brücke, die auf dem gleichen Prinzipe beruht. Sind x und w wieder die zu vergleichenden Widerstände (Abb. 471), so verbindet man alle vier Punkte so mit einem Galvanometer, daß die Spannungen an den beiden Widerständen gleichzeitig, aber im entgegengesetzten Sinne auf das Galvanometer wirken. Es zeigt daher auf Null, sobald man durch Verschieben eines Gleitkontaktes G $w = x$ gemacht hat. Mit G ist ein Zeiger verbunden, der unmittelbar den Widerstand auf einer geeichten Teilung anzeigt. Besitzen die Zuleitungen zum Galvanometer Widerstände von nicht zu vernachlässigender Größe, so muß $a = b$ und $c = d$ sein, oder sie müssen in einem bestimmten Verhältnis stehen. Ist z. B.

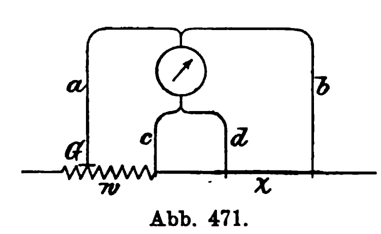


Abb. 471.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = 10,$$

so ist x gleich dem zehnten Teil des bei Stromlosigkeit des Galvanometers abgelesenen Widerstandes. Ganz allgemein ist

$$\frac{w}{x} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

275. Die Wheatstonesche Brücke.

Auch bei dieser Methode ist man von Änderungen der Stromquelle unabhängig. Abb. 472 zeigt die Schaltung. In jedem der beiden Zweige fällt das Potential vom Werte U_1 auf den Wert U_2. Es muß also zwei Punkte geben — z. B. A_1 und A_2 — die denselben Potentialwert U besitzen. Verbindet man sie durch ein Galvanometer, so zeigt dieses keinen Ausschlag, da zwischen Punkten gleichen Potentiales kein Strom entsteht. Die Punkte U_1, U_2, A_1, A_2 bestimmen vier Abschnitte mit den Widerständen w_1, w_2, w_3, w_4. Es bestehen dann nach dem Ohmschen Gesetze folgende Gleichungen

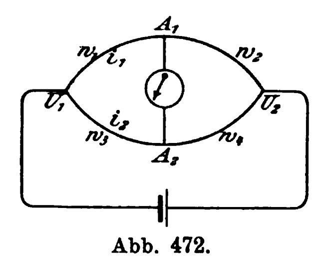


Abb. 472.

$$U_1 - U = i_1 w_1 \qquad U - U_2 = i_1 w_2$$

$$U_1 - U = i_2 w_3 \qquad U - U_2 = i_2 w_4.$$

Daraus ist

$$i_1 w_1 = i_2 w_3 \qquad i_1 w_2 = i_2 w_4.$$

Daraus folgt weiter

$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4.$$

Sind nun drei von diesen Widerständen bekannt, so kann man den vierten daraus berechnen. Am einfachsten gestaltet sich die Messung, wenn $w_1 = w_2$ ist; dann ist $w_3 = w_4$.

Wie man sieht, ist die Schaltung in bezug auf die Punkte $U_1 U_2$ und $A_1 A_2$ symmetrisch; man kann daher Meßbatterie und Galvanometer miteinander vertauschen, ohne daß dadurch die Meßbedingung geändert würde.

Beim Messen des Widerstandes einer Magnetwickelung hat man darauf zu achten, daß der Elektromagnet, der ja durch den Meßstrom erregt wird, die Nadel des Galvanometers nicht beeinflußt. Man erkennt dies, indem man den Strom durch die Brücke gehen läßt, den Kontakt bei A_1 oder A_2 aber abhebt; wenn jetzt die Nadel einen Ausschlag gibt, so rührt er von äußeren magnetisehen Einflüssen her. Man muß dann den Magnet weit wegstellen, oder seinen magnetischen Kreis durch einen Anker kurzschließen, oder seinen Einfluß auf die Nadel durch einen Richtmagnet ausgleichen.

So ausgezeichnet als diese Methode zur Messung größerer Widerstände ist, so ungeeignet ist sie für sehr kleine, da dabei auch die Widerstände der Verbindungsdrähte und der Kontakt-

stellen mitgemessen werden. Man muß dann die im vorigen Paragraphen beschriebene Thomsonsche Brückenschaltung anwenden.

276. Widerstandsmessung von elektrolytischen Leitern und Zellen.

Zur Messung des Widerstandes eines Elektrolyten ist die Wheatstonesche Brücke am geeignetsten. Man darf aber als Meßstrom keinen Gleichstrom verwenden, sondern nur einen Wechselstrom, weil ersterer eine Zersetzung einleitet und gleichzeitig mit dieser eine Polarisatiou (§ 66) eintritt, die bekanntlich in einer entgegengesetzt gerichteten EMK besteht. Diese würde sich bei der Messung wie ein erhöhter Widerstand bemerkbar machen. Bei einem Wechselstrom oder auch schon bei dem Strome eines Funkeninduktors fällt dies weg, weil so wie der Strom auch die Polarisation eine wechselnde ist, deren Resultierende Null ist. Jetzt kann man aber kein gewöhnliches Gleichstromgalvanometer verwenden, sondern nur ein hochempfindliches Dynamometer oder aber ein Telephon. Dieses wird von einem Wechselstrom zum Tönen gebracht, und man stellt nun in der Wheatstoneschen Brücke auf das Verschwinden dieses Tones ein. Sind die Vergleichswiderstände nicht vollständig frei von Selbstinduktion, so verstummt es niemals gänzlich, und man stellt dann auf das Minimum der Tonstärke ein. Den zu messenden Elektrolyten gibt man in Röhren von bekanntem Querschnitt und führt den Strom durch Elektroden aus Platin oder platiniertem Silber zu, deren Abstand leicht gemessen werden kann, so daß man aus dem gemessenen Widerstand leicht den spezifischen berechnen kann. Sind die Gefäße für die Elektrolyten nicht direkt ausmeßbar, so eicht man sie durch eine Messung mit einem Elektrolyten, dessen spezifischer Widerstand bekannt ist.

In gleicher Weise mißt man den inneren Widerstand galvanischer Zellen (Akkumulatoren). Kennt man ihre EMK, die man im stromlosen Zustand durch Messung der Klemmenspannung mit einem Vollmeter oder mit dem Kompensationsapparat erhält, so kann man eine rasche Messung in der Weise machen, daß man die Zelle durch einen bekannten Widerstand w und einen Strommesser schließt; dann erhält man aus dem Ohmschen Gesetze $J = \frac{E}{w + x}$ den inneren Widerstand x. Kennt man E nicht, so macht man noch eine zweite Messung mit einem anderen Widerstande und hat dann zwei Gleichungen, aus denen man E und x berechnen kann.

Die Messung der charakteristischen Wechselstromgrößen.

277. Die Messung wirksamer, äquivalenter und scheinbarer Widerstände.

Wenn ein Leiter von Wechselstrom durchflossen wird, so kann sein Ohmscher Widerstand größer sein, als wenn er von Gleichstrom durchflossen wird, weil der in § 166 und 167 besprochene Einfluß der Wirbelströme bewirkt, daß vom Wechselstrom nicht der ganze Querschnitt des Leiters gleichmäßig ausgefüllt wird. Daher muß in jenen Fällen, wo dieser Einfluß erheblich ist, der Widerstand nicht mit Gleichstrom, sondern mit Wechselstrom bestimmt werden, wenn er bei Wechselstrom benutzt werden soll. Ferner wissen wir aus § 164, daß bei einer Spule mit Eisenkern für den gesamten Wattverbrauch und die Phasenverschiebung nicht der wahre Ohmsche Widerstand und die wahre Selbstinduktion, sondern die entsprechenden äquivalenten Werte in Betracht kommen. Daher müssen auch diese Größen mit Wechselstrom bestimmt werden, und zwar bei ungefähr der Periodenzahl, die in Betracht kommt.

Dazu dient am besten die in § 274 beschriebene Vergleichung des unbekannten Widerstandes w_s mit einem bekannten Widerstande w_n (Abb. 473), wobei natürlich Voraussetzung ist, daß der bekannte Widerstand nicht auch irgendwie beeinflußt wird. Bei den käuflichen Widerstandsnormalien ist dies nicht der Fall, da sie aus einem Metall von so hohem spezifischen Widerstand (Konstantan, Manganin u. dgl.) bestehen, daß merkliche Wirbelströme nicht entstehen können. Eisen enthalten sie überhaupt nicht. Als Instrument zur Vergleichung muß natürlich ein Wechselstrominstrument von genügender Empfindlichkeit dienen und sein Stromverbrauch J_1 muß neben dem durch die Widerstände gehenden Strome J verschwindend klein sein. Ist das nicht der Fall, so muß man einen veränderlichen Vergleichswiderstand w_n haben, den man ungefähr gleich groß mit w_s machen kann, so daß bei jeder der beiden Messungen ungefähr gleich viel Strom abgezweigt wird. Am genauesten ist die Messung natürlich, wenn man die Widerstände so genau abgleichen kann, daß man gleiche Ausschläge am Instrument erhält, oder wenn man ein empfindliches Quadrantenelektrometer verwendet, das gar keinen Strom verbraucht.

Abb. 473.

Mittels des Quadrantenelektrometers kann diese Methode zu einer Nullmethode umgestaltet werden, wenn man die Schaltung in Abb. 474 anwendet. Sind die Potentialdifferenzen $U_1 - U_2$ und $U_2 - U_3$ einander gleich, so zeigt das Elektrometer keinen Ausschlag. Dabei ist man von der Konstanz der Stromstärke unabhängig. Von Wichtigkeit ist aber, daß man die richtige Nullstellung des Elektrometers kennt, die nicht immer mit der Einstellung bei Spannungslosigkeit identisch ist. Man schaltet daher statt der Widerstände w_s und w_n vorher zwei gleiche induktionsfreie Widerstände oder zwei ganz gleich große und gleich beschaffene Kondensatoren ein. Dabei ist zu beachten, daß die volle Spannung $U_1 - U_3$ zwischen den beiden Quadrantenpaaren auftritt, so daß höhere Spannungen dem Instrument gefährlich werden können.

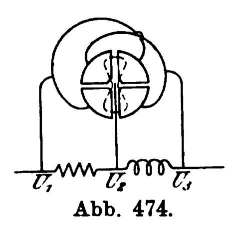


Abb. 474.

Mit diesen Methoden kann man also wirksame Widerstände und scheinbare Widerstände von der Form

$$\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2} \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{w^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

mit wahren Widerständen vergleichen. Daraus kann man L oder C berechnen, wenn w und $\omega = 2\pi\nu$ bekannt ist, und der zur Messung verwendete Strom nicht zu sehr von der Sinusform abweicht; andernfalls gilt der so gefundene Wert von L oder C nur für die betreffende Wellenform (vgl. die Anmerkung auf S. 411). Für w kann man in der Regel den mit Gleichstrom gemessenen Wert einsetzen, denn er ist meist so klein gegen $\omega^2 L^2$ oder $\frac{1}{\omega^2 C^2}$, daß der geringe Unterschied zwischen Gleich- und Wechselstrom auf L oder C keinen merklichen Einfluß hat. Ist das nicht zulässig, so muß man eine zweite Messung machen, nachdem man zu dem scheinbaren Widerstand einen bekannten Normalwiderstand w' hinzugefügt hat. Dann hat man zwei Gleichungen

$$\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2} = w_n$$

und

$$\sqrt{(w + w')^2 + \omega^2 L^2} = w_n',$$

aus denen man die Unbekannten w und ωL berechnen kann. Oder man benützt die auf S. 238 angegebene, auf Messung der Leistung des Stromes und der Spannung beruhende Methode. Die äquivalenten Werte ϱ und $\omega\lambda$ in dem scheinbaren Widerstande $\sqrt{\varrho^2 + \omega^2\lambda^2}$ bei Anwesenheit sekundärer Ströme (§ 146) oder bei An-

wesenheit von Wirbelströmen und Hysterese (§ 164) kann man mit denselben Methoden bestimmen. Über die Anwendung der Wheatstoneschen Brücke vgl. § 278.

Die obigen Methoden ermöglichen natürlich auch die Vergleichung von Kapazitäten. Die Ausschläge bei der Methode Abb. 473 verhalten sich wie die Kapazitätswiderstände, also umgekehrt wie die Kapazitäten. Hat man einen Luftkondensator von veränderlichem Abstand, so daß seine Kapazität der des anderen gleich gemacht werden kann, so kann man die Methode in Abb. 474 anwenden. Zur Berechnung der Kapazität eines Luftkondensators dienen die Formeln in § 27.

Hierfür eignet sich auch die in Abb. 475 dargestellte Schaltung, wenn die Kapazität des Elektrometers verschwindend klein ist gegen die eines Kondensators. Diese Methode hat den Vorteil, daß die volle Spannung der Stromquelle nicht im Instrument zur Geltung kommt, so daß man auch hohe Spannung anwenden kann.

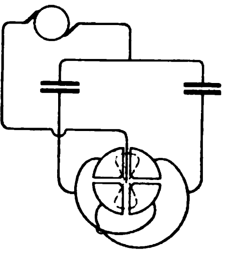


Abb. 475.

Bei der durch Abb. 473 dargestellten Methode kann man auch hochgespannten Strom verwenden, wenn man als Meßinstrument ein statisches Voltmeter von der durch Abb. 448 dargestellten Art verwendet. Das ist von Wichtigkeit für Kondensatoren mit festem Dielektrikum, weil deren Kapazität bei Hochspannung manchmal anders ist als bei Niederspannung. Man erhält dann durch eine solche Messung unmittelbar den äquivalenten Kapazitätswiderstand.

Überhaupt erhält man bei Messungen mittels Wechselstrom den für Wechselstrom allein maßgeblichen äquivalenten Kapazitätswiderstand, der sich von dem reinen oder theoretischen Kapazitätswiderstand unterscheidet, wenn das Dielektrikum kein vollkommenes ist, oder wenn ein Übergang der Elektrizität zwischen den Kondensatorplatten durch Ausstrahlung oder Entladung stattfindet (§ 178, 179). Man hat dann einen reinen Kondensator C mit nebengeschaltetem Widerstand w_n wie in Abb. 250. Der mathematische Ausdruck für den äquivalenten Kapazitätswiderstand ergibt sich aus Gl. 193, wenn man $w = w_n$ und $L = 0$ setzt. Es ist dann

$$J = \frac{K}{\frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 + \frac{1}{w_n^2}}}}.$$

Der äquivalente Kapazitätswiderstand ist also

$$\frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 + \frac{1}{w_n^2}}}.$$

Für $w_n = \infty$ geht er in den reinen Kapazitätswiderstand $\frac{1}{\omega C}$ über.

278. Die Wheatstonesche Brücke bei Wechselstrom.

Die Wheatstonesche Brücke kann bei Wechselstrom nur unter besonderen Voraussetzungen angewendet werden. Nach § 275 erfolgt die Abgleichung derart, daß man Stromlosigkeit im Galvanometer herstellt. Bei Gleichstrom genügt hierzu die Bedingung, daß die Spannungen in den vier Zweigen gleich sind. Bei Wechselstrom genügt das nicht, sondern es darf auch keine Phasenverschiebung zwischen den Spannungen $U_1 - U$ und $U - U_2$ (Abb. 476).

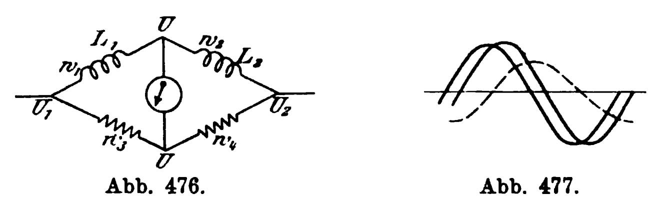


Abb. 476. Abb. 477.

bestehen. Die Notwendigkeit dieser Forderung erkennt man aus Abb. 477, in welcher zwei gleich große aber verschobene Spannungen gezeichnet sind. Man sieht, sie ergeben eine durch die gestrichelte Linie dargestellte resultierende Spannung. Ein entsprechender Strom würde durch das Galvanometer gehen. Wir betrachten die in Abb. 476 dargestellte Brücke, deren obere Zweige scheinbare Widerstände enthalten. Dann lautet die Bedingung für gleiche Spannung

$$\frac{\sqrt{w_1^2 + \omega^2 L_1^2}}{\sqrt{w_2^2 + \omega^2 L_2^2}} = \frac{w_3}{w_4}$$

und die Bedingung für Phasengleichheit

$$\frac{\omega L_1}{w_1} = \frac{\omega L_2}{w_2}.$$

Im unteren Zweig, der nur induktionsfreie Widerstände enthält, sind die Phasen ohnehin gleich. Aus den beiden obigen Gleichungen ergeben sich die beiden folgenden

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Enthält also z. B. nur einer der vier Zweige Selbstinduktion, so kann das Galvanometer niemals stromlos werden. Die Bedingungsgleichungen enthalten die Periodenzahl nicht; man ist also von Periodenzahl und Wellenform unabhängig. Dafür muß aber zur Bestimmung der einen Selbstinduktion die andere bekannt sein; ferner muß, um diese Gleichungen überhaupt erfüllen zu können, nicht nur w_3 und w_4 sondern auch w_2 veränderlich sein.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt nun

$$w_1 = w_2 \frac{w_3}{w_4},$$

$$L_1 = L_2 \frac{w_3}{w_4}.$$

w_1 und L_1 bedeuten die wirksamen Werte (§ 166, 167, 159) oder die äquivalenten Werte (ϱ, λ; § 146, 164), die dem bei der Messung verwendeten Wechselstrom entsprechen. Nach § 146 ist ϱJ^2 die gesamte in diesem Zweig verbrauchte Leistung. Man kann also, wenn man gleichzeitig den Strom J mißt auf diese Weise die Leistung ohne Wattmeter ermitteln.

Befindet sich an Stelle der Selbstinduktion L_1 eine Kapazität C, so ist (§ 170)

$$\frac{1}{\omega^2 C} = L_2 \frac{w_3}{w_4} \quad \text{oder} \quad C = \frac{w_4}{\omega^2 L_2 w_3}.$$

Ist die Kapazität keine reine, so erhält man die äquivalente Kapazität (vgl. den Schluß des vorigen Paragraphen).

Über andere Brückenschaltungen zur Messung der Wechselstromwiderstände vgl. Orlich ETZ 1903, S. 502.

279. Bestimmung der Periodenzahl.

Die Periodenzahl eines Wechselstromes ist gleich dem Produkte aus der Umlaufszahl in einer Sekunde und der halben Polzahl. Man erhält sie also am einfachsten durch Zählung der Umlaufszahl des Stromerzeugers oder eines an sein Netz angeschlossenen Synchronmotors.

Wenn dies nicht möglich ist, läßt sie sich am einfachsten mittels einer stroboskopischen Scheibe, die von einer an das Netz angeschlossenen Bogenlampe beleuchtet wird, bestimmen.[1] Wird die stroboskopische Scheibe so gedreht, daß sie still zu stehen scheint, so ist das Produkt aus der Umlaufszahl der Scheibe und der halben

---

[1]) Benischke, ETZ 1899, S. 142, Annal. d. Phys. 5, 1901, S. 487.

Segmentzahl gleich der Periodenzahl. Mit einer Glühlampe kann man die Erscheinung nur bei gedämpftem Tageslicht erkennen.



Abb. 478. Frequenzmesser von Friedr. Lux.

Hartmann - Kempf und Frahm haben die Resonanzschwingungen elastischer Körper angewendet. Befindet sich eine Stahlzunge vor einem von dem betreffenden Wechselstrom erregten Magnet, so gerät sie in Resonanzschwingungen, wenn ihre Eigenschwingungszahl der Polwechselzahl des Stromes gleich ist. Hat man also eine Reihe solcher Zungen nebeneinander, deren Eigenschwingungen sich um einen Polwechsel unterscheiden, so kommt jene in Resonanz, deren Eigenschwingung mit der Polwechselzahl des Stromes übereinstimmt. Abb. 478 zeigt einen solchen Apparat.

280. Die Aufnahme von Wellenformen.[1])

I. Punktförmige Aufnahme (Joubert).

Mit der Welle des Stromerzeugers S (Abb. 479) ist eine Scheibe aus Isoliermaterial fest verbunden, die auf einer Hälfte einen Metallring M trägt. Mit diesem verbunden ist der Metallkontakt K. Auf den beiden Hälften schleifen die Bürsten B_1, B_2. Ist die Maschine zweipolig, so erfolgt die Berührung zwischen K und B_2 immer bei demselben Augenblickswert des Stromes. Durch das Galvanometer G geht also ein diesem Augenblickswert proportionaler Strom, und dieses zeigt einen konstanten Ausschlag, weil bei 50 Perioden der

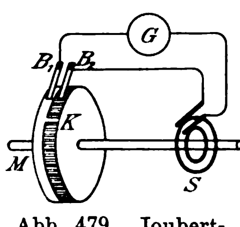


Abb. 479. Joubertsche Scheibe.

[1]) Es können hier nur die Prinzipien der wichtigsten Methoden angegeben werden. Näheres siehe: Orlich, „Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven“ Heft 7 der „Elektrotechnik in Einzeldarstellungen“.

Kontakt 50 mal in der Sekunde bei demselben Augenblickswert erfolgt. Wird die Bürste B_2 um einen gewissen Winkel verschoben, so erfolgt die Berührung bei einem anderen Augenblickswert. Trägt man die Drehungswinkel der Bürste B_2 als Abszissen, die Galvanometerausschläge als Ordinaten auf, so erhält man Punkte, deren Verbindung die Wellenform ergibt.

II. Braunsche Röhre.

Diese Röhre ist eine Kathodenstrahlröhre (§ 218) mit einem erweiterten Ende, in dem sich ein fluoreszierender Schirm S (Abb. 480) befindet, um hier die von der Kathode K auftreffenden Kathodenstrahlen sichtbar zu machen. D_1 und D_2 sind zwei Glaswände mit je einem Loch in der Mitte, so daß nur ein dünnes Kathodenstrahlbündel in das erweiterte Ende gelangt und auf dem Schirm S als leuchtender Punkt erscheint. Der zu untersuchende Wechselstrom wird durch eine Spule geschickt und diese so der Röhre — rechts von D_2 — genähert, daß ihre Kraftlinien das Kathodenstrahlbündel senkrecht kreuzen. Infolgedessen wird das Strahlenbündel proportional dem Strome abgelenkt und auf dem Schirm erscheint eine leuchtende Linie. Betrachtet man diese durch einen rotierenden Spiegel, der so gestellt ist, daß seine Drehungsachse parallel zu dieser Linie liegt, so wird der leuchtende Punkt im Spiegel senkrecht zu seiner Ablenkungsrichtung verschoben, und daher sieht man bei geeigneter Drehgeschwindigkeit im Spiegel ein Bild der Stromwelle. Auf diese Weise sind die Abb. 283—286 gewonnen worden. Die Kathodenstrahlen werden wie üblich durch Hochspannungsentladungen erzeugt. Am besten durch eine Elektrisiermaschine, weil damit die Röhre am wenigsten erhitzt wird.[1])

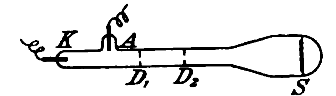


Abb. 480. Braunsche Röhre.

III. Oszillograph (Blondel).

Ein Galvanometer, das keine Trägheit hat, erhält in jedem Augenblick eine Ablenkung, welche dem Augenblickswert des Stromes proportional ist wie ein Kathodenstrahlbündel. Die gewöhnlichen Galvanometer haben aber so viel Trägheit, daß sie bei Wechselstrom keinen Ausschlag zeigen, weil jedem Anstoß von einer positiven Halbwelle ein entgegengesetzter von der negativen Halbwelle folgt. Blondel ist es durch Anwendung des Deprez-

[1]) Wehnelt hat die Röhre dahin abgeändert, daß die Kathodenstrahlen durch die in § 227 erwähnte Ausstrahlung aus glühenden Metalloxyden erzeugt werden. Physikal. Zeitschr. VII, S. 732, 1905.

D'Arsonvalschen Prinzipes (§ 257) auf folgende Weise gelungen, ein Instrument von so geringer Trägheit herzustellen, daß es jedem Augenblickswert des Wechselstromes folgen kann. Zwischen zwei starken Magnetpolen *NS* (Abb. 481) befindet sich eine aus dünnen Drähten oder Bändern gebildete Stromschleife, welcher bei *b* der Wechselstrom zugeführt wird. Auf den beiden Drähten ist das kleine Spiegelchen *a* befestigt. Die Stromschleife wird proportional dem Strome gedreht, wie eine Ankerschleife einer Gleichstrommaschine; während der positiven Halbwelle nach der einen Seite, während der negativen nach der anderen Seite. Und da die Trägheit dieses Systemes sehr klein ist, erfolgt die Drehung proportional den Augenblickswerten. Um die Bewegung des Spiegelchens sichtbar zu machen, läßt man einen kräftigen Lichtstrahl auf ihn fallen und nach Konzentration mittels einer Zylinderlinse auf ein lichtempfindliches Papier, das auf einer Trommel aufgespannt ist, die von einem Synchronmotor gedreht wird. Die Abb. 265, 324, 374 u. a. sind auf diese Weise gewonnen.

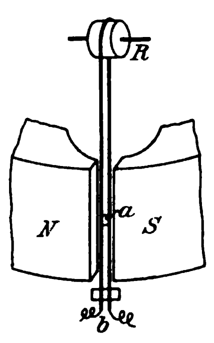
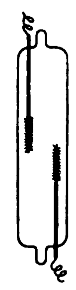


Abb. 481. Oszillograph.

IV. Glimmlicht-Ondograph (Gehrke).

In einer luftverdünnten Röhre sind zwei lange drahtförmige Elektroden (Abb. 482) eingeschmolzen. Wird eine genügend hohe Spannung angeschlossen, so überzieht sich (nach § 216) jene, welche eben Kathode ist, mit dem kathodischen Glimmlicht, dessen Ausbreitung auf der Elektrode von der Spitze aus proportional der Stromstärke ist. Die Länge des Glimmlichtes auf der Elektrode ist also den Augenblickswerten des Wechselstromes, an den die Röhre angeschlossen ist, proportional. Beim Wechsel der Stromrichtung erscheint das Glimmlicht auf der anderen Elektrode. Betrachtet man sie in einem rotierenden Spiegel derart, daß die beiden Elektroden in einer Linie liegen, so sieht man leuchtende Flächen, deren äußerer Rand die Spannungswelle der Stromquelle darstellt. Da die Entladungserscheinung erst bei mehr als 300 Volt eintritt, ist diese Methode nur bei hoher Spannung verwendbar, aber gerade deshalb in manchen Fällen sehr zweckmäßig. Die Abb. 287 a—c sind nach diesem Verfahren gewonnen worden.


Abb. 482. Glimmlicht-Ondograph.

Magnetische Messungen.

281. Bestimmung der Kraftliniendichte und Kraftlinienmenge.

I. Um die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ eines magnetischen Feldes in Luft mit einem anderen zu vergleichen, benützt man eine an einem Faden aufgehängte Magnetnadel und versetzt sie in beiden Feldern in Schwingungen. Ist T das Trägheitsmoment und $\mathfrak{M}$ das magnetische Moment der Nadel, so macht sie in dem Felde $\mathfrak{H}$ in einer Zeiteinheit n Schwingungen und diese sind

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{H}}{T}},$$

in einem anderen Felde $\mathfrak{H}'$ macht sie n' Schwingungen und daher ist

$$n^2 : n^{2\prime} = \mathfrak{H} : \mathfrak{H}'.$$

Diese Methode ist aber nur bei schwachen Feldern anwendbar.

II. Um die durch eine gewisse Fläche gehende Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$ zu messen, verwendet man ein ballistisches Galvanometer (§ 268), das an die Enden einer Drahtspule von N-Windungen angeschlossen ist (Abb. 483). Diese stellt man in dem zu messenden Felde so auf, daß sie von den Kraftlinien senkrecht getroffen wird. Entfernt man die Spule durch eine rasche Bewegung aus dem Felde bis an eine Stelle, wo es null ist, so ist die induzierte EMK nach § 125.

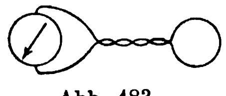


Abb. 483.

$$e = -N\frac{d\mathfrak{z}}{dt}.$$

Integriert man über die Zeit, während der die Bewegung stattfindet, so ist

$$\int e\,dt = -\int N\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\,dt = -N\mathfrak{Z}$$

und nach dem Ohmschen Gesetz

$$\int e\,dt = \int i w\,dt = q w,$$

wenn w den Widerstand des ganzen Stromkreises und q die beim Schneiden der $\mathfrak{Z}$-Kraftlinien in Bewegung gesetzte Elektrizitätsmenge bedeutet. Diese wird durch das ballistische Galvanometer gemessen,

und es ist

$$\mathfrak{Z} = -\frac{qw}{N},$$

wobei q und w in absoluten Einheiten auszudrücken sind.

Anstatt die Stromschleife aus dem Felde zu entfernen, kann man sie auch um 90° drehen. Dabei kommt sie in eine Stellung, bei der sie von keinen Kraftlinien getroffen wird, so daß die Änderung derselben auch gleich $\mathfrak{Z}$ ist. Besser ist es, wenn man die Schleife um 180° dreht; dabei werden sämtliche $\mathfrak{Z}$-Kraftlinien zweimal geschnitten, ohne daß sich die Richtung des induzierten Stromes ändert (§ 128). Man erhält so den doppelten Ausschlag im Galvanometer und muß dann natürlich auch durch 2 dividieren.

Noch besser ist es, wenn das magnetische Feld von einem Strome herrührt, der geöffnet und geschlossen werden kann. Denn in beiden Fällen ist die Änderung der Kraftlinienzahl gleich $\mathfrak{Z}$, und beim Umkehren des Stromes gleich $2\mathfrak{Z}$. Das Öffnen oder Schließen oder Umkehren des Stromes ist deswegen von besonderem Vorteile, weil man dabei die Drahtschleife feststellen kann. Mit dieser Methode erhält man auch die Kraftlinienzahl in einem Elektromagnet, wenn man die Drahtschleife um denselben herumlegt und den Magnetisierungsstrom umkehrt.

Auf diese Weise erhält man auch die Kraftlinienmenge eines Elektromagnetes oder eines Dauermagnetes an beliebigen Stellen, oder die magnetische Streuung irgend eines Apparates oder einer Maschine. Man bringt die aus einer oder mehreren Windungen bestehende Meßspule über den Magnet und kehrt dann den Magnetisierungsstrom um oder entfernt die Spule soweit, bis sie von Kraftlinien nicht mehr getroffen wird. Macht man das an verschiedenen Stellen 1, 2, 3 usw. (Abb. 484), so sind die Galvanometerausschläge den durch den betreffenden Querschnitt verlaufenden Kraftlinien proportional. Verhalten sich z. B. die in den Stellungen 1 und 2 gemessenen Ausschläge wie 10 zu 9, so weiß man, daß zwischen 1 und 2 ein Zehntel aller Kraftlinien aus dem Eisen in die Luft übertritt. Auf diese Weise kann man die ganze Verteilung der Kraftlinien ermitteln. Macht man außerdem ein Bild des magnetischen Feldes durch Eisenfeilspäne, so hat man auch die Gestalt des Feldes.

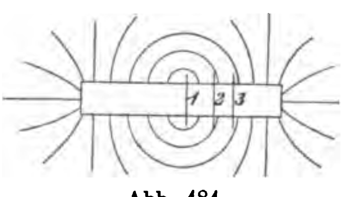


Abb. 484.

Einfacher ist es bei wechselnder Magnetisierung. Dann braucht man die Meßspule nur an die betreffende Stelle, wo man die Kraft-

linienmenge ermitteln will, zu bringen und mit einem Wechselstrom-Voltmeter zu verbinden. Dann ist nach dem Grundgesetz (§ 132)

$$\mathfrak{Z} = \frac{E \cdot 10^8}{4{,}44\, \nu N},$$

wenn die Kraftlinienmenge sich nach dem Sinusgesetz ändert. Ist dies nicht der Fall, so muß man nach einer der in § 280 angegebenen Methoden die Wellenform der induzierten EMK bestimmen und dann nach § 210 verfahren.

282. Bestimmung des Hystereseverlustes.

Von größter Wichtigkeit ist die Kenntnis der magnetischen Hysterese einer Eisensorte. Sie wird aus der Messung des gesamten Eisenverlustes V in einer von Wechselstrom magnetisierten Eisenprobe ermittelt. Den genauesten Wert erhält man, wenn man die Probe in Form eines aus Blechringen hergestellten Ringes (Abb. 485) anwendet. Mit der in dieser Abbildung dargestellten Schaltung mißt man die Klemmenspannung, den Wattverbrauch und die Stromstärke. Ist der Ohmsche Widerstand der Wickelung verschwindend klein, so kann man die Kraftlinienmenge mittels vorstehender Gleichung aus der Klemmenspannung berechnen, andernfalls muß man gemäß Abb. 169 den Spannungsabfall berücksichtigen. Das Wattmeter ergibt den gesamten Verlust V, bestehend aus Hysterese und Wirbelströmen nach Abzug der Stromwärme in der Wickelung, im Voltmeter und im Wattmeternebenschluß. Dieser ist nach § 164

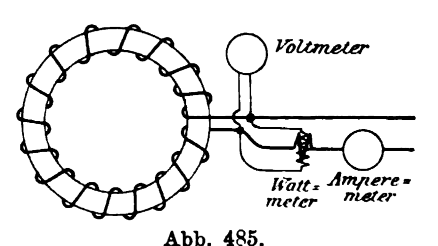


Abb. 485.

$$V = (\eta\, \nu\, \mathfrak{B}^{1,6} + \beta\, \nu^2\, \mathfrak{B}^2)\, 10^{-7}.$$

Daraus ergibt sich der Wattverlust für eine Periode

$$\frac{V}{\nu} = (\eta\, \mathfrak{B}^{1,6} + \beta\, \nu\, \mathfrak{B}^2)\, 10^{-7}.$$

Das ist eine lineare Gleichung. Trägt man daher ν als Abszissen, $\frac{V}{\nu}$ als Ordinaten auf, so erhält man eine gerade Linie (Abb. 486). Ihre Lage ist durch mindestens zwei Punkte bestimmt. Mißt

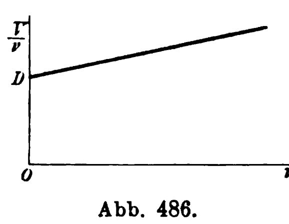


Abb. 486.

man also $\frac{V}{\nu}$ für 1 cm³ bei zwei möglichst verschiedenen Periodenzahlen aber gleicher Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$, so erhält man diese Linie für das betreffende Eisen. Der Abschnitt OD ist gleich $\eta\,\mathfrak{B}^{1,6}$, und daraus kann man den Hysteresekoeffizienten η berechnen. Der Rest des gemessenen Verlustes ist der Wirbelstromverlust und daraus kann man dann auch den Wirbelstromkoeffizienten β berechnen.

Bei häufigen Untersuchungen ist die Verwendung der Ringform unbequem, weil die Wickelung immer von neuem hergestellt werden muß. Daher empfiehlt sich die vom Verfasser[1]) angegebene Anordnung (Abb. 487). Hier wird das zu untersuchende Blechpaket A in den ebenfalls aus Blech hergestellten Rahmen BC eingespannt, der durch Abnahme des Jochstückes C geöffnet werden kann. Die Magnetisierungsspule wird über A geschoben und die Kraftlinien nehmen den durch die gestrichelten Linien angedeuteten Verlauf.

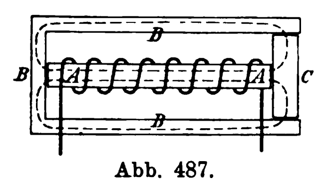
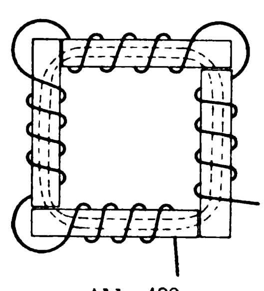


Abb. 487.

Durch eine zweite Messung, wobei zwei Spulen über die Schenkel B geschoben sind, wird der Verlust im Rahmen BC bestimmt. Aus dem Unterschied der beiden Messungen ergibt sich der Verlust im Blechpaket A allein. Diese Anordnung hat gegenüber der vom Verband Deutscher Elektrotechniker angegebenen (Abb. 488) den Vorteil, daß die Kraftlinien das Probepaket parallel durchlaufen, während bei dieser der Weg um die Ecken undefiniert ist. Die Kraftliniendichte ist daher nicht überall dieselbe. Dieser Fehler macht sich um so mehr geltend, je kürzer die Blechpakete sind.


Abb. 488.

283. Die Bestimmung der magnetischen Durchlässigkeit.

Die magnetische Durchlässigkeit $\mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}$, bzw. die Kurven in Abb. 111 ergeben sich bei Blechen am einfachsten mittels Wechselstrom aus der in Abb. 485 dargestellten Schaltung. Aus der EMK erhält man die Kraftlinienmenge $\mathfrak{Z}$ und daraus die Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$. Aus der Strom- und Leistungsmessung ergibt sich ge-

[1]) ETZ 1901, S. 52.

mäß Abb. 225 der Magnetisierungsstrom J_m und daraus die magnetisierende Kraft $\mathfrak{H}$.

Bei massiven Eisenstücken ist Wechselstrom wegen der zu starken Wirbelströme nicht anwendbar. Dann eignet sich für elektrotechnische Zwecke am besten der Apparat von Siemens & Halske (Abb. 489) mit Gleichstrommagnetisierung. *P* ist der zu untersuchende Eisenstab, der in das Eisenjoch *J* eingespannt wird. Über dem Eisenstab sitzt die Magnetisierungsspule *S*. Der hier hineingeschickte Strom gibt die magnetisierende Kraft. Die von ihr erzeugten Kraftlinien gehen durch das Joch und die in diesem eingebaute Spule *s* eines Drehspuleninstrumentes (§ 257). Durch dessen Wickelung wird ein Hilfsstrom *h* geschickt. Daher ist der Ausschlag der Spule *s* proportional dem Produkte aus diesem Hilfsstrom und der Kraftlinienmenge. Wird nun der Hilfsstrom gemessen, so erhält man die Kraftlinienmenge und daraus die Kraftliniendichte. Jedem Apparat wird ein Normalstab mit $\mathfrak{B}$ — $\mathfrak{H}$-Kurve beigegeben, wonach der Hilfsstrom in Einheiten von $\mathfrak{B}$ geeicht werden kann.

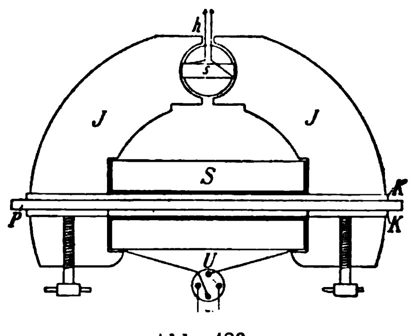


Abb. 489.

Siebzehntes Kapitel.

Das absolute Maßsystem.

284. Die Grundeinheiten.

Alle physikalischen Größen lassen sich auf drei voneinander unabhängige zurückführen; diese sind: Länge, Masse und Zeit. Die Einheiten für diese Größen sind durch internationale Vereinbarungen festgestellt und so bestimmt, daß sie, wenn die Urmaße einmal verloren gingen, wieder von neuem hergestellt werden können.

Man hat zu unterscheiden zwischen absoluten und praktischen Einheiten.

Die praktische Einheit der Länge ist der vierzigmillionste Teil des Erdmeridians und heißt Meter. Die absolute Einheit ist der hundertste Teil des Meters: das Zentimeter.

Die praktische Einheit der Masse ist das Kilogramm, das ist die Masse eines Kubikdezimeters Wasser bei 4^0. Die absolute Einheit ist das Gramm, das ist der tausendste Teil des Kilogramms.

Die praktische Einheit der Zeit ist die Stunde; die absolute Einheit die Sekunde.

Auf diese drei Größen lassen sich alle übrigen durch ihre Definitionen zurückführen. Man deutet sie symbolisch durch C, G, S an. Die Formel, welche irgend eine Größe durch die Grundeinheiten ausdrückt, nennt man die Dimension dieser Größe.

285. Geometrische Einheiten.

Eine Fläche ist das Produkt zweier Längen. Die Dimension derselben ist also C^2 und die absolute Einheit das Quadratzentimeter.

Ein Rauminhalt ist das Produkt dreier Längen; die Dimension ist also C^3, die absolute Einheit das Kubikzentimeter; die praktische Einheit das Kubikmeter, bzw. das Liter.

Ein Winkel hat keine Dimension; er ist eine bloße Zahl, das Verhältnis zweier Längen.

286. Mechanische Einheiten.

Die Geschwindigkeit v ist das Verhältnis des Weges zur Zeit: $v = \frac{C}{S}$. Um den Bruchstrich zu vermeiden, schreibt man die Dimension in der Form: CS^{-1}.

Die Beschleunigung g ist das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Zeit $g = \frac{v}{S}$.

Also die Dimension: CS^{-2}.

Die Kraft oder das Gewicht F ist bestimmt durch das Produkt aus Masse und Beschleunigung $F = mg$. Daher die Dimension: CGS^{-2}.

Ist $m = 1$ und $g = 1$, so ist auch $F = 1$, das heißt: die absolute Einheit der Kraft ist jene, welche der Masse Eins die Beschleunigung Eins erteilt; man nennt sie ein Dyn. Die Erde erteilt durch ihre Anziehungskraft der Masse eines Grammes eine Beschleunigung von rund 980 cm. Das Gewicht eines Grammes, oder die Kraft, mit der es auf seine Unterlage drückt, ist demnach 980 absol. Einh. Die Einheit der Kraft — das Dyn — wird also durch das Gewicht des 980. Teiles von einem Gramm dargestellt; und ein Kilogrammgewicht repräsentiert 980000 Dyn. Die Begriffe Masse und Gewicht werden häufig nicht scharf genug getrennt. Im gewöhnlichen Sprachgebrauche sagt man gewöhnlich Gewicht, obwohl man die Masse meint. Es hat aber in der Regel gar kein Interesse, das Gewicht, d. h. die Anziehungskraft der Erde auf einen Körper zu kennen; es handelt sich vielmehr darum, zu wissen, wie viel man von dem Körper hat, d. h. wie viel Moleküle vorhanden sind. Daß man zur Vergleichung zweier Massen die Wage benützen kann, kommt daher, daß die Anziehungskraft an demselben Orte der Erde, also auch für beide Wagschalen dieselbe ist. Man soll daher bei technischen Angaben immer unterscheiden zwischen Gramm und Grammgewicht, zwischen Kilogramm und Kilogrammgewicht.

Die Arbeit ist das Produkt aus der Kraft und dem in der Richtung der Kraft zurückgelegten Wege $A = FC$.

Dimension: C^2GS^{-2}.

Da die Einheiten der Kraft und des Weges schon festgestellt sind, so ist die Einheit der Arbeit jene, welche ein Dyn auf dem Wege von 1 cm leistet, und diese heißt Erg. Die praktische Einheit der Arbeit ist das Kilogrammeter, das ist jene Arbeit, welche geleistet wird, wenn man 1 kg 1 m hoch hebt. Da nach dem Vorigen 1 kg = 980000 Dyn und 1 m = 100 cm ist, so ist

$$1 \text{ kgm} = 98000000 \text{ Erg} = 98 \cdot 10^6 \text{ Erg}.$$

Das Drehmoment hat die gleiche Dimension wie die Arbeit, denn es ist das Produkt aus einer Kraft und dem Abstande des Angriffspunktes derselben vom Drehungspunkt.

Die Wärme ist bekanntlich auch eine Arbeit; man mißt sie aber mittels eines besonderen Maßes, der Kalorie. Und zwar ist eine Grammkalorie jene Wärmemenge, welche notwendig ist, um die Temperatur von 1 g Wasser um 1^0 zu erhöhen; eine Kilogrammkalorie ist jene Wärmemenge, welche 1 kg Wasser um 1^0 erhöht.

Um von diesen Einheiten zu den mechanischen überzugehen, braucht man eine Verwandlungszahl, ebenso wie wenn man Zoll in Zentimeter umwandeln will; und zwar ist

$$1 \text{ Kilogrammkalorie} = 424 \text{ Kilogrammeter} = 424 \cdot 98 \cdot 10^6 \text{ Erg.}$$

Daraus folgt:

$$1 \text{ Grammkalorie} = 424 \cdot 98 \cdot 10^3 \text{ Erg} = 415 \cdot 10^5 \text{ Erg.}$$

oder in runder Zahl: $= 42 \cdot 10^6$ Erg.

Die Zahl 424 nennt man das mechanische Wärmeäquivalent.

Aus der letzten Gleichung folgt, daß

$$1 \text{ Erg} = 0{,}24 \cdot 10^{-7} \text{ Grammkalorien}$$

ist. Über die Beziehungen zwischen Erg, Kalorie und Watt vergleiche § 289.

Leistung (Effekt) P ist die auf 1 Sekunde entfallende Arbeit. Man hat demnach die Arbeit durch die Zeit, in der sie geleistet wird, zu dividieren:

$$P = \frac{A}{S}.$$

Dimension: $C^2 G S^{-3}$.

Als Einheit dient die Arbeit von 1 Erg in 1 Sekunde und wird Sekundenerg genannt.

Die praktische Einheit ist die Pferdestärke PS.

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ Kilogrammeter in 1 Sekunde} = 75 \cdot 98 \cdot 10^6 = 736 \cdot 10^7 \text{ Erg in 1 Sekunde.}$$

Die Engländer rechnen nach horse-power. 1 HP = 76 kgm.

Die Schwingungszahl irgend einer Schwingung oder die Periodenzahl ν eines Wechselstromes hat auch eine Dimension; denn es ist $\nu = \frac{1}{\tau}$, und τ ist eine Zeit. Die Dimension ist also: S^{-1}.

Dieselbe Dimension hat auch $\omega = 2\pi\nu$, da π eine bloße Zahl ist.

287. Das elektrostatische Maßsystem.

Nach dem Coulombschen Gesetze wirken zwei gleich große magnetische oder elektrische Massen m mit einer Kraft

$$F = \frac{m \cdot m}{r^2} = \frac{m^2}{r^2}$$

aufeinander. Wir finden demnach aus

$$m = r\sqrt{F}$$

und der Dimension der Kraft die Dimension einer magnetischen oder elektrischen Masse: $C^{3/2} G^{1/2} S^{-1}$.

Die Einheit der magnetischen Masse oder der Elektrizitätsmenge ist demnach jene, welche auf eine gleich große, im Abstande von 1 cm befindliche Menge die Kraft von 1 Dyn ausübt.

Das magnetische Moment ist nach § 9 $\mathfrak{M} = ml$.
Also die Dimension: $C^{5/2} G^{1/2} S^{-1}$.

Das magnetische oder elektrische Potential ist $\frac{m}{r}$.
Also die Dimension: $C^{1/2} G^{1/2} S^{-1}$

Die Kraftliniendichte (in Eisen $\mathfrak{B}$, in Luft $\mathfrak{H}$) oder Feldstärke ist nach § 7 $\mathfrak{H} = \frac{m}{r^2}$.

Dimension $C^{-1/2} G^{1/2} S^{-1}$.

Die Gesamtzahl der Kraftlinien ist $\mathfrak{Z} = \mathfrak{B}S$, wenn S die Querschnittsfläche bedeutet.

Dimension $C^{3/2} G^{1/2} S^{-1}$.

Die elektrische Kapazität eines Leiters oder Kondensators ist nach § 22 $\frac{Q}{U}$, wobei Q die Elektrizitätsmenge und U das Potential ist. Wir finden also durch Division der entsprechenden Dimensionen für die Dimension der Kapazität eine bloße Länge. Das stimmt mit § 22 überein, wo wir die Kapazität einer Kugel gleich ihrem Radius fanden. Die Einheit der Kapazität hat demnach eine Kugel vom Radius 1.

Die elektrostatischen Einheiten werden gewöhnlich durch *ESE* bezeichnet.

288. Das elektromagnetische Maßsystem.

Bei der Ableitung der Einheiten des vorigen Kapitels sind wir ausgegangen von der Kraftwirkung ruhender magnetischer oder elektrischer Massen, also von einer statischen Wirkung. Wir können

aber auch ausgehen von der Kraft F, die ein elektrischer Strom i auf eine im Abstande a befindliche Masse m ausübt (79):

$$F = \frac{2\,im}{a}.$$

Aus dieser Gleichung können wir die Dimension der Stromstärke ableiten, da die der Kraft und der magnetischen Masse schon bekannt sind. Wir gelangen dadurch zu einem anderen Maßsystem der elektrischen Größen, dem elektromagnetischen, aus dem die praktischen Einheiten der Elektrotechnik entnommen sind.

Die Dimension der Stromstärke ist also $C^{1/2} G^{1/2} S^{-1}$.

Die Einheit der Stromstärke hat dann nach § 81 jener Kreisstrom vom Radius 1, der auf eine im Mittelpunkt befindliche magnetische Masse 1 eine Kraft von 2π Dyn ausübt.

Die Elektrizitätsmenge ist nach § 41 das Produkt aus Stromstärke und Zeit. Daher ist die Dimension einer elektrischen Masse im elektromagnetischen Maßsystem: $C^{1/2} G^{1/2}$.

Das Potential oder die Spannung (elektromotorische Kraft) gibt nach § 52 mit der Stromstärke und der Zeit die Arbeit: $A = eit$. Wir finden also aus der Dimension der Arbeit, der Stromstärke und der Zeit die Dimension der EMK: $C^{3/2} G^{1/2} S^{-2}$.

Aus § 124 folgt, daß die Einheit der EMK in einem Leiter von 1 cm Länge induziert wird, wenn man denselben mit der Geschwindigkeit 1 in einem Felde von der Stärke 1 in einer zu den Kraftlinien und zum Leiter normalen Richtung bewegt.

Der Widerstand ist nach dem Ohmschen Gesetze

$$w = \frac{e}{i}.$$

Daher ist die Dimension: CS^{-1}.

Für die Kapazität folgt aus $\frac{Q}{U}$ die Dimension: $C^{-1}S^2$.

Für den Koeffizienten der Selbstinduktion und den der gegenseitigen Induktion finden wir die Dimension aus den Beziehungen

$$e = L\frac{di}{dt}, \quad e = M\frac{di}{dt} \text{ (§§ 103, 145).}$$

di hat die Dimension einer Stromstärke und dt ist eine Zeit. Man erhält so für die Dimension von L und M eine Länge: C.

Die elektromagnetischen Einheiten werden gewöhnlich durch *EME* bezeichnet.

289. Die praktischen Einheiten.

Für die Praxis haben sich diese absoluten elektromagnetischen Einheiten als ungeeignet erwiesen, da sie entweder zu groß oder zu klein sind, und man infolgedessen mit zu kleinen oder zu großen Zahlen zu rechnen hat. So ist z. B. die absolute Einheit der EMK etwa der hundertmillionste Teil eines Daniellschen Elementes. Man hat daher das Hundertmillionenfache der absoluten Einheit als praktische Einheit festgesetzt und Volt genannt. Also:

$$1 \text{ Volt} = 10^8 \; EME.$$

Für Widerstandsmessungen hatte schon Werner Siemens eine praktische Einheit eingeführt, nämlich den Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 mm² Querschnitt bei 0°.

Um dieser sogenannten Siemenseinheit nahezukommen, wurde vom Elektrotechnikerkongreß in Paris 1881

$$1 \text{ Ohm} = 10^9 \; EME$$

festgesetzt und gleich 1,06 Siemenseinheiten bestimmt. Spätere genaue Bestimmungen haben ergeben, daß 1 Ohm = 1,063 Siemenseinheiten ist.

Die praktische Einheit der Stromstärke wurde Ampere genannt. Für diese gibt es aber jetzt keine freie Wahl mehr, sondern es folgt aus dem Ohmschen Gesetze:

$$1 \text{ Ampere} = \frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ohm}} = \frac{10^8}{10^9} = \frac{1}{10} \; EME$$

oder

$$1 \text{ Ampere} = 10^{-1} \; EME.$$

Ein Ampere scheidet in 1 Sekunde 0,0033 mg Knallgas (H_2O), 0,328 mg Kupfer, 1,118 mg Silber aus.

Die praktische Einheit der Elektrizitätsmenge ist das Coulomb (*Cb*). Daß ist jene Elektrizitätsmenge, die ein Strom von 1 *A* in 1 Sekunde liefert. Daher ist ebenso wie für das Ampere 1 Coulomb = 10^{-1} *EME*.

Häufig findet man auch den Ausdruck Amperestunde. Das ist jene Elektrizitätsmenge, die 1 *A* während einer Stunde liefert; da eine Stunde 3600 Sekunden hat, so sind dies 3600 *Cb*. Ein Strom von 2 Ampere gibt also z. B. in 2 Stunden 4 Amperestunden = 14400 *Cb*. Dasselbe gibt aber auch ein Strom von 0,5 *A* in 8 Stunden u. s. f.

Die praktische Einheit der Kapazität, das Farad, ergibt sich aus der Gleichung:

$$1 \text{ Farad} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volt}} = \frac{10^{-1}}{10^{8}} = 10^{-9}\, EME.$$

Die praktische Einheit des Koeffizienten der Selbstinduktion und der gegenseitigen Induktion ist das Henry. Dieses muß dasselbe Vielfache der *EME* sein wie der Widerstand, da die Selbstinduktion in dem Ausdruck für den scheinbaren Widerstand eines Wechselstromes (§ 133) vorkommt. Also

$$1 \text{ Henry} = 10^{9}\, EME.$$

Im vorigen Paragraphen haben wir für die Dimension dieser Koeffizienten eine Länge (Zentimeter) gefunden. Nun sind 10^9 Zentimeter gleich der Länge eines Erdquadranten, weshalb diese Einheit früher Quadrant hieß.

Die praktische Einheit für die elektrische Leistung heißt Watt und ergibt sich aus:

$$1 \text{ Watt} = 1 \text{ Volt} \times 1 \text{ Ampere} = 10^{8} \cdot 10^{-1} = 10^{7} \text{ Sekundenerg.}$$

Statt Watt findet sich auch der Ausdruck Voltampere.

Die Dimension der elektrischen Leistung ist natürlich die der Leistung überhaupt; denn es gibt nur eine Leistung und eine Arbeit, ob sie nun in der Form von mechanischer Arbeit oder von Wärme oder von elektrischer Arbeit auftritt. Man kann sich davon leicht überzeugen, wenn man die Dimension von Spannung und Strom miteinander multipliziert.

Aus den in § 286 enthaltenen Zahlen folgt dann weiter:

$$736 \text{ Watt} = 1 \text{ PS},$$

$$1 \text{ Watt} = \frac{1}{9{,}8} \text{ kgm in 1 Sekunde},$$

$$1 \text{ Watt} = 0{,}24 \text{ Grammkalorien in 1 Sekunde.}$$

1000 Watt nennt man 1 Kilowatt, und es ist

$$1 \text{ Kilowatt} = 1{,}36 \text{ PS.}$$

Für die praktische Einheit der elektrischeu Arbeit hat man das Joule. Nach § 52 ist Arbeit $A = EJt = EQ$, wenn Q die Elektrizitätsmenge bedeutet. Dann ist

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Volt} \times 1 \text{ Coulomb} = 10^{8} \cdot 10^{-1} = 10^{7} \text{ Erg.}$$

Häufig findet man statt Joule den Ausdruck Voltcoulomb.

Ferner findet man folgende Ausdrücke: Wattstunde, das sind 3600 Watt; diese Arbeit wird geleistet durch 3600 Watt in 1 Sekunde oder durch 1 Watt in 1 Stunde u. s. f.

1 Kilowattstunde sind 1000 Wattstunden.

In vielen Fällen würde die Verwendung dieser Einheiten noch unbequem kleine oder große Zahlen ergeben. Man setzt daher zur Bezeichnung des millionsten Teiles das Wort mikro (= klein) vor.

Es ist daher:

$$1 \text{ Mikroohm} = \frac{1}{1000000} \text{ Ohm} = 10^3 \, EME.$$

$$1 \text{ Mikrofarad} = 10^{-6} \text{ Farad} = 10^{-15} \, EME.$$

Zur Bezeichnung des Millionenfachen setzt man das Wort mega (= groß) vor.

Es ist daher 1 Megohm = 1000000 Ohm = 10^6 Ohm = 10^{15} *EME.*

Den tausendsten Teil eines Ampere bezeichnet man auch als Milliampere.

290. Beziehung zwischen dem elektrostatischen und elektromagnetischen Maßsystem.

Vergleicht man die Dimensionen derselben Größe des einen und des anderen Maßsystemes, so findet man, daß z. B. die Elektrizitätsmenge des elektromagnetischen Systems mit CS^{-1} multipliziert werden muß, um dieselbe elektrostatische Einheit zu erhalten. Nun wissen wir aus § 286, daß CS^{-1} eine Geschwindigkeit (v) ist. Vergleicht man weiter, so findet man, daß diese Geschwindigkeit überall, wenn auch mit verschiedenen Potenzexponenten auftritt. So ist z. B. die *EME* der Kapazität mit $C^2S^{-2} = v^2$ zu multiplizieren, um die *ESE* zu erhalten.

Merkwürdigerweise hat die experimentelle Bestimmung dieses v ergeben, daß es gleich der Lichtgeschwindigkeit ist:

$$v = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm in 1 Sekunde.}$$

Es ist also die *EME* der Kapazität gleich $3^2 \cdot 10^{20}$ *ESE.*

Oder umgekehrt: 1 *ESE* der Kapazität $= \frac{1}{9} \, 10^{-20}$ *EME.*

Und weil $10^{-9} \, EME = 1$ Farad,

so ist für die Kapazität: $1 \, ESE = \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ Farad.

Ebenso findet man:

Potential:	$1\ ESE = 300$ Volt,
Widerstand:	$1\ ESE = 9 \cdot 10^{11}$ Ohm,
Stromstärke:	$1\ ESE = \frac{1}{3}\ 10^{-9}$ Ampere,
Elektrizitätsmenge-	$1\ ESE = \frac{1}{3}\ 10^{-9}$ Coulomb.

Beispiel: Es sei die Kapazität eines Plattenkondensators von $S = 100$ cm² Fläche und mit einem 0,2 cm dicken Luftzwischenraum in Farad anzugeben. Nach § 27 ist die Kapazität

$$\frac{S}{4\pi a} = \frac{100}{4\pi \cdot 0{,}2} = 41\ ESE.$$

Das sind:

$$41 \frac{1}{9}\ 10^{-11} = 4{,}5 \cdot 10^{-11}\ \text{Farad} = 4{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{Mikrofarad}$$
$$= 0{,}000045\ \text{Mikrofarad}.$$

291. Verwendung der Dimensionen zur Rechnungskontrolle.

In § 118 haben wir die Kraft, die zwischen zwei parallelen Stromleitern wirkt, gleich $-2\,ii'\frac{l}{a}$ gefunden. Wenn dieser Ausdruck richtig ist, so muß er die Dimension einer Kraft haben. l und a sind Längen; es bleibt daher $\text{Dim}\ ii' = \text{Dim}\ i^2 = [C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}]^2 = CGS^{-2}$ und das ist wirklich die Dimension einer Kraft.

Da nur gleichartige Ausdrücke addiert werden können, so muß in dem scheinbaren Widerstande eines Wechselstromes

$$\sqrt{w^2 + \omega^2 L^2}$$

der Ausdruck ωL dieselbe Dimension haben wie der Widerstand. Die Dimension von L ist C, die von ω ist S^{-1}. Die Dimension von ωL ist CS^{-1}, also wirklich die eines Widerstandes.

Dasselbe gilt für den scheinbaren Widerstand eines Kondensators $\frac{1}{\omega C}$ (§ 170).

$$\text{Dimension: } \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{S^{-1} C^{-1} S^2} = CS^{-1},$$

also auch die eines Widerstandes.

Auf diese Weise hat man ein Kennzeichen für die Richtigkeit einer Ableitung, insofern als ein Ausdruck, der nicht die ihm zukommende Dimension hat, gewiß falsch ist. Natürlich muß man bei den magnetischen und elektrischen Größen immer innerhalb desselben Maßsystems bleiben.

Für diesen Zweck sind im folgenden die wichtigsten Dimensionsformeln zusammengestellt.

Allgemeine Größen:

Größe	Dimension
Fläche, Querschnitt	C^2
Raum	C^3
Winkel, Bogen	1
Geschwindigkeit	CS^{-1}
Winkelgeschwindigkeit	S^{-1}
Beschleunigung	CS^{-2}
Kraft	CGS^{-2}
Arbeit, Drehmoment	C^2GS^{-2}
Leistung	C^2GS^{-3}
Druck (Kraft auf die Flächeneinheit)	$C^{-1}GS^{-2}$
Trägheitsmoment	C^2G
Schwingungsdauer	S
Umlaufszahl, Schwingungszahl, Periodenzahl, Frequenz	S^{-1}
Dichte (Masse der Raumeinheit	$C^{-3}G$
Spezifisches Gewicht	1
Wirkungsgrad	1

Magnetische und elektrische Größen	Elektrostatisches Maßsystem	Elektromagnetisches Maßsystem
Magnetische oder elektrische Masse (Polstärke) m	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-1}$	
Magnetisches Moment $\mathfrak{M}$	$C^{5/2}G^{1/2}S^{-1}$	
Kraftliniendichte $\mathfrak{B}$; Feldstärke, elektrisierende oder magnetisierende Kraft $\mathfrak{H}$	$C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$	$C^{-1/2}G^{1/2}S^{-1}$
Kraftlinienmenge $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}$	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-1}$	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-1}$
Magnetomotorische Kraft $\mathfrak{F}$ (Amperewindungen)	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$
Magnetischer Widerstand $\mathfrak{w}$	C^{-1}	C^{-1}
Windungszahl N	$C^{-1}S$	1
Koeffizient der Selbstinduktion L / Koeffizient der gegenseitigen Induktion M	$C^{-1}S^2$	C
Elektrischer Widerstand w	$C^{-1}S$	CS^{-1}
Spezifischer elektrischer Widerstand α	S	C^2S^{-1}
Kapazität	C	$C^{-1}S^2$
Elektrizitätsmenge q, Q	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-1}$	$C^{1/2}G^{1/2}$
Stromstärke	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-2}$	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$
Potential U, Spannung K, Elektromotorische Kraft E	$C^{1/2}G^{1/2}S^{-1}$	$C^{3/2}G^{1/2}S^{-2}$
Dielektrizitätskonstante ϑ	1	1
Magnetische Durchlässigkeit μ	1	1
Magnetisches Aufnahmevermögen $\varkappa$	1	1

Zusammenstellung der wichtigsten Bezeichnungen.

a, A = Arbeit.
a = senkrechter Abstand.
a = Atomgewicht.
α = Spezifischer elektrischer Widerstand.
$\mathfrak{B}$ = Kraftliniendichte.
β = Wirbelstromkoeffizient.
C = Kapazität.
c = Proportionalitätsfaktor.
D = Drehmoment.
δ = Streufaktor (nach Behn-Eschenburg, S. 256).
e = Elektromotorische Kraft, Augenblickswert.
E = „ „ effektiver Wert.
$\mathfrak{E}$ = „ „ Scheitelwert.
E_{mi} = „ „ arithmetischer Mittelwert.
ε = Elektrisierungszahl.
ε = Ladung eines Elektrons.
η = Hysteresekoeffizient.
$\mathfrak{f}$ = Magnetomotorische Kraft, Augenblickswert.
$\mathfrak{F}$ = „ „ Scheitelwert.
f, F = Kraft.
f = Formfaktor
γ = Temperaturkoeffizient.
$\mathfrak{H}$ = Feldstärke, Potentialgefälle, elektrisierende Kraft, magnetisierende Kraft.
i = Stromstärke, Augenblickswert.
J = „ effektiver Wert.
$\mathfrak{J}$ = „ Scheitelwert.
J_{mi} = „ arithmetischer Mittelwert.
k = Klemmenspannung, Augenblickswert.
K = „ effektiver Wert.
$\mathfrak{K}$ = „ Scheitelwert.
$\varkappa$ = magnetisches Aufnahmevermögen.
$\varkappa$ = Kupplungsfaktor (S. 256).
l = Länge.
L = Koeffizient der Selbstinduktion.
λ = Koeffizient der äquivalenten Selbstinduktion.
m = magnetische und elektrische Masse (Polstärke).

$\mathfrak{M}$ = magnetisches Moment.
M = Koeffizient der gegenseitigen Induktion.
μ = magnetische Durchlässigkeit.
μ = Masse eines Elektrons.
n = Windungszahl auf einer Längeneinheit.
N = Windungszahl, gesamt.
ν = Schwingungszahl, Periodenzahl.
p, P = Leistung.
$q, Q, \mathfrak{Q}$ = Elektrizitätsmenge.
r = Radius.
ϱ = äquivalenter Widerstand.
S = Fläche, Querschnitt.
σ = Flächendichte (elektrische oder magnetische).
σ = Scheitelfaktor.
t = Zeit.
T = Trägheit.
τ = Streufaktor (nach Heyland, S. 167, 254).
ϑ = Dielektrizitätskonstante.
U = Potential.
$\ddot{u}$ = Übersetzungsverhältnis.
v = Streufaktor (nach Hopkinson S. 167, 254).
v = Rauminhalt.
V = Eisenverlust.
w, W = elektrischer Widerstand.
$\mathfrak{w}$ = magnetischer Widerstand.
$\mathfrak{z}$ = Kraftlinienmenge, Augenblickswert.
$\mathfrak{Z}$ = " Scheitelwert.
ω = Wechselgeschwindigkeit ($= 2\pi\nu$).
ω = Gesichtswinkel.

Schlagwörterverzeichnis.

Absolutes Maßsystem 564.
Akkumulatoren 102.
Aktive Funken 381.
Altern, magnetisches 154.
Aluminiumzelle 479.
Ampere 569.
Amperesche Regel 108.
Amperewindungen 127. 156. 173.
Analyse zusammengesetzter Wellenformen 420.
Anfangsspannung 449.
Anion 77.
Anode 77. 421.
Anodenfall 427.
Aperiodische Entladung 351.
Äquivalent, elektrochemisches 80.
Äquivalenter Widerstand 235.
Arbeit 18. 73. 134. 142. 168. 182.
— Einheit 565.
Arbeitsverlust, magnetischer 143.
— im Dielektrikum 321.
Arithmetischer Mittelwert 202. 406.
Aronsche Schaltung 498.
Aufnahmevermögen, magnetisches 134.
Augenblickswert 200.
Ausschalten des Stromes 342.

Ballistisches Galvanometer 535.
Batterien, galvanische 96.
Beruhigungswiderstand 471.
Bewegungsvorrichtungen, elektromagnetische 110.
Bogenlicht 468.
Braunsche Röhre 557.
Brücke, Thomsonsche 547.
— Wheatstonesche 549. 554.
Büschellicht 447.

Charakteristik des Lichtbogens 469.
— magnetische 170.
Chemische Wirkungen der Entladung 483.
Clark-Element 98.
Coulombsches Gesetz 2.

Dämpfung eines Meßinstrumentes 511.
— der Entladung 353. 361.
Dämpfungswiderstand 363.
Daniellsche Zelle 96.
Dauermagnetismus 140. 150. 175.
Depolarisation 95.
Diagramm der Spannungen 215.
— der Ströme 216.
— des allgemeinen Transformators 253.
Diamagnetische Stoffe 135.
Dielektrikum 41.
Dielektrizitätskonstante 41. 44.
Dissoziation 82.
Drahtlose Telegraphie 398.
Drehfeldinstrumente 525.
Drehspuleninstrumente 517.
Drehstrom 485.
— -Leistungsmessung 540.
Dreieckschaltung 491.
Dreiphasenstrom 486.
— -Leistung 497. 540.
Drosselspulen 218. 284. 415.
Dunkle Entladung 447.
Durchlässigkeit, magnetische 134. 562.
Durchschlagsfestigkeit 460. 462.
Dyn 565.
Dynamometrische Instrumente 518. 536.

Effektbogenlampe 468.
Effektiver Wert 204. 406.
Eigenschwingung 360.
Einheiten, absolute 564.
— praktische 569.
Einphasenmotoren 263. 508.
Eisen, elektrischer Widerstand 66.
— magnetische Untersuchung 561.
Eisenverluste 281.
Elektrisierende Kraft 43.
Elektrisierungszahl 52.
Elektrizitätsdurchgang durch Isolatoren 458.
Elektrizitätsleitung in Gasen 440.
Elektrizitätsmenge 62. 201.
Elektrizitätszerstreuung 443.

Elektroden 77, 421.
Elektrodenspannung 424.
Elektrolyse 77. 80. 89.
Elektrolytische Leitung 76. 81. 90.
Elektrolytischer Wellenanzeiger 395.
Elektromagnetische Instrumente 526.
— Wellen 394.
Elektrodynamische Schirmwirkung 261.
Elektrometer 35.
Elektromotorische Kraft 60. 100.
— der Selbstinduktion 205.
— induzierte 197. 337.
Elektron 434.
Elektroskop 35.
Elektrostatische Schirmwirkung 30.
— Spannungsmesser 528. 530.
Elektrostatisches Maßsystem 567.
Elementarquantum 434.
Elemente, galvanische 96.
Empfänger der drahtlosen Telegraphie 399.
Empfindlichkeit eines Instrumentes 513.
Energie im Dielektrikum 52.
— magnetische 142.
Entladeverzug 456.
Entladung, aperiodische 351.
— intermittierende 451.
— in verdünnten Gasen 424.
— oszillatorische 349.
Entmagnetisierende Kraft 150.
Entstehen eines Stromes 336. 339. 347.
Erdmagnetismus 14.
Erg 565.
Erzwungene Schwingung 360.
Extrastrom 335. 345.

Farad 570.
Faradaysches Gesetz 80.
Feld, elektrisches 3. 109. 182.
— magnetisches 3. 108. 116. 125. 180.
Feldstärke 4.
— eines Stromes 113.
Ferromagnetische Stoffe 135.
Flächendichte 16.
Flammenbogenlicht 468.
Flemmingsche Regel 194.
Folgepole 166.
Formfaktor 409.
Frequenz 199.
Frequenzmesser 556.
Fritter 395.
Funken beim Stromunterbrechen 342.
Funkendämpfung 361.
Funkenentladung 449.
Funkeninduktor 384.
Funkenstrecke 449.

Galvanische Elemente 96.
Galvanometrische Spannungsmesser 531.
Gebläse, magnetisches 121.
Gegenseitige Induktion 229.
Geißlersche Röhren 395. 425.
Gekuppelte Systeme 377.
Genauigkeit eines Instrumentes 513.
Geometrische Einheiten 564.
Geschlossener Schwingungskreis 400.
Gleichrichter 475.
Gleitfunken 465.
Glimmlicht 426. 447.

Hautwirkung 288.
Hitzdrahtinstrumente 522.
Hintereinanderschaltung 51. 313.
Homogenes Feld 8. 24.
Hörnerblitzschutzvorrichtung 117.
Hypothesen der Elektrizität 25.
Hysterese, magnetische 138.
— dielektrische 322.
Hystereseverlust 278. 411.
— -Messung 561.

Induktion, elektrische 190.
— gegenseitige 229.
— magnetische 129.
Induktionsfreie Wickelung 271.
Induktionskoeffizienten 184. 185.
Induktionsinstrumente 524. 538.
Induktionsmotoren 263. 486. 508.
Induktive Spannung 205.
Induktiver Widerstand 211.
Induzierte EMK 197. 337.
Influenz 26.
Innerer Widerstand 232.
Ionen 77. 439.
Ionisierung 438.
Isolierstoffe 458. 460. 462.

Joubertsche Scheibe 556.
Joulesches Gesetz 74.

Kapazität 33. 47.
— Formeln 34. 44.
Kapazitätswiderstand 306. 553.
Kataphorese 106.
Kathode 77. 421.
Kathodenfall 427.
Kathodenstrahlen 428. 436.
Kation 77.
Kilowatt 570.
Kirchhoffsche Sätze 70.
Klemmenspannung 68. 239. 257.
Knallgas 79. 483.
Koeffizient der gegenseitigen Induktion 184. 233.
— der Hysterese 144. 278.

Koeffizient der Selbstinduktion 185. 235. 254. 267.
— der Streuung 167. 254.
— der Wirbelströme 277.
Koerzitivkraft 140.
Kompensationsapparat 533.
Kondensator 37. 39. 47. 303.
— Formeln 44.
Kondensatorspannung 303.
Kraft 2. 4. 18. 40. 43. 111. 180.
— Maßeinheiten 565.
Kraftlinien 3.
Kraftlinienbrechung 55. 147.
Kraftliniendichte 12. 42. 133.
— Messung 559.
Kaftlinienmenge 10. 133. 155.
— Messung 559.
Kreis, magnetischer 155. 175.
Kreisprozeß, magnetischer 148.
Kunstphase 508.
Kupfervoltameter 515.
Kupplung, elektrische 389.
— magnetische 256.
Kupplungsfaktor 256. 340. 369.
Kurzschluß 258.

Ladung einer Batterie 103.
— eines Kondensators 38. 303.
Ladungsarbeit 48. 320. 328.
Leerlauf eines Transformators 234. 257. 259.
Leistung 73. 134.
— eines Zweiphasenstromes 489.
— eines Dreiphasenstromes 497.
Leistungsfaktor 213. 542.
Leistungsmesser 536. 538. 540.
Leitungsvermögen 63.
Leitungswiderstand 63.
Lenzsches Gesetz 193.
Lichtbogen 342.
— als Schwingungserzeuger 481.
— im magnetischen Felde 121.
Lichtbogenspannung 468.
Lichtbogenwiderstand 468.
Lokalströme 97.
Luftdämpfung 512.

Magnetische Arbeit 142. 189. 295. 299. 328.
— Charakteristik 170.
— Dämpfung 512.
— Durchlässigkeit 134. 562.
— Einheiten 573.
— Folgepole 166.
— Messungen 559.
— Platte 122.
— Sättigung 136.
— Schirmwirkung 149.
— Stauung 164. 249.
Magnetische Streuung 166. 247.
— Tragkraft 177.
— Verzweigung 162.
Magnetischer Kreis 155.
— Widerstand 155.
Magnetisches Altern 154.
— Aufnahmevermögen 134.
— Feld 3. 108. 116. 125. 180. 244. 327. 499. 504.
— Moment 13.
Magnetisierende Kraft 134.
Magnetisierungskurven 136. 137.
Magnetisierungsstärke 129.
Magnetisierungsstrom 247. 254. 283.
Magnetisierungszahl 134.
Magnetomotorische Kraft 155. 499. 504.
Mechanische Einheiten 565.
Mehrphasenströme 485.
Meßbrücke von Thomson 547.
— von Wheatstone 549. 554.
Meßinstrumente (allgemeines) 511.
Meßtransformator 532.
Minimumspannung 449. 469.
Mittelwert, arithmetischer 202. 406.
— quadratischer 203. 406.
Moment, magnetisches 13.
Multiplikationsstab 398.

Nebeneinanderschaltung 51.
Nebenschluß, magnetischer 171.
Nernst-Lampe 66.
Neutrale Leitung 490.
Neutraler Punkt 491.
Nichtleiter 76. 421.
Niveaufläche 21.
Normalelemente 98.
Nulleiter 490.

Oberflächenleitung 465.
Oberflächenspannung 36.
Öffnungsfunke 342. 348.
Ohm, Einheit 569.
Ohmsches Gesetz bei Gleichstrom 62.
— bei Wechselstrom 209.
Öl als Isolator 345. 460. 461.
Ondograph 558.
Oszillatoren 396.
Oszillatorische Entladung 349. 385.
Oszillograph 557.
Ozon 483.

Parallelbetrieb 380.
Paramagnetische Stoffe 135.
Periodenzahl 199.
— Messung 555.
Permeabilität 134.
Phasenmeter 542.
Phasenverschiebung 199. 210.
Polarisation 92.

Polwechselzahl 199.
Porzellan, Durchschlagspannung 461.
Potential 17. 123.
Potential auf sich selbst 25. 31.
Potentialdifferenz 62.
Potentialgefälle 18. 22.
Potentialgradient 427.
Primärer Stromkreis 229. 234.
Pulsierender Gleichstrom 476.

Quadrantenelektrometer 528.
Quecksilberlichtbogen 472.

Remanenter Magnetismus 138.
Resonanz, elektrische 309. 317. 323. 329. 374.
Resonanzreformator 329.
Resultierendes Feld 13. 499. 504.
Röntgenstrahlen 431.
Rückstandsbildung im Dielektrikum 58.

Sättigung, magnetische 136.
Scheitelfaktor 204. 409.
Scheitelkurve 353.
Scheitelwert 198. 406.
Schirmwirkung, elektrostatische 30.
— elektrodynamische 261.
— magnetische 149.
Schlagweite der Funkenentladung 452.
Schwingung, aufgedrückte 360. 378.
— elektrische 348. 380.
— erzwungene 360.
Schwingungsdauer 198.
Scottsche Schaltung 505.
Sekundäre elektrolytische Prozesse 77.
Sekundärer Stromkreis 229. 239.
Selbstinduktion 205. 338.
— äquivalente 235.
— wirksame 267.
— Koeffizient 185.
— Messung 552. 555.
Selbstpotential 25. 31.
Selbstregulierung des Transformators 237.
Selen 67.
Sender der drahtlosen Telegraphie 399.
Silbervoltameter 515.
Sinuswelle 198.
Solenoid 125.
Spannung 69.
— induktive 205.
Spannungsabfall 68. 243.
Spannungsdiagramm 215.
Spannungserhöhung 342. 366. 456.
Spannungsgefälle 427.
Spannungsgleichung 195. 231.
Spannungsmessung, indirekte 532.
Spannungswandler 532.
Spannungsverlust 68.
Spiegelinstrumente 511.
Spitzenentladung 447.
Spitzenwirkung 32.
Stabilitätsgrenze des Lichtbogens 470.
Statische Spannungsmesser 528. 530.
Stauung, magnetische 164. 249.
Stehende Wellen 391.
Sternschaltung 491.
Stickstoffbindung 483.
Strahlung, elektrische 363.
Streufaktor 167. 254.
Streuspannung 252.
Stromdiagramm 216.
Stromkomponente, wattlose 216. 306.
Strommessung, indirekte 534.
Stromstärke 62.
Stromstoß, Messung 535.
Stromverzweigung 70. 223. 228. 272. 314.
Stromwage 522.
Stromwandler 543.
Stromwärme 74. 322. 328. 345.
Suszeptibilität 134.

Teilinduktion 269.
Telegraphie, drahtlose 398.
Temperaturkoeffizient 65.
Temperatur, kritische 153.
Tesla-Transformator 367.
Thermomagnetischer Motor 153.
Thompsonsche Brücke 547.
Torsionsinstrumente 511. 518.
Trägheit 338. 513.
Tragkraft eines Magnetes 177.
Transformator 229. 266.
Transformatordiagramm 253.
Trockenelemente 99.

Übersetzungsverhältnis 230.
Überspannung 342. 366. 458.
Ummagnetisierungsarbeit 144.
Unsymmetrische Wellen 404.
Unterbrecher für Funkeninduktoren 384.
Unterbrechung eines Stromes 342.

Vektoren 220.
Ventile, elektrische 475.
Verkettung beim Zweiphasenstrom 487.
— beim Dreiphasenstrom 490. 494.
Verluste im Eisen 281.
— im Kupfer 281.
— im Dielektrikum 321.
Verschiebungsstrom 303.
Verschwinden eines Stromes 337. 339. 347.
Verzögerung, magnetische 141. 279.
— in der Phase 199.

Voltameter 515.
Voltampere 570.
Vorentladungen 450.
Vorschaltwiderstand für Bogenlampen 471.

Wärmearbeit 74. 322. 328. 345.
Wärmemenge, Einheit 566.
Wasserzersetzung 79.
Watt, Einheit 570.
Wattloser Strom 216. 306. 542.
Wattmeter 536. 538.
Wattstunde 571.
Wattstrom 216. 306.
Wechselströme, mehrphasige 485.
Wechselstromlichtbogen 474.
Wechselstrommessungen 551.
Wechselstrommotoren mit Schirmwirkung 263.
— mit verschobenen Feldern 508.
Wechselzahl 199. 555.
Wellen, elektromagnetische 394.
— stehende 391.
Wellenanzeiger 394.
Wellenformen, zusammengesetzte 402.
— unsymmetrische 404.
Wellenlänge 392.
Wellenmesser 394.
Weston-Normalelement 98.
Wheatstonesche Brücke für Gleichstrom 549.
— — für Wechselstrom 554.
Widerstand, äquivalenter 235. 551.
— Einheit 569.
— elektrischer 62.
— induktiver 211. 235. 289.
— scheinbarer 211. 221. 225. 235. 302. 551.
— spezifischer 63. 85.
— wirksamer 289. 293. 551.
Widerstandsmessung bei Gleichstrom 547.
— bei Elektrolyten 550.
— bei Wechselstrom 551.
Wirbelströme 273. 286.

Zeitkonstante 337. 351.
Zugkraft, magnetische 177.
Zündung des Lichtbogens 472.
Zusammengesetztes Feld 13.
Zusammengesetzte Wellenformen 402.
Zweigschaltung eines Strommessers 534.
Zweiphasenstrom 485.

